suma+ 89
Secciones
Noviembre 2018
pp. 43-54

El lado y la diagonal de un cuadrado son iguales

Miquel Albertí Palmer

Crónica de una clase no anunciada

El título de este artículo habrá escandalizado al lector. Nada más leerlo pensará: ¡falso! Cierto, es falso, las longitudes de la diagonal y el lado de un cuadrado tienen distinta longitud. Quizá el lector piense también que cualquiera lo sabe. Sin embargo, esta última afirmación también es falsa y motiva este artículo. No todo el mundo sabe o es capaz de ver que la diagonal de un cuadrado es mayor que el lado. Para casi la mitad de los dos centenares de personas que he tenido en mis clases de 1.º de la ESO estos últimos tres cursos la afirmación de que la diagonal de un cuadrado tiene la misma longitud que el lado era verdadera. No resultará difícil imaginar la magnitud de mi sorpresa cuando tuve conocimiento de ello.

Mis alumnos utilizan cuadernos con hojas cuadriculadas de 5 mm × 5 mm. Cada vez que se trabajan con esas cuadrículas cuestiones de perímetros y de áreas ha aparecido la cuestión: muchos atribuyen a la diagonal de cada celda de la cuadrícula la misma longitud que al lado.

Las actividades a realizar eran bastante sencillas. Un tipo de ellas consistía en trazar polígonos con vértices en las intersecciones de la cuadrícula con un perímetro y/o un área determinados. Otro tipo pedía hallar el perímetro y el área de figuras ya dibujadas. No se pretendía que averiguasen los perímetros exactos de las figuras construidas con

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2018 y aceptado en septiembre de 2018

algún tramo diagonal, pero sí que, por lo menos, pudiesen decir si esa diagonal era mayor o menor que cada uno de los lados que la formaban. Esperaba, por ejemplo, que fuesen capaces de expresar que el perímetro de la figura A es de 6 cm y que el perímetro de la figura B, algo menor, estaría entre 5 cm y 6 cm (figura 1). Aventuré también que alguien mencionase el hecho de que la figura B ocupa un área mayor, pese a tener menor perímetro. La mayoría respondió correctamente la primera cuestión; otra mayoría algo distinta, no pudo responder la segunda ni, consecuentemente, realizar la última observación.

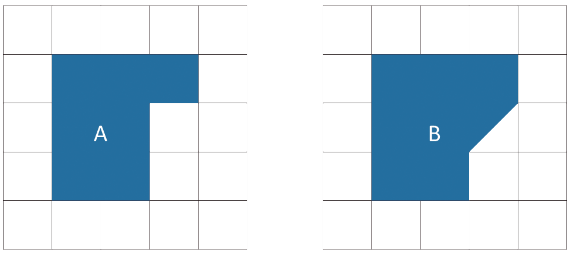

Figura 1. Dos figuras en una cuadrícula de 5 mm

Al escuchar que para una parte significativa de la clase ambas figuras tenían el mismo perímetro (6 cm) me di cuenta de que muchos pensaban que la diagonal de una celda de la cuadrícula tenía la misma longitud que cualesquiera de los cuatro lados que la determinaban. Cuando les pregunté por ello su respuesta dejaba clara tal errónea interpretación. Otros alumnos y yo mismo nos preguntamos cómo era posible. ¿Acaso no veían que la diagonal de un cuadrado es mayor que un lado (figura 2)? ¡Hasta un ciego se daría cuenta!

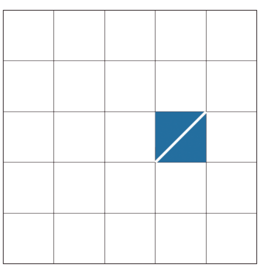

Figura 2. Diagonal de una celda de 5 mm x 5 mm

No, no lo vieron. Miraban, pero no veían. Me vino a la mente esa famosa expresión tan oída hoy en día de que los jóvenes, por el hecho de haber nacido en la era digital, se les supone una competencia digital muy superior a los que nacieron mucho antes. Acababa de comprobar que un grupo de personas que llevaban 12 años utilizando la vista y que habían nacido en la más visual de las épocas eran incompetentes visualmente. Así que abrí un diálogo entre ell@s que se desarrolló de la manera siguiente[1]:

—Profesor: Los que pensáis que no son iguales, ¿qué les diríais a los que creen que la diagonal mide también 0,5 cm?

—Ell@s: ¡Se ve claramente!

—Ell@s: Para ir de lado a lado, es más largo el de la esquina.

—Ell@s: Si lo mides, te dará más, seguro.

—Profesor: Hacedlo todos. Medid la diagonal y decid cuánto os da.

Se midió la diagonal. No resultaba sencillo dada la escasa magnitud de la celda, pero los resultados fueron bastante claros: el lado medía 0,5 cm; y la diagonal, 0,7 cm. La primera conclusión fue clara y objetiva a todas luces: la diagonal (D) era mayor que el lado (L). Hubo quien fue incluso más allá y sacó otra conclusión: que la diagonal es más pequeña que dos lados, ya que 0,7 cm < 1 cm. Por tanto: $L < D < 2 \cdot L$.

Este problema surge también al estudiar el círculo, pues no son pocos los que creen que el perímetro del círculo es igual a su diámetro o al doble de este. He podido comprobar que muchos creen que el arco AB en la figura 3 tiene la misma longitud que la poligonal AOB, que es de dos radios (un diámetro). Pese a que esta relación quizá no sea tan clara de dilucidar visualmente, tampoco se les ocurre medir ambas líneas para comprobar la validez de su afirmación.

Dos son las cuestiones primordiales asociadas a esta dificultad de interpretación visual. Una, es de carácter conceptual y tiene que ver con que el

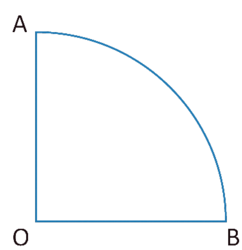

Figura 3. Para muchos alumnos, el arco AB y la línea AOB tienen la misma longitud

segmento es la más breve de todas las líneas que pueden trazarse entre dos puntos. La otra, la escasa práctica en la medida de objetos reales. Ell@s dan por sentado que su juicio (no lo considero verdaderamente una intuición) justifica sus afirmaciones. Pero lo cierto es que no distinguen entre intuición y razonamiento y que los juicios que realizan son un tanto caprichosos, pues no toman como referentes elementos objetivos como puede ser el de la medida. Los que piensan así suelen justificar que la diagonal es igual al lado porque «avanza una unidad hacia la derecha o una unidad hacia arriba, lo mismo que cada lado de la celda» (horizontal o vertical, respectivamente).

La concepción del segmento como línea más breve entre dos puntos es una definición de la que Galileo Galilei ya dio pruebas de la imposibilidad de su su demostración en su *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano* (177-179). No me pareció apropiado en ese momento enfocar por ahí la cuestión, sino tirar hacia la vertiente más práctica y experimental ya mencionada: en general, el alumnado de 1.º de la ESO no ha medido lo suficiente y pese a usar cuadernos de hojas cuadriculadas apenas conoce sus medidas. Con la medida se zanjó la cuestión.

La diagonal es mayor que el lado en cualquier cuadrado

El curso siguiente daba clase en 2.º de la ESO a gran parte de esos mismos alumnos. Como suele ocurrir, algunos habían olvidado ya esa conclusión y volvían a situarse en la concepción previa de que el lado y la diagonal del cuadrado eran iguales. Fue entonces cuando tomé una decisión didáctica y basé en esa concepción errónea todo el desarrollo del teorema de Pitágoras procurando que, de forma constructivista, tanto ell@s como yo dedicásemos al proceso el tiempo necesario.

Se volvieron a medir los lados y diagonales de las celdas de las cuadrículas y se obtuvieron los mismos resultados: 5 mm y 7 mm. Volvió a quedar claro que la diagonal superaba un lado, pero era inferior a dos. Incité entonces un diálogo nuevo:

–Profesor: Y esto de que la diagonal esté entre uno y dos lados del cuadrado, ¿ocurre en vuestro cuadrado particular o pasa en todos los cuadrados?

—Ell@s: Si pasa en un cuadrado pasa en todos, ya que todos tienen el mismo formato: son semejantes.

—Profesor: ¿Y pasa en todos los infinitos cuadrados que puedan existir, por pequeños y grandes que sean?

—Ell@s: Estamos seguros de que en estos sí que pasa.

La cuestión planteaba ciertas dudas. El hecho de compartir formato y relacionarlo con la semejanza de figuras fue esgrimido porque en las sesiones anteriores se había trabajado la semejanza precisamente a partir de los formatos rectangulares (pantallas, monitores y dispositivos electrónicos). Pero esto no acababa de convencer a todos. Como a nadie se le ocurrió una argumentación definitiva, la dejamos estar para retomarla más adelante. Entonces alguien propuso resolver la cuestión de forma tácita con el compás, sin medir ninguno de los dos segmentos:

—Ell@s: Si ponemos el lado encima de la diagonal con un compás, el lado no llega al extremo de la diagonal.

Invité al autor de la propuesta a que la explicase en la pizarra. Lo que hizo fue dibujar una serie de viñetas a modo de cómic en las que ilustraba el proceso para transportar el lado sobre la diagonal del cuadrado. Ese alumno utilizó el borrador como herramienta de dibujo para trazar el cuadrado: el lado de este sería la longitud de aquel y la perpendicularidad de sus lados la obtuvo de la perpendicularidad de las esquinas del borrador (figura 4).

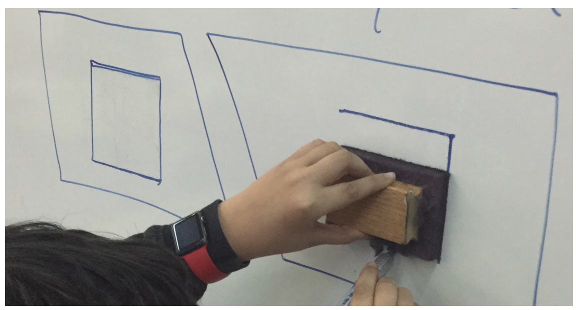

Figura 4. Uso de la longitud y el ángulo recto del borrador para construir un cuadrado

Este cómic matemático tuvo mucho éxito y pese a que muchos disponían de compás y llevaron a cabo la práctica descrita en esas cinco viñetas (figura 5) decidieron incorporar las viñetas a sus apuntes (figura 6). De esta forma registraban un proceso de construcción por etapas sucesivas en las que predominaba la imagen.

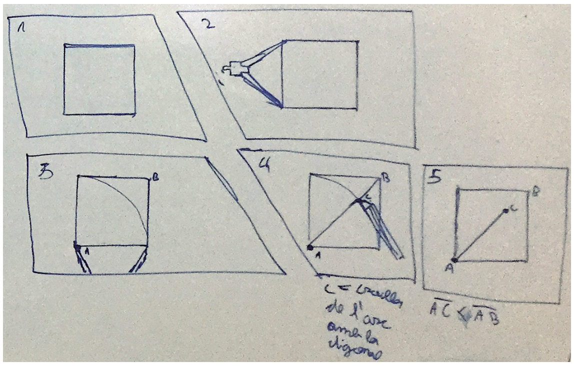

Figura 5. Cómic original en el que se traslada la diagonal sobre el lado de un cuadrado

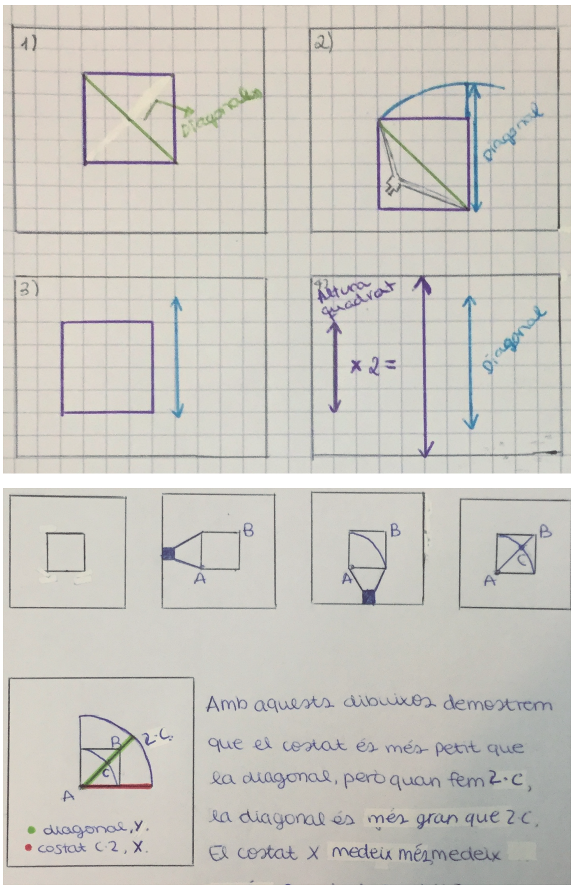

Figura 6. Dos versiones distintas del mismo cómic

De nuevo se confirmaba, aunque de modo distinto, que $L < D < 2 \cdot L$. Retomamos entonces la cuestión de la universalidad de la conclusión:

—Profesor: Lo que ha hecho vuestro compañero, ¿vale para este cuadrado que ha construido o vale para todos?

—Ell@s: Para todos. Aunque fuese mayor, se podría hacer igual.

–Ell@s: O si fuese más pequeño.

Profesor: Y si el cuadrado tuviese 1 km de lado, ¿también valdría?

—Ell@s: Este no puede dibujarse, no cabe en la pizarra.

—Ell@s: Pero todo sería igual, el tamaño no importa.

—Profesor: ¿Cuánto miden el lado y la diagonal de los cuadrados de vuestras cuadrículas?

—Ell@s: 5 mm y 7 mm.

—Profesor: La conclusión de que la diagonal es mayor que el lado al medirlos, ¿para qué cuadrado vale?

—Ell@s: Para el de la cuadrícula.

—Profesor: Lo que se ha hecho en la pizarra, ¿para qué cuadrado vale?

—Ell@s: Para el de la pizarra.

—Profesor: ¿Y qué medidas se han tomado en el cuadrado de la pizarra?

—Ell@s: Ninguna.

—Profesor: Entonces, ¿con qué medida podemos imaginar el cuadrado?

—Ell@s: Con cualquiera, también el de 1 Km.

—Profesor: Luego…

—Ell@s: … vale para todos los cuadrados.

—Profesor: ¿Por qué?

—Ell@s: Porque vale para todas las medidas.

La diagonal es mayor, ¿pero cuánto?

La cuestión ahora era averiguar qué relación existía entre la diagonal y el lado. Si estaba entre uno y dos, era 1,… Pero, ¿cuál era esa parte decimal? ¿Era 1,2, 1,5, o 1,8? La percepción visual permitía aventurar que sería un poco inferior a 1,5. Les propuse que dibujasen un cuadrado en un folio en blanco, trazasen su diagonal y midieran ambos segmentos. Los cuadrados que se construyeron fueron diversos, algunos se reducían a la celda de la cuadrícula del cuaderno; otros (figura 7), construyeron el mayor cuadrado posible en una hoja DIN A4.

Una vez terminada la tarea, se recogieron los resultados correspondientes a cuadrados distintos en una hoja de cálculo proyectada en la pizarra (figura 8). Alguien observó que la moda de la distribución era 1,4 (utilizó el término «moda» porque había sido introducido el curso anterior). Sin embargo, había en esa tabla de datos un detalle que les llamó la atención:

—Ell@s: Aquí hay algo que falla.

—Profesor: ¿El qué?

—Ell@s: Hay un cuadrado de lado 4 cm con diagonal de 5,5 cm y otro igual con diagonal de 5,3 cm. No puede ser.

—Ell@s: Uno de los dos está mal.

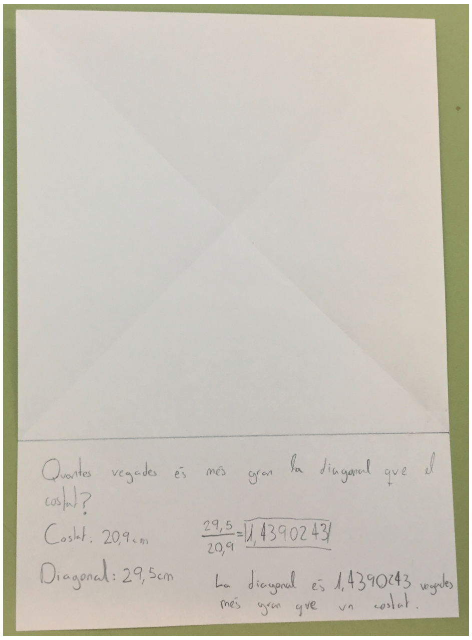

Figura 7. Relación entre la diagonal y el lado del cuadrado

—Profesor: Pero no podemos saber cuál de los dos es el erróneo, habrá que volver a medir y calcular.

—Ell@s: El que está mal es el de diagonal 5,3 cm.

—Profesor: ¿Porque tu lo digas?

—Ell@s: No, porque el resultado de este está más lejos de la moda que el del otro.

Esa respuesta extraordinaria basada en un argumento estadístico impresionó al resto de la clase. Y a mí, más todavía:

—Profesor: ¡Excelente!, esta es una muy buena justificación basada en la estadística que hemos realizado.

Sobre la proyección de dicha hoja de cálculo se escribieron las conclusiones obtenidas (figura 8). La relación apuntaba hacia un número inferior a 1,5; aproximadamente 1,4.

Relación exacta entre la diagonal y el lado de un cuadrado

El siguiente paso sería averiguar cuál era el valor exacto de dicha relación, un auténtico problema matemático que la experimentación no podía resolver. Por eso les invité a que construyesen cuatro triángulos rectángulos isósceles iguales, que los recortasen y tratasen de componer con ellos un nuevo cuadrado. La tarea se ejecutó según tres métodos de construcción: 17 personas dibujaron, uno a uno, los cuatro

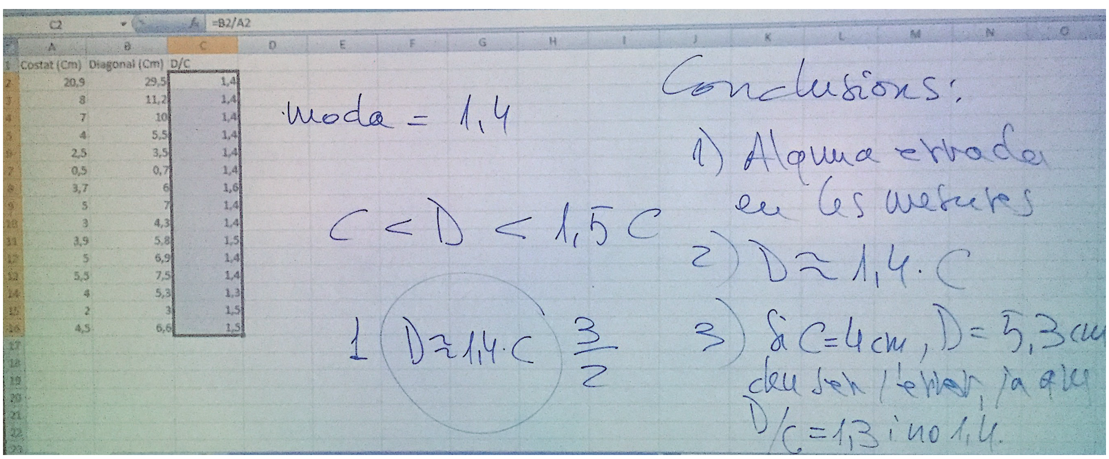

Figura 8. Relación entre la diagonal y el lado

triángulos, 6 los obtuvieron dividiendo dos cuadrados por sus diagonales, y solo una los obtuvo trazando las dos diagonales de un único cuadrado (figura 9).

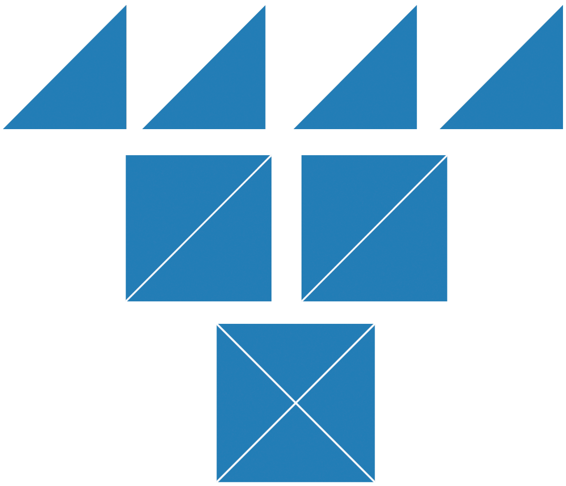

Figura 9. Tres modos de obtener cuatro triángulos rectángulos isósceles e iguales

A todo el mundo le quedó claro que con los cuatro triángulos rectángulos isósceles iguales de lados a, a y b, podían componerse un cuadrado de lado b y dos cuadrados de lado a (figura 10).

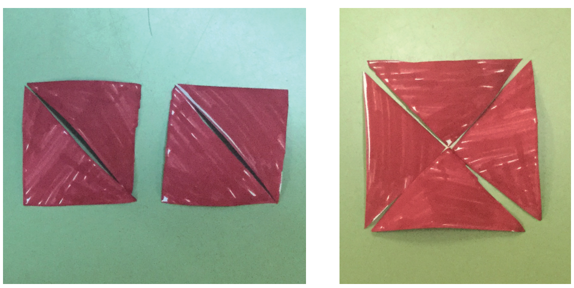

Figura 10. Cuadrados hechos con dos y con cuatro triángulos rectángulos isósceles iguales

Ahora tocaba sacar conclusiones de este fenómeno más allá del aspecto de la composición. Era evidente que dos cuadrados y un cuadrado son cosas distintas. Pero hubo una intervención que nos acercó a lo que yo esperaba:

—Ell@s: El cuadrado solo es mayor que los otros.

—Ell@s: ¿Qué quieres decir?

—Ell@s: Que el que tiene cuatro triángulos es más grande que los otros que tienen dos.

—Profesor: ¿Y lo es porque está hecho con cuatro y no con dos?

—Ell@os: No, porque es mayor.

—Profesor: ¿Mayor en qué?

—Ell@s: El lado es más grande.

—Ell@s: ¡Pero el papel es el mismo!

—Profesor: Exacto. ¿Qué significa que el papel es el mismo?

—Ell@s: Que lo pintado es igual, no puede ser más grande.

—Ell@s: Pero si el lado es más grande, el cuadrado es más grande.

—Profesor: ¿Qué se necesita para componer el cuadrado grande?

—Ell@s: Cuatro triángulos.

—Profesor: ¿Y para componer los dos pequeños?

—Ell@s: Cuatro triángulos.

—Profesor: ¿En qué son iguales entonces?

—Ell@s: En la pintura.

—Profesor: Geométricamente, ¿cómo se llama eso?

—Ell@s: Ah, te refieres al área.

—Profesor: Eso es. El área es la misma.

A continuación escribimos simbólicamente esta relación de igualdad entre las áreas de los dos cuadrados y el cuadrado grande:

$$b^2 = a^2 + a^2$$

Esta igualdad simbólica no expresa otra cosa que la que se había dicho con palabras del lenguaje corriente: que el área del cuadrado construido sobre el lado desigual del triángulo tiene área doble que el cuadrado construido sobre el lado pequeño (figura 11). A este resultado le llamamos la versión *chill out* del teorema de Pitágoras.

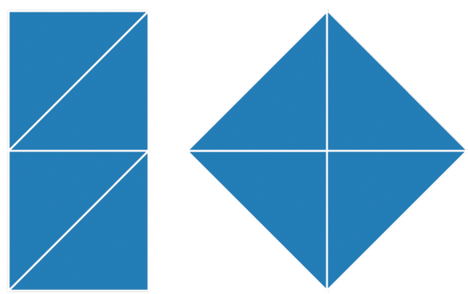

Figura 11. Versión *Chill out* del teorema de Pitágoras

Así que la búsqueda de la relación entre la diagonal y el lado de un cuadrado nos había conducido a la versión más sencilla del teorema de Pitágoras:

$$b^2 = 2 \cdot a^2$$

Volvimos entonces a la celda cuadrada de las cuadrículas de sus cuadernos, de lado 5 mm. Conociendo a=5 mm, calculamos (muy despacio, pues no tenían conocimientos de álgebra) el valor de b. Comenzamos introduciendo el dato en la expresión simbólica:

$$b^2 = 2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$$

Y si un número al cuadrado es 50, el original es su raíz cuadrada. Con eso no hubo problemas. La calculadora hizo el resto:

$$b = \sqrt{50} = 7{,}071067811865475$$

¿Y qué relación obtenemos entre la diagonal b y el lado a de cada uno de los cuadrados pequeños?

$$\frac{D}{L} = \frac{7{,}071067811865475}{5} = 1{,}414213562373095$$

Tomando un cuadrado de lado unidad vimos que, en el fondo, esta relación es de:

$$b^2 = 2 \cdot 1^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

Podría haber insistido más en la expresión algebraica y formal, pero eso lo dejaríamos para más adelante, al retomar la cuestión como excusa para introducir el álgebra. Sería entonces cuando llegaríamos a la conclusión y expresión definitiva de dicha relación:

$$\frac{D}{L} = \sqrt{2}$$

Relación entre la diagonal y los lados de un rectángulo

A continuación propuse realizar la misma actividad, pero sin la restricción de que los triángulos rectángulos fuesen isósceles: componer un cuadrado con cuatro triángulos rectángulos iguales.

Para ello algunos adaptaron a dos rectángulos la solución más económica que un estudiante había aplicado a dos cuadrados: cortarlos por su diagonal. Sin embargo, no conseguían componer un cuadrado con los cuatro triángulos rectángulos. Una primera aproximación a la solución les dio la idea de que podían aparecer agujeros cuadrados en la figura resultante, pero el perímetro exterior de su figura no era lo suficientemente regular (figura 12). El contorno no era ni cuadrado ni rectangular.

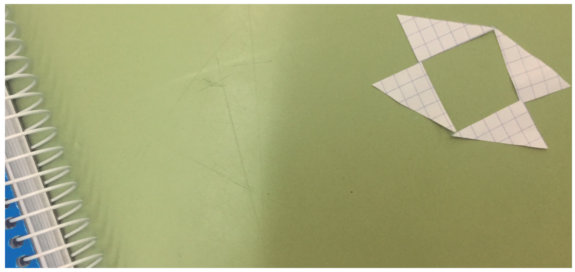

Figura 12. Un primer cuadrado compuesto con cuatro triángulos rectángulos iguales

Les invité a modificar su diseño para hacer el contorno más regular, pero persistían en conectar los triángulos por los vértices rectangulares. Miraba adentro y no afuera. De haberlo hecho, probablemente habría visto dónde estaba la clave: que las hipotenusas debían formar un cuadrado, estuviese este dentro o fuera. No les salió y les di la solución mostrada en la figura 13.

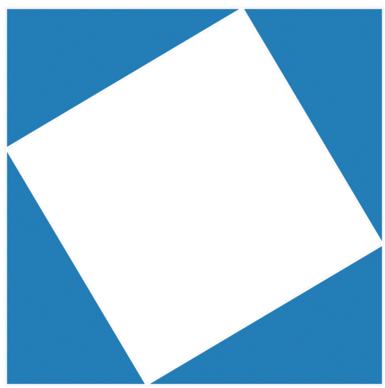

Figura 13. Cuadrado con triángulos rectángulos iguales

Entretanto, alguien exclamó: ¡lo tengo, lo tengo! (figura 14).

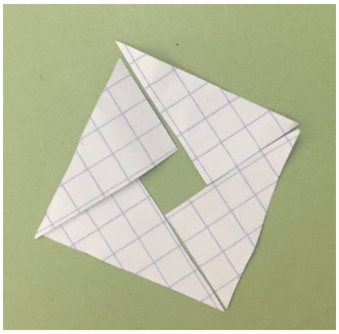

Figura 14. Cuadrado con agujero cuadrado compuesto con cuatro triángulos rectángulos iguales

Y entonces se desarrollaron dos diálogos. En el primero se razonó por qué la figura resultante y su agujero eran cuadrados. En el segundo se relacionaron las áreas del cuadrado compuesto con las del agujero y los triángulos. La figura 15 muestra el modo en que dos de ell@s registraron esos razonamientos.

El registro escrito de las argumentaciones se ha convertido en una actividad de clase a la que se le da el tiempo requerido. En clase de matemáticas el alumnado debe disponer de tiempo para recopilar, ordenar y organizar aquello que oralmente y de un modo espontáneo puede expresarse con términos poco rigurosos. Las dos imágenes de la figura 15 constituyen excelentes mejoras de lo que quedó escrito en la pizarra. Ambas, como todas las demás, se hicieron en caliente y en el aula, justo al término de los razonamientos dialogados. Evidentemente, la capacidad comunicativa de esos registros forma parte de la evaluación. Ell@s lo saben y por eso se esmeran en que su registro comunique matemáticas.

El segundo diálogo consistía en utilizar la cuestión ya resuelta para el caso de los triángulos rectángulos isósceles buscando una expresión del área del cuadrado como la suma de las áreas de los cuatro triángulos más la del agujero cuadrado. Ell@s no eran conscientes de que estábamos aplicando la metodología de George Polya para resolver problemas adaptando la resolución de un problema conocido para resolver otro más difícil. La diferencia estaba en que el cuadrado anterior no tenía agujero; el de ahora, sí. Y ese agujero aparecía precisamente cuando los triángulos dejaban de ser isósceles. Siendo c el lado mayor de los triángulos y a y b los otros dos:

$$\text{Área cuadrado} = \text{Áreas triángulos} + \text{Área agujero}$$

$$c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + \left(b - a\right)^2$$

No hubo problemas para pasar de esta última igualdad a la siguiente:

$$c^2 = 2 \cdot a \cdot b + \left(b - a\right)^2$$

El problema lo teníamos ahora: ¿cómo calcular el cuadrado de $(b–a)$? Pese a que conocían

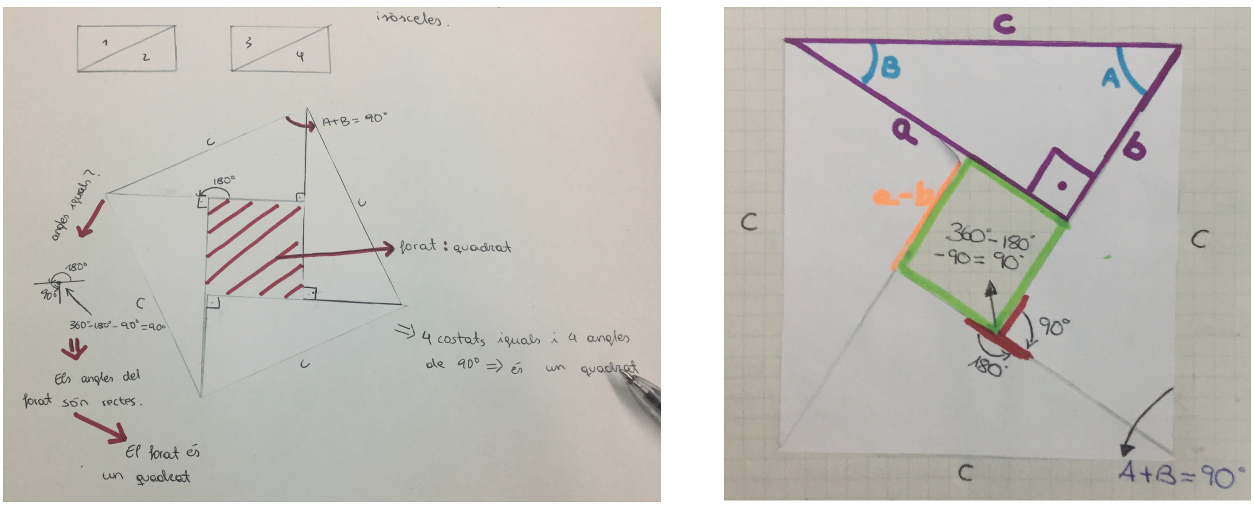

Figura 15. Dos registros de por qué la figura compuesta y su agujero son cuadradas

todos que la potencia 2 significa multiplicar un número por sí mismo, necesitaron ayuda para relacionar esta expresión simbólica con este hecho. Por fin, se comprendió que:

$$(b-a)^2 = (b-a)\cdot(b-a)$$

Pero ahora, ¿cómo calcular ese producto de dos paréntesis? Necesitábamos álgebra para hacerlo. Así que esta versión definitiva del teorema de Pitágoras a la que habíamos despojado ya de su aspecto *chill out* se quedó a la espera de desarrollar un modo de comprender el resultado del producto de *(b–a)* por sí mismo, lo que permitiría afirmar que el área del cuadrado construido con la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos con los catetos[2]:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Aparecía aquí otra dificultad. En el producto de *(b–a)* por *(b–a)* hay que efectuar el producto de *–a* por *–a*. Habría que justificar que menos por menos da más:

$$-2\cdot(-3) = +6$$

Como profesor me encontraba en una triple encrucijada. En primer lugar, había llevado a mis alumnos a una situación en la que, si bien era cierto que quedaba claro que necesitaba el álgebra, veía complicado salir del apuro. Habíamos topado con las operaciones simbólicas en las que letras representan números y a las cuales aplicábamos las reglas operativas propias de los números. En segundo lugar, el teorema de Pitágoras había perdido peso e incluso había sido despojado de su carácter eminentemente geométrico para convertirse en algebraico. Diría incluso que el teorema en sí había desaparecido ya. Cierto es que las aplicaciones del teorema son siempre algebraicas, pues se utiliza para calcular longitudes de hipotenusas (y no medirlas). Pero el teorema es esencialmente geométrico. Y en tercer lugar, si el teorema figura en el currículo de matemáticas es porque tradicionalmente siempre ha figurado en cualquier currículo, siempre ha estado ahí, y este currículo es heredero de los precedentes. No digo que haya que sacarlo, nada más lejos de mi intención. Digo que estoy faltando a la verdad intrínseca de ese teorema cuando lo convierto en una cuestión puramente algebraica. Como matemático y como profesor siento como si le faltase al respeto. Sin embargo, el teorema de Pitágoras se usa para calcular, no para comprender, y es en el cálculo donde se desarrolla todo el potencial de sus aplicaciones. Se calcula con él en trigonometría, en espacios vectoriales, en la diferenciación, en variable compleja, en cinemática, en dinámica de fuerzas…

Entonces pensé que tal vez había dado con el quid de la cuestión. Los griegos demostraron el teorema geométricamente y así lo pensaban, pero no fue hasta que el álgebra se asoció con la geometría euclidiana en la trigonometría que la aplicabilidad del teorema impulsó las matemáticas. He ahí la paradoja: un teorema geométrico cuyo valor se mide por sus aplicaciones algebraicas.

En la duda me vinieron a la mente los *Elementos* de Euclides. La demostración que allí se da del teorema (Libro I, proposición 47) jamás se trabaja en secundaria y apenas en la universidad, como no sea en aspectos concretos de historia de las matemáticas. Quien haya leído los *Elementos* tal vez opine que se trata de una demostración compleja, sobre todo si se compara con las sencillas demostraciones tipo puzle como la que se ha ilustrado aquí. Pero debemos tener en cuenta dos cosas. La primera, que la demostración euclidiana no es algebraica, sino puramente geométrica y que, al menos en este sentido, respeta el enunciado del teorema (que el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo rectángulo). La segunda, que dicha demostración es coherente con todo el sistema axiomático deductivo presentado en los *Elementos*. La demostración euclidiana, a diferencia de las demostraciones tipo puzle, no busca alcanzar un fin a cualquier precio, sino que procura ser coherente con las definiciones, postulados, nociones comunes y preposiciones previos. La demostración euclidiana no solo no es algebraica, sino que no puede serlo.

Esto debería hacernos reflexionar sobre cuál es el modelo axiomático que damos por válido en nuestras clases y de qué modo es validado. En cuestiones de geometría a veces parece que no solo el alumnado, también nosotros los profesores no sabemos a qué atenernos, qué podemos dar por sentado y qué no. De ahí que las ideas brillantes se antojen a menudo inalcanzables para ell@s. Esta es una dificultad del pensamiento geométrico en general, pues no disponemos de un modelo claro, un punto de partida por el que sepamos con qué herramientas contamos, es decir, en qué definiciones, postulados y nociones comunes podemos basar las preposiciones de geometría. Todo ello conlleva dificultades didácticas y de aprendizaje.

Creer no es aprender

Quedaban pendientes los problemas de cálculo algebraico: la propiedad distributiva y que menos por menos es más. Para la propiedad distributiva del producto con relación a la suma opté por enfocar la cuestión experimentalmente (en un sentido matemático de la expresión). Primero se trabajó con números concretos. Luego se realizaron conjeturas. Y, por último, se expresó la propiedad como generalización de forma algebraica: con letras representando números. Ell@s ya conocían que en una operación combinada hay que calcular antes los paréntesis. Pero lo sabían porque se lo habían dicho en Primaria. Con números es posible calcular primero un paréntesis en una operación combinada:

$$3\cdot(4+5)=3\cdot 9=27$$

Con letras, no:

$$3\cdot(a+b)=¿\ldots?$$

Ahora se trataba de hacer una operación combinada sin efectuar primero el paréntesis:

$$3\cdot(4+5)=3\cdot 4+3\cdot 5=12+15=27$$

Para ello se hicieron una serie de cálculos con diversos números para evidenciar la conjetura: si a, b y c son tres números cualesquiera (los números que en ese momento se tenían en mente eran positivos), entonces se cumplen dos propiedades:

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

$$a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c)$$

Por iniciativa mía, a la primera la llamamos propiedad distributiva; y a la segunda, extracción del factor común.

También trabajamos la cuestión desde una perspectiva histórica y geométrica (figura 16), dado que el teorema que nos había llevado hasta ahí lo era. Mi intención era que al ver una equivalencia de áreas comprendiesen mejor unas propiedades que habían sido validadas por un gran número de casos de cálculo. La perspectiva geométrica, interpretando un producto de dos números como el área de un rectángulo, sería más universal. Además, la percepción visual había jugado un papel determinante en toda la historia. No olvidemos que no veían que la diagonal de un cuadrado era mayor que su lado. El fondo de la cuestión había nacido de ver para comprender.

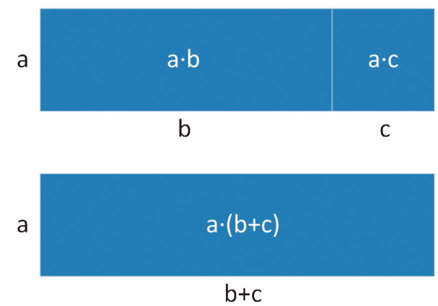

Figura 16. Origen geométrico de la extracción del factor común y de la propiedad distributiva

La justificación de que menos por menos da más la realicé aplicando la propiedad distributiva a una situación concreta con ceros y unos. Se trata de una propuesta similar a la de Courant y Robbins (1996) y que a ell@s les resultó excesivamente abstracta. Ya había utilizado en clase diversos argumentos populares para comprender que menos por menos tiene que ser más (ascensos y descensos por tramos de escaleras). Pero dichos argumentos me parecían destinados a favorecer una creencia y yo buscaba la comprensión. Sin embargo, la comprensión resultó difícil a todas luces, pues como ya se vio en el primer artículo de esta sección hay relaciones que incluso los matemáticos debemos aceptar por ser hijas de nuestra propia lógica. Les costó menos trabajo creerse la propiedad que comprenderla a partir de la aplicación de la propiedad distributiva a los números 0 y 1 que Courant y Robbins y yo mismo les habíamos propuesto:

$$-1\cdot(1-1)=-1\cdot 1-1\cdot(-1)=-1-1\cdot(-1)$$
$$-1\cdot(1-1)=-1\cdot 0=0$$
$$\Downarrow$$
$$-1-1\cdot(-1)=0$$
$$\Downarrow$$
$$-1\cdot(-1)=+1$$

Los actos de fe no cuestan demasiado. Tras un primer período de incomodidad lo creído acaba por adherirse a nuestra conciencia pasando a formar parte de nuestro «yo». Una vez efectuado el acto de fe, resulta muy difícil cuestionarlo y reformularlo desde una mirada crítica y reflexiva. En matemáticas, deberíamos rechazar los actos de fe en la medida en que nos sea posible. De lo contrario, estaremos incumpliendo el currículo, pues no estaremos educando a ciudadanos críticos, pues estaremos bloqueando su aprendizaje.

Creer no es aprender. Aprender no es obedecer. Aprender significa ir rechazando esos actos de fe que muy posiblemente hemos llevado a cabo cuando éramos pequeños y que a lo largo de la vida deberíamos revisar. Los actos de fe que uno pueda hacer en primero o segundo de la ESO deberían ser puestos en entredicho en tercero o cuarto y descartados en bachillerato.

Esto plantea una crítica sobre los proceso de asimilación y acomodo defendidos por Piaget (1970), pues lo crucial de ambos procesos es el modo en que se produce esa asimilación y su posterior acomodo. Solo un aprendizaje constructivista y social crítico con dichos acomodo y asimilación impide la asimilación y el acomodo por acto de fe.

Regreso a los inicios

La sorpresa de que muchos estudiantes pensaran que la diagonal y el lado de un cuadrado tenían la misma longitud surgió buscando el perímetro de polígonos cuyos vértices se sitúan en las encrucijadas de una cuadrícula. Gracias al teorema de Pitágoras estos perímetros pueden calcularse de forma precisa sin grandes dificultades (figura 17). Basta para ello averiguar qué triángulo rectángulo tiene por hipotenusa el segmento del que queremos conocer su longitud y aplicar el teorema a dicho triángulo.

El teorema de Pitágoras

Excluyendo al teorema de Tales, no hay teorema matemático más conocido y aplicado que el de Pitágoras. Se trabaja en toda la educación secundaria de todo el mundo. Si en un futuro se descubre una civilización y queremos darnos a conocer, en lugar de presentarnos con banderas e himnos muy bien podríamos hacerlo con los teoremas de Tales y de Pitágoras.

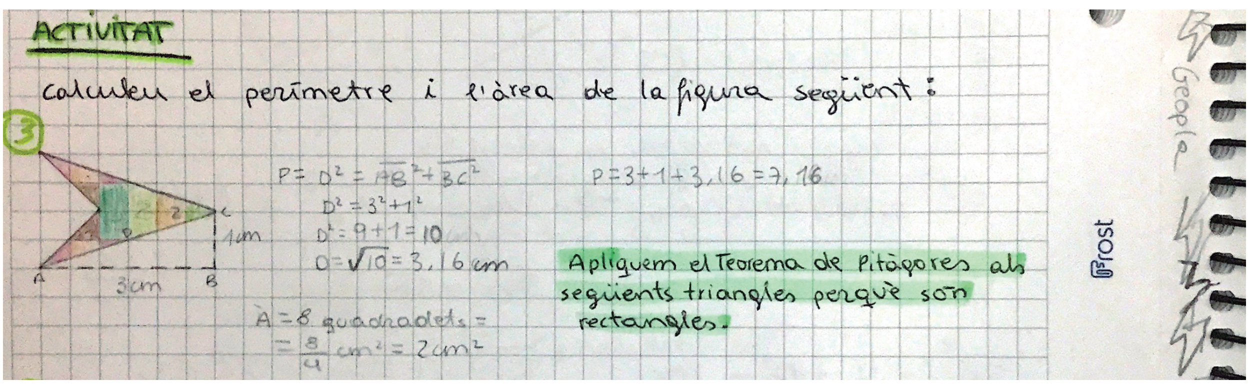

Figura 17. Aplicaciones del teorema de Pitágoras

Si un profesional de la educación matemática considera que el currículo determina su labor, tratará el teorema sin discusión alguna. Pero si su perspectiva es la de interpretar el currículo como una orientación, quizá se pregunte por qué haya que tratar el teorema más famoso de las matemáticas y, en caso de hacerlo, cómo enfocarlo didácticamente.

A lo largo de mi vida profesional he tratado el teorema en clase muchas veces y jamás he puesto en duda su relevancia. El teorema ya me parecía importante antes de ser profesor, no tanto por su utilidad práctica en matemáticas y física como por lo que implica matemáticamente: la inconmensurabilidad de la diagonal con relación al lado de un cuadrado. Pero desde una perspectiva constructivista del aprendizaje me preguntaba qué motivo puede tener un adolescente para incorporar el teorema y sus aplicaciones a su bagaje cultural o competencial. Aquí se ha expuesto un motivo fundamental relacionado con la interpretación de la percepción visual y que fue la causa de varias clases no anunciadas.

No pretendo que lo expuesto constituya el modo adecuado de plantear y desarrollar el teorema, pero sí lo fue para las personas que tenía en el aula porque el teorema respondió a sus dificultades de interpretación visual. Con el teorema no solo vemos más, vemos infinitamente más. ¿Vale este enfoque para todo el mundo? Las personas son distintas de un curso a otro, de un centro a otro y de un lugar a otro. También los profesores, aunque de la misma asignatura, somos diferentes, pero es evidente un cierto grado de universalidad en muchos aspectos de los tratados.

La perspectiva educativa clásica es distinta de la perspectiva histórica, pues la demostración más antigua del teorema son las de las proposiciones 47 y 48 de los Elementos de Euclides. Hablo en plural porque la proposición 48 es la recíproca de la 47. Que el recíproco del teorema de Pitágoras muy raramente se trabaje en secundaria no deja de ser un contrasentido, pues el triángulo egipcio de 30 cm, 40 cm y 50 cm se utiliza en el ámbito de la construcción (Albertí, 2009) para levantar del suelo paredes perpendiculares entre sí como las de nuestros hogares. En algún momento de la educación secundaria no estaría mal comprender por qué un triángulo de lados 5 cm, 12 cm y 13 cm es rectángulo. Pero para esto harían falta más clases no anunciadas como las expuestas[3], quizá en 3.º, en 4.º de la ESO o, incluso, más allá.

Referencias bibliográficas

Albertí, M. (2009), *Activitat matemàtica en l'àmbit laboral a l'inici del segle XXI. Implicacions per al currículum de l'ESO*, Informe del trabajo de licencia retribuida otorgada por el Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya.

Courant, R., y H. Robbins (1996), *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Mathematical Ideas and Methods*, Revisión de Ian Stewart, Oxford University Press.

Euclides (1991), *Elementos*, Editorial Gredos, Madrid.

Galilei, G. (1994), *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*, Alianza editorial, Madrid.

Piaget, J. (1970), *The Science of Education and the Psychology of the Child*, Grossman.

Polya, G. (1988), *How to solve it? A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Miquel Albertí Palmer
Institut Vallès (Sabadell)
<alberti.miquel@gmail.com>

1 Utilizaré el término «ell@s» creado por David Barba y Cecilia Calvo en su sección *Ell@s tienen la palabra*, para referirme a las expresiones manifestadas por algún alumno o alumna sin especificar diferencias aun cuando pueda tratarse de personas distintas.

2 Los términos hipotenusa y cateto no fueron utilizados en ese momento, los lados del triángulo rectángulo fueron nominados tiempo después.

3 El proceso descrito llevó cuatro semanas de clase.