suma+ 89
Secciones
Noviembre 2018
pp. 35-42

Para todas las edades: números, figuras y puzles

MMACA

Del MMACA al aula

La tercera entrega del MMACA llega después de MATRIX, del cierre del proyecto europeo Erasmus+ «MathSpaces» y de un encuentro organizado en colaboración con el CESIRE-CREAMAT y la empresa eXplorium sobre las matemáticas en las primeras etapas educativas.

Esta última idea nace del compromiso asumido con la UE de organizar un encuentro para presentar los resultados del proyecto «MathSpaces» a un grupo consistente de expertos en el campo educativo. Estos productos son:

— un *booklet* en el que intentamos definir qué es la educación no-formal (no-reglada) y, en línea con estos artículos para *Suma*, lo interesante que puede resultar estrechar la colaboración con las escuelas, en particular, respecto a la educación matemática;
— una guía para ayudar a construir museos o exposiciones permanentes de matemáticas de distinto formato;
— una exposición de materiales para el alumnado de 3 a 8 años;
— una exposición de materiales para el alumnado de 8 a 15 años, focalizada en el problema de determinar superficies mínimas;
— una página web que recoge iniciativas, encuentros, espacios, etc., destinados a la

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2018 y aceptado en septiembre de 2018

educación y la popularización de las matemáticas.

Hemos pensado que resultaría más interesante y propositivo si, aparte de presentar en general estas iniciativas, centráramos dicho encuentro en una propuesta específica, que pudiera generar una colaboración de ámbito estatal más estable. Hablando con la gente del CESIRE-CREAMAT, resultó que estaban llegando muchas propuestas interesantes de actividades realizadas en la educación infantil, y así decidimos abrir el encuentro, invitando a maestros, profesores de universidad y formadores para ampliar al máximo la mirada sobre una etapa educativa que para muchos de nosotros representa un paraje inexplorado, un *hic sunt* leones absurdo en un mapa del siglo XXI.

Por otro lado, a los del MMACA, nos interesaba también recoger un juicio crítico sobre la exposición y el taller reservados al alumnado de 6-9 años que este año hemos abierto, con éxito apabullante, en la planta baja del edificio, y el maletín didáctico dirigido también a este público que empezamos a estudiar en respuesta a la demanda del profesorado, que nos pide materiales para seguir trabajando en el aula lo que han experimentado en el museo.

Prometemos dedicar un espacio de esta sesión a los resultados del encuentro, una vez recogidos y analizados.

El hecho es que este nuevo reto nos impulsó a pensar nuevos materiales y/o adaptar algunas de nuestras actividades para unos usuarios más jóvenes que los que solemos tratar, y uno de estos materiales es justamente el juego de *Fichas y Formas* que ocupó una parte importante de la anterior entrega en *Suma*.

Os recuerdo la actividad, que consiste en escoger uno de los retos y colocar las fichas en las cajas de diferente forma, de manera que en cada caja las fichas sumen el valor indicado en el reto. La regla de que se duplica el valor de la ficha, si se pone en una caja con su misma forma, hace que la resolución (especialmente las primeras veces) no sea tan simple y la actividad más interesante.

Muchas veces, los que hemos desarrollado una adicción irreversible al uso de los materiales

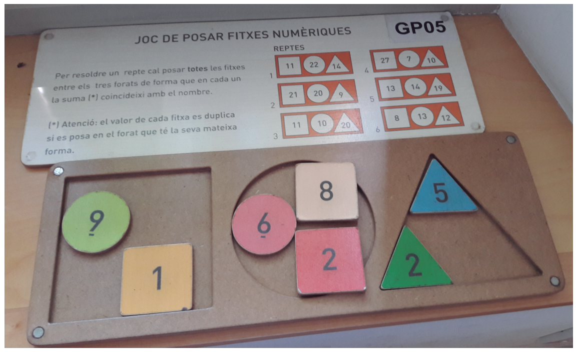

Figura 1. Solución del reto 1: 11, 22, 14

didácticos estamos de acuerdo en que una buena actividad debe ser dúctil y adaptable a distintos formatos y habilidades (intereses, conocimientos…).

Juzgad autónomamente si estas propuestas de adaptación a diferentes etapas del juego resultan interesantes[1].

Actividad 1

Caja y fichas redondas; 1 dado (figura 2).

Objetivo: reproducir la puntuación del dado.

Evidentemente, es una actividad destinada al alumnado de las primeras etapas escolares.

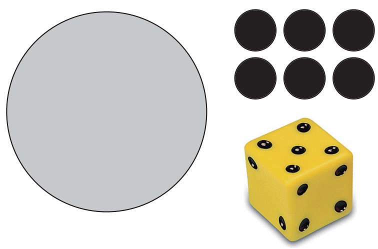

Figura 2. Primera adaptación: reconocer la puntación del dado

Actividad 2

Cajas redonda y cuadrada; fichas y un dado (figura 3).

Objetivo: reproducir la puntuación del dado.

Regla: En la caja cuadrada, cada ficha vale el doble.

Gana quien reproduce la puntación del dado usando menos fichas.

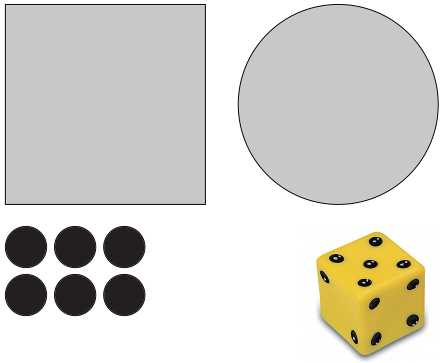

Figura 3. Segunda adaptación: relación entre el valor de la ficha y la forma de la caja

Otra adaptación que puede resultar interesante es la de sustituir forma con colores. Así que la regla sería que si fichas y cajas tienen el mismo color, esa ficha vale el doble (figura 4).

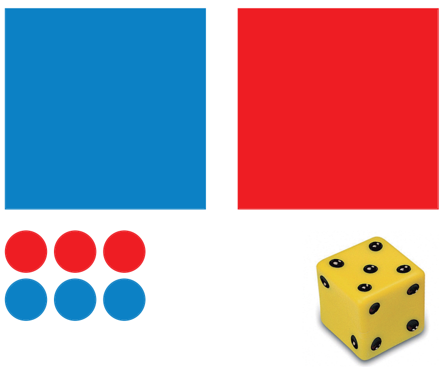

Figura 4. El mismo reto, sustituyendo las formas con los colores

Actividad 3

Cajas y fichas redondas y cuadradas y valores de 1 y 2 (figura 5).

Objetivo: resolver uno de los retos (o inventar un nuevo reto).

Regla: si ficha y caja tienen la misma forma, el valor de la ficha es doble.

También en este caso podríamos sustituir las formas con los colores[2] (figura 6).

La actividad de «construir» el reto permite una mejor comprensión de la actividad y provoca un grado mayor de satisfacción y competencia.

Se ponen como se quiere las cuatro fichas en las cajas y después se lee la suma de los valores

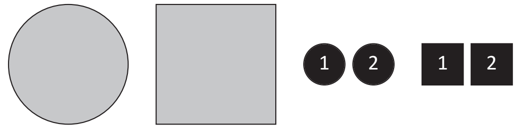

Figura 5. Tercera adaptación: primer ejemplo de construcción del reto (2 cajas)

Figura 6. Tercera adaptación: primer ejemplo de construcción del reto (2 cajas)

(recordando la regla que dobla su valor). Se escribe el resultado en las cajas, se vacían y se pasa el tablero a otro compañero para que resuelva nuestro reto.

Actividad 4

Cajas y fichas con las tres formas y valores de 1 y 2 (figura 7).

Objetivo: construir —según las modalidades descritas en la anterior actividad— o resolver un reto (figura 8).

Regla: lo mismo que la actividad anterior, con más variantes.

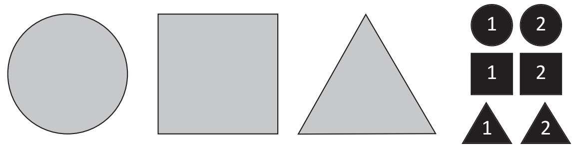

Figura 7. Cuarta adaptación: segundo ejemplo de construcción del reto (3 cajas)

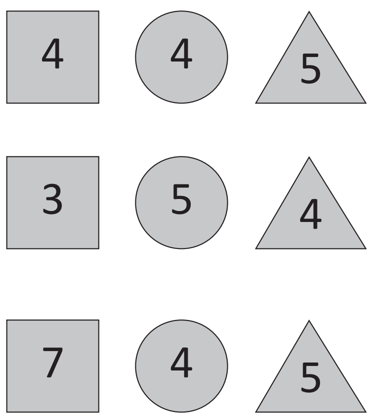

Figura 8. Ejemplos de retos sencillos

Actividad 5

Lo mismo con otros valores de las fichas (figuras 9 y 10).

Figura 9. Quinta adaptación: variando el valor de las fichas

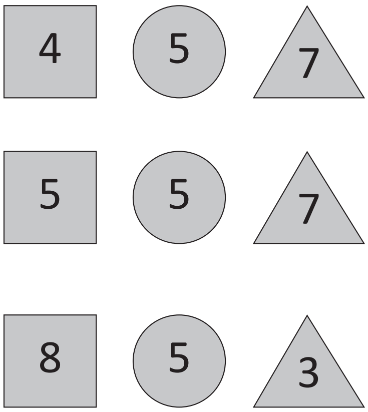

Figura 10. Ejemplos de retos sencillos

Actividad 6

Lo mismo con más valores de las fichas (figuras 11 y 12).

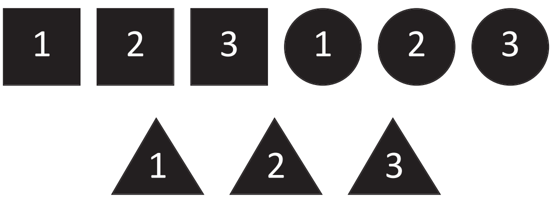

Figura 11. Sexta adaptación: variando el valor de las fichas

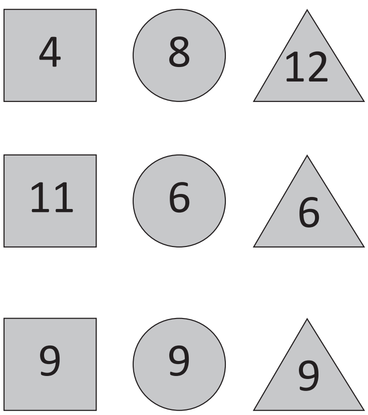

Figura 12. Ejemplos de retos sencillos

Una advertencia: solo en parte se puede considerar usar estas variantes de una manera gradual en el mismo grupo. Repetir demasiadas veces la actividad puede resultar aburrido, aun cuando se cambia el reto.

Más bien pensamos que el incremento de dificultad tiene que ser puesto en relación con la edad del grupo[3]. Así que cada uno decida cuántas y qué variaciones del reto ofrecer a su alumnado.

Al mismo tiempo, no parece tener sentido plantear a un alumnado de estas etapas las reflexiones teóricas que planteábamos en el artículo publicado en el anterior número de *Suma*, pero sí mantener la opción de hacer que los alumnos construyan su propio reto para que después otros compañeros lo resuelvan.

Más cajas, bolas y dados

Un caso más de material sencillo, adaptable y fácil de reproducir para la clase, un taller, una feria, el patio…, y siempre con el ojo puesto en el alumnado más joven.

El formato que tenemos en la exposición de los *peques* se puede ver en la figura 13.

La actividad es sencilla. Un alumno tira los dados y tiene que reproducir el valor de su suma, poniendo las *cuatro bolas* en las cajas de diferente valor.

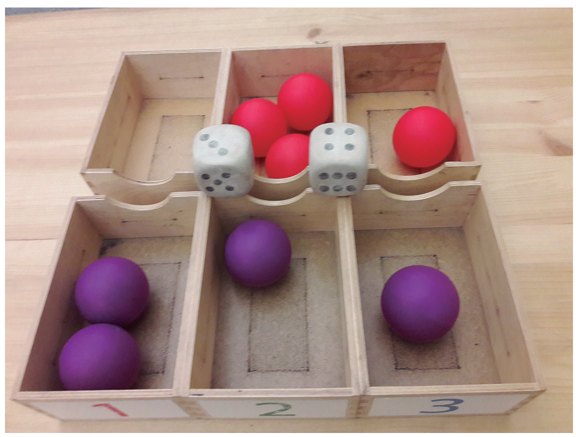

Figura 13. Módulo de caja y bolas (Exposición para estudiantes de 6 a 9 años). Los dados suman 7 y el reto ha sido resuelto de 2 maneras distintas: bolas moradas $= 2 \times 1 + 2 + 3$ y bolas rojas $= 3 \times 2 + 1$

El adversario puede intentar hacer lo mismo, si encuentra una distribución de las bolas distinta a la del compañero.

Las reglas pueden variar (¿Es obligatorio usar todas las pelotas?) ya que, como siempre, lo que importa es generar debate, hipótesis… o sea, interés. Y se pueden adaptar a la edad, conocimientos, situaciones…

Veamos un ejemplo:

En la actividad inicial (figura 14), podemos quitar un dado, una caja y la regla de usar siempre todas las bolas.

El juego se adapta así a niños más pequeños y se parece mucho a las primeras actividades que se pueden hacer usando *Fichas y Formas*. Es una buena idea compaginar actividades diferentes que repiten los mismos conceptos o competencias: se evita el aburrimiento y se refuerza el concepto.

Actividad final (figura 15). En este caso, se debe igualar la puntuación de los dados con las esferas (que suman) y el cubo (que resta).

Se puede añadir una dificultad si imponemos la regla de que el cubo, que resta, no puede estar en una caja con las esferas, que suman.

Obviamente, también esta actividad se puede fácilmente desarrollar adaptando la dificultad del reto según la edad y habilidades de los usuarios.[4]

Desde la primera vez que la presentamos como actividad familiar, en una feria que acompañaba una de nuestras exposiciones itinerantes, esta propuesta tuvo éxito. En aquel caso, que repetimos en otras circunstancias similares, añadimos la dificultad de lanzar las pelotas en grandes cubos numerados puestos a altura diferente. Una especie de baloncesto matemático, muy sencillo y más lúdico.

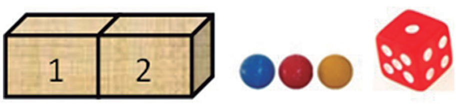

Figura 14. Adaptación del reto con un dado

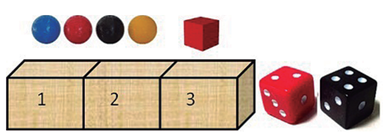

Figura 15. Actividad final: las bolas suman y el cubo resta

Más recientemente lo transformamos en el reto ilustrado anteriormente y ahora le estamos dando un formato para que se adapte a la filosofía de nuestros maletines didácticos (facilidad de reproducir las actividades con material barato, de forma que se puedan hacer más copias para adaptarlo al formato de aula).

Su aparente simplicidad no nos debe engañar. Hay algunos temas importantes que se están practicando, desde la descomposición de números, hasta un cálculo mental rudimentario.

Si sustituimos el dado clásico de puntos con otro que en sus caras lleve cifras, estaremos aprovechando una buena ocasión para construir, al mismo tiempo, los dos modelos de número que es necesario que nuestro alumnado aprenda a controlar: el que deriva de la actividad de contar (sumativo, hecho de unidades repetidas) y el que da al concepto de número una identidad propia, asociándolo con el concepto de cantidad.[5]

La versión con la pelota que, añadida, resta, sin pasarnos de elucubraciones y lecturas forzadas, se puede considerar como un pasaje ingenuo e inconsciente hacia los números negativos y el cálculo algebraico.

Un poco de geometría

Una de las críticas que a veces reciben las exposiciones del MMACA es relativa al exceso de puzles y materiales similares que llenan nuestras mesas. Es una crítica que a veces nos hacemos a nosotros mismos, pero la fidelidad hacia un modelo basado en la manipulación dinámica de los objetos y en la investigación didáctica que proponemos hace que este tipo de material se adapte bien a nuestros objetivos.

Sin embargo, no todo vale ni todo tiene el mismo impacto educativo.

No hace mucho descubrimos un puzle, hecho de 5 triángulos (figura 16).

Como en todos estos puzles, empezó la caza a los polígonos —más que nada convexos— que se pueden construir.

No extraña que se puedan hacer: cuadrado (figura 17), rectángulo, trapecio, paralelogramo, rombo, triángulo... Lo que resulta impactante es que se puedan construir ¡hasta 24 polígonos convexos diferentes![6]

No sabemos si es un récord para un puzle tan sencillo, pero muchos elementos lo hacen suponer[7].

En el mismo período vimos un problema de una olimpiada matemática en el que se pedía encontrar el área del deltoide colorado (figura 18).

La intuición guía el cálculo y, a través de semejanzas, se llega a ver que el área del deltoide es el área del cuadrado.

Llevar un «nuevo» material a uno de los encuentros del MMACA significa provocar una o varias investigaciones que acaban muchas veces en nuevos módulos o actividades para las exposiciones o los talleres. Una de estas investigaciones generó una diferente división del cuadrado (24 u^2) en partes proporcionales (figuras 19 y 20, considerando el área 1 u^2).

Del mismo modo, este reto parece perfecto para ser investigado con GeoGebra, automatizando el cálculo de las áreas de los polígonos, construido progresivamente de forma analógica (figura 21).

Dejamos abierto el debate de si esta repartición del cuadrado en más piezas puede generar más polígonos convexos que los 24 generados de la versión sencilla (tan solo 5 triángulos) de este puzle.

En casi todos los materiales que iremos presentando en esta sesión hay distintos niveles de aproximación y de dificultad de los retos.

Figura 16. El puzle de los 5 triángulos

Figura 17. El cuadrado construido con los 5 triángulos. Es útil también para construir las piezas del puzle

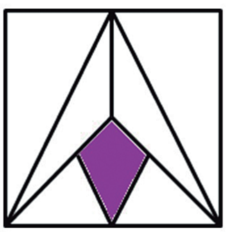

Figura 18. El área del deltoide

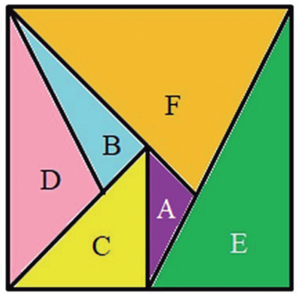

Figura 19. Una ulterior variación del reto: un puzle de proporciones

A	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}l\times\frac{1}{6}l=$	$\frac{1}{24}l^2$	1 u^2
B	$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{6}l\times\frac{\sqrt{2}}{2}l=$	$\frac{1}{12}l^2$	2 u^2
C	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}l\times\frac{1}{2}l=$	$\frac{1}{8}l^2$	3 u^2
D	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}l\times l=$	$\frac{1}{6}l^2$	4 u^2
E	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}l\times l=$	$\frac{1}{4}l^2$	6 u^2
F	$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}l\times l=$	$\frac{1}{3}l^2$	8 u^2

Figura 20. Tabla con los valores absolutos y proporcionales de las piezas

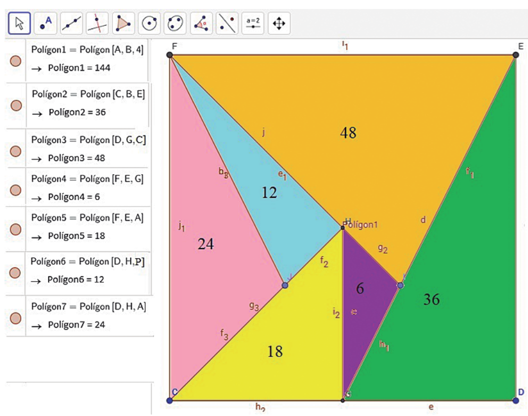

Figura 21. Construcción y resolución del puzle con GeoGebra

La actividad con el puzle de los 5 triángulos puede ser ofrecida a alumnos de educación primaria que, mínimamente familiarizados con GeoGebra, podrían construir la figura al ordenador.

Puzle de los cuatro triángulos rectángulos (cat1 = 2 × cat2)

Evidentemente más fácil y conocido. Muchos profesores lo han inventado, construido, a veces con materiales muy pobres, y usado en sus clases, de manera que nadie puede reclamar los derechos de haberlo inventado (figura 22).

Una vez más, el objetivo es el de construir polígonos equivalentes, o sea que estamos insistiendo sobre los mismos conceptos que se desarrollan con el tangram.

Aparte de que reiterar conceptos básicos (como la equivalencia de las áreas) nunca es un tiempo malgastado, las ventajas de este puzle son la simplicidad y la adaptabilidad a etapas diferentes.

Dada la cantidad pequeña de piezas y la simplicidad de las formas, se puede proponer también a alumnos de educación primaria el reto de calcular los perímetros de las figuras obtenidas.

Puede ser muy interesante discutir cómo medir. Habrá quien opte por aproximar la medida de la hipotenusa a 2,3 o 2,5; quien medirá toda la pieza con una regla y también alguien que se atreverá a proponer que los lados del triángulo se consideren iguales a 1, 2 y 2+.

Si no queremos llegar a definir la medida exacta de los perímetros, sino solo compararlos, esta última anotación, que podríamos definir «pre-algebraica», nos parece más interesante. Casi más interesante que la simple aplicación del teorema de Pitágoras que, evidentemente, se tiene que exigir al alumnado de secundaria.

Otro aspecto significativo es que para construir algunos de los polígonos es necesario mover las piezas fuera del plano, o sea hacer simetrías. Lo bonito es tener la paciencia de aguantar hasta que dentro del alumnado se alce la bendita voz que descubra a todo el mundo que no todas las figuras se pueden obtener a través de traslaciones y/o rotaciones.

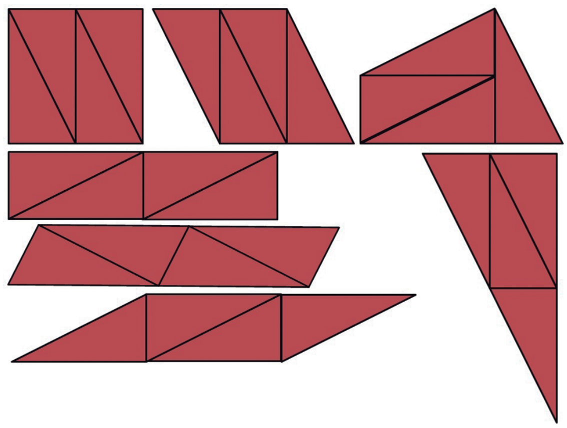

Figura 23. Polígonos obtenidos a través de traslaciones y rotaciones

Figura 22. El puzles de los 4 triángulos rectángulos

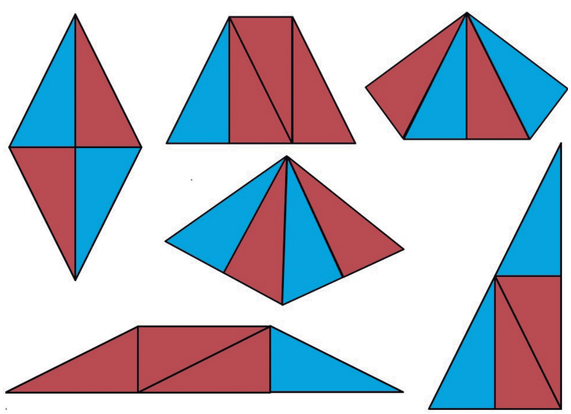

Figura 24. Polígonos obtenidos a través de la simetría

Será suficiente poner una señal que diferencie las dos caras de cada triángulo para empezar esta «nueva» investigación[8].

Una actividad mucho menos trivial de lo que parece es la de dar un nombre a los polígonos irregulares que van apareciendo, lo que comporta fijarse en el número y la medida de sus lados.

Es un ejercicio útil también para alejarnos un poco de los objetos geométricos artificiales de los libros de texto, en los que aparecen solo polígonos regulares, con sus lindas fórmulas y sus teoremas de buena familia. Y las raras veces que en un problema irrumpe una figura irregular, perturbando esta geometría eugenésica, parece puesta adrede para fastidiar la tranquilizadora regularidad, que solo nos pide saber y aplicar las reglas.

Qué la imperfección es algo común, rico, interesante y útil es una reflexión que no se puede y no se tiene que reducir al ámbito de las matemáticas, obviamente. Pero el discurso se haría largo y quizás polémico, así que optamos por acabar con estas palabras del Dalai Lama:

> Es necesario conocer bien las reglas para poder infringirlas de forma inteligente.

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya, Cornellá de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

1 En todos los ejemplos, las formas grises representan las cajas y las negras las fichas.

2 Pasa muchas veces que el esfuerzo de simplificar una actividad para adaptarla a las posibilidades de un alumnado con menores recursos produce unas reflexiones muy útiles y de uso mucho más generalizado. Sustituir formas con colores nos permitiría organizar una hoja de cálculo mucho más sencilla, en el caso de que quisiéramos explorar las soluciones posibles a nuestros retos. Por ejemplo:

DISTRIBUCIÓN DE LAS FICHAS								VALOR DE LAS CAJAS		TOTAL
CAJA				CAJA				CAJA	CAJA	CAJAS
1	2			1	2			6	6	12
2				1	2	1		4	7	11
1	2	1			2			7	4	11
1				1	2	2		2	8	10
1	2	2		1				8	2	10
				1	2	1	2	0	9	9
1	2	1	2					9	0	9
1	2			1	2			4	4	8
1				2	1	2		1	7	8
2	1	2		1				7	1	8
1	1	2		2				5	2	7
2				1	1	2		2	5	7
1	2			1	2			3	3	6

Hoja de cálculo para estudiar todas las posibles soluciones de los retos de la actividad 3. El mismo modelo se puede adaptar a las actividades más complejas

3 A veces, nos hemos encontrado que un material o una actividad pensada para la exposición resultaba demasiado difícil para la mayoria de nuestros usuarios, cosa que conlleva el riesgo —inasumible— de crear frustración. Por otra parte, los retos difíciles son los que generan más y mejores discusiones y colaboración. Lo que hemos decidido, en la mayoría de estos casos, no ha sido eliminar el reto difícil, sino acompañarlo con uno más fácil, que favoreciera la adquisición de habilidades y animara a enfrentarse al reto más complejo

4 Más o menos dados, cajas, pelotas, reglas...

5 En este sentido, en una actividad que proponemos en nuestras sesiones de formación, construimos el concepto de número a través de dos materiales: los multilinks (para evidenciar la suma de enteros) y las regletas de Cuisenaire, en las que a cada color corresponde una cantidad.

Ejemplo: 6 =   (modelos de construcción de un número con multilinks y regletas de Cuisenaire; la progresión de los colores en los multilinks respeta el color de la regleta de igual dimensión).

6 Con el Tangram chino solo se pueden construir 13 polígonos convexos. En este sentido, resulta muy interesante la demostración de que no hay más: Selected Papers of Chuan-Chih Hsiung: <https://books.google.es/books?id=s85vcMYZDJgC&pg=PP1&dq=Selected+Papers+of+Chuan-Chih+Hsiung&hl=ca#v=onepage&q=Selected%20Papers%20of%20Chuan-Chih%20Hsiung&f=false>.

7 Una pista para los amantes de los retos: aparte de 1 cuadrado y 1 rectángulo, se pueden construir 1 triángulo isósceles y 1 rectángulo, 1 rombo, 3 paralelogramos, 3 trapecios, 2 cuadriláteros, 8 pentágonos y 3 hexágonos irregulares.

8 Esperamos que nadie se escandalice leyendo ¡«las dos caras de un triángulo»! La experiencia nos dice que nuestro alumnado acepta sin problemas el salto —seguramente peligroso— del material manipulable al concepto abstracto del objeto geométrico. La licencia que nos concedemos trasformando los elementos geométricos en materiales necesita prudencia y la clara consciencia, por lo menos del profesorado, que estamos jugando al límite.

Cada uno decide por donde pende la balanza de las ventajas y desventajas: sobre un plato la ventaja de concretar los objetos de la investigación; sobre el otro la corrección formal, la fidelidad a la esencia de las matemáticas.

No es un debate nuevo, ni todos los materiales modelizan de la misma manera la realidad o los conceptos. Es fundamental que los materiales en la clase de geometría sirvan para ayudar a la construcción de los conceptos, que sigue siendo el objetivo final de nuestras actividades.

La crítica que Emma Castelnuovo hace a los materiales de Decroly, escogidos entre los objetos de la vida cotidiana, es que no siempre permiten este pasaje del concreto al abstracto. Pasaje que parece menos arduo en la propuesta de Montessori, en la que los materiales están creados pensando en la clase de matemáticas. (E. Castenuov (1957), «L'insegnamento della matematica nella scuola preelementare ed elementare», en *Scuola e città*, Firenze, 31 marzo 1957 <http://www.science.unitn.it/~fontanar/EMMA/emma.htm>.