

Objetivo matemático. Juegos de espejos

XARO NOMDEDEU MORENO

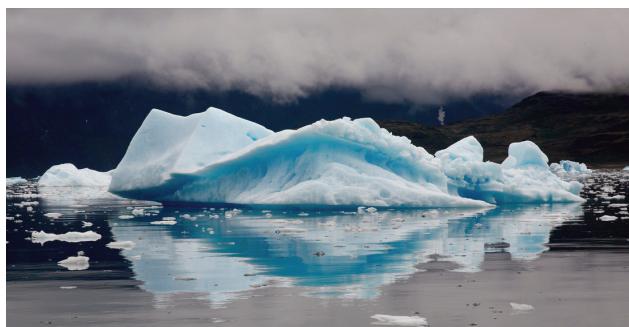


Figura 1. El beso (Pilar Moreno)
*Beso azul
De hielo y agua
De realidad y espejo*

Este artículo reproduce la sección del mismo título del artículo de Xaro Nomdedeu Moreno, «Objetivo matemático» publicado en el monográfico n.º 6 de *Suma, Fotografía matemática* (2017). Una vez publicado el monográfico, se detectaron algunos errores de notación y reproducción en las fórmulas y en los pies de imágenes. Esta es la razón por la que se ha optado por reproducir la sección entera, para disponer en un único texto una versión completa sin tener que alternar la lectura entre *Fotografía matemática* y *Suma* n.º 89.

Con un espejo plano podemos generar el enantiómero virtual complementario de un objeto quiral¹. Tal es el caso del iceberg y su reflejo en el agua ártica, nuestras dos manos, una pluma de pavo real o las dos mitades de una mariposa.



Figura 2. Mariposa nocturna. (Pilar Moreno)
*Rojo pasión,
nocturna mariposa
...y esas antenas...*

Si ajustamos el lado del espejo al eje de simetría de la fotografía y giramos el espejo en torno al eje, ¡veremos volar la mariposa!

¡Un espejo puede devolverle el movimiento, la ilusión de estar viva! La velocidad del aleteo estará en nuestras manos.

La simetría especular, la de la mariposa real, al margen de juegos ópticos, está vinculada íntimamente con la vida. Es bien conocido que las moléculas biológicas más importantes son quirales.

Los seres vivos tienen la capacidad de distinguir los pares de moléculas enantiómeras, cada molécula quiral y su pareja especularmente simétrica, que pueden tener propiedades químicas muy diferentes. Ambos enantiómeros pueden ser detectados por el olfato o el gusto o metabolizadas de diferente manera, una molécula puede ser dulce y la otra amarga o una puede tener propiedades curativas y la otra ser tan nociva como la *talidomida* o incluso letal.

Estas son algunas de las maravillas ligadas a un espejo plano.

Con dos espejos podemos construir un libro que, según su ángulo de apertura, puede reproducir no una sino varias imágenes del objeto original. Podemos reproducir, a partir de un segmento, infinidad de polígonos.

Una apertura de 72° regenera la flor completa a partir de una sola hoja de una flor pentámera.

112
sumo⁺
89

Figura 3. Flor pentámera

Si los dos espejos son paralelos, veremos reproducirse la imagen *ad infinitum*.

Con tres espejos planos o cuatro formando un prisma, podemos construir caleidoscopios o teleidoscopios que generan tapices.

Si se disponen formando pirámides, 3, 4 o 5 espejos pueden generar poliedros regulares, incluso poliedros estrellados.



Figura 4. Imagen generada por un teleidoscopio

Los planos de simetría del tetraedro quedan en evidencia al sumergir el esqueleto de un tetraedro en agua jabonosa. Se visualizan así las pirámides centrales del tetraedro. Sustituir mentalmente esos planos jabonosos por espejos, permite comprender por qué si forramos de espejo el interior de las caras laterales de una pirámide central, se reproduce virtualmente otro tetraedro.



Figura 5. Planos de simetría del tetraedro regular, generados por película de jabón



Figura 6. Sustitución de planos de simetría jabonosos por papel de espejo

Lo mismo podemos decir del resto de poliedros regulares y sus pirámides centrales, en todos los casos podemos convertirlas en caleidoscopios generadores del poliedro de origen.



Figura 7. Poliedros platónicos en los reflejos de los correspondientes caleidoscopios

Sabido es que el tetraedro es dual de sí mismo, esto es: se puede inscribir un tetraedro en otro de modo que cada vértice de uno ocupe el centro de una cara del otro, lo cual implica que el número de sus caras es igual al número de sus vértices.

En las demás parejas duales, además el número de aristas es igual para cada miembro de la pareja, dado que una arista puede considerarse el segmento que une dos vértices o el segmento intersección de dos caras.

Los poliedros duales cumplen una curiosa propiedad: la cara de la pirámide central de uno es suplemento del diedro del otro. La forma de demostrar esta propiedad para el tetraedro es una sencilla construcción de geometría elemental.

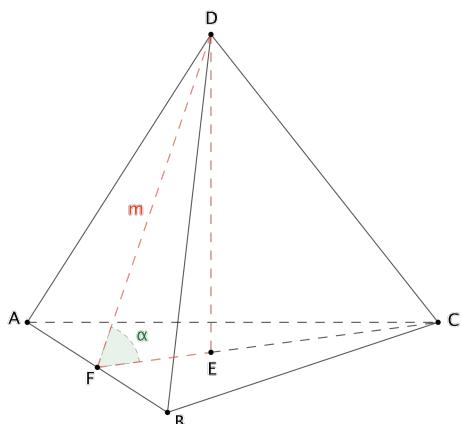


Figura 8. Ángulo diedro del tetraedro

En el tetraedro ABCD (figura 8), FC es la mediana de la cara ACB y E es su baricentro, por lo que EC mide $2/3$ de FC, y este segmento mide lo mismo que FD = m .

Por otra parte, FE mide $1/3$ de FC. Pero DFE es un triángulo rectángulo en E, luego:

$$\cos\alpha = \frac{m/3}{m} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 70^\circ 32'$$

Ahora podemos descomponer el tetraedro ABCD en cuatro pirámides triangulares e iguales a BCDO (figura 9), como las de la figura 5. De ello se desprende que dado que tienen la misma base y $1/4$ del volumen, la altura de cada pirámide será $1/4$ de la altura DE del tetraedro. Su arista lateral medirá los $3/4$ restantes de la altura del tetraedro.

$$OE = \frac{1}{4} \cdot DE \quad \text{y} \quad OD = \frac{3}{4} \cdot DE$$

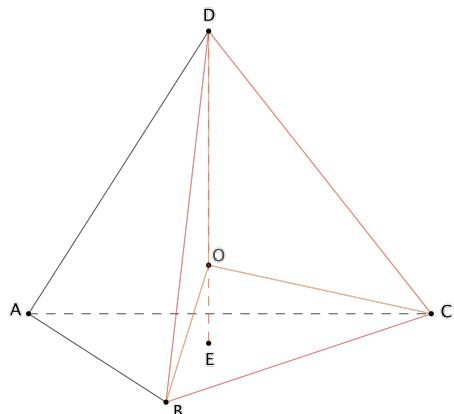


Figura 9. Relación entre la arista de la pirámide central y la altura del tetraedro

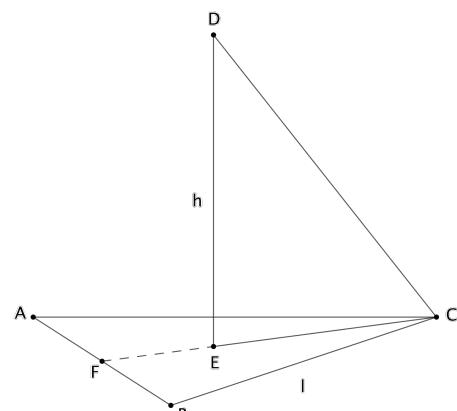


Figura 10. Altura del tetraedro

Dado un tetraedro de arista uno (figura 10), su altura puede obtenerse de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} l = 1 &\Rightarrow FB = \frac{1}{2} \\ m = FC &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ EC = \frac{2}{3} \cdot m &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

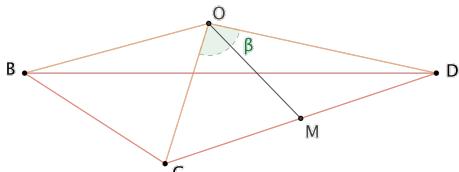


Figura 11. Pirámide central del tetraedro

El ángulo β en el vértice O de esta pirámide triangular (figura 11) es

114
suma + 89

$$\begin{aligned} CD = 1 &\Rightarrow CM = \frac{1}{2} \\ OC = \frac{3}{4} \cdot b &\Rightarrow OC = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \operatorname{sen} \beta = \frac{1/2}{\sqrt{6}/4} &= \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \beta = 109^\circ 28' \end{aligned}$$

Entonces el diedro del tetraedro y la cara de su pirámide-caleidoscopio son suplementarios pues:

$$\alpha + \beta = 70^\circ 32' + 109^\circ 28' = 180^\circ$$

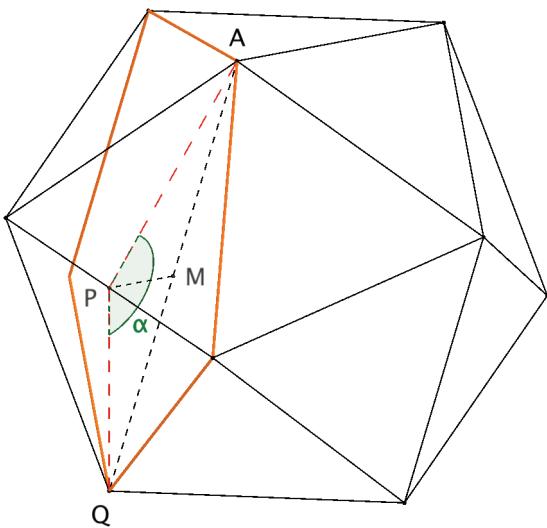


Figura 12. Ángulo diedro del icosaedro

Para el cubo y el octaedro esta propiedad es evidente. Menos sencilla es la demostración en el caso del dodecaedro y el icosaedro que pasamos a probar a continuación.

Si la arista del icosaedro (figura 12) mide 1, entonces:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}Q &= \phi; \quad AP = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\phi/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\phi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 138^\circ 11' \end{aligned}$$

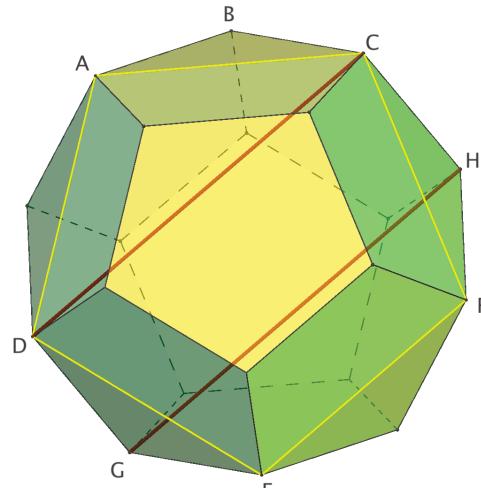


Figura 13

Como podemos ver en la figura 13:

$$\begin{aligned} \frac{DC}{AC} &= \frac{AC}{AB} = \phi \\ DC &= \phi \cdot AC = \phi \cdot \phi \cdot AB = \phi^2 \cdot AB \\ \text{si } AB = 1 \Rightarrow DC &= \phi^2 \end{aligned}$$

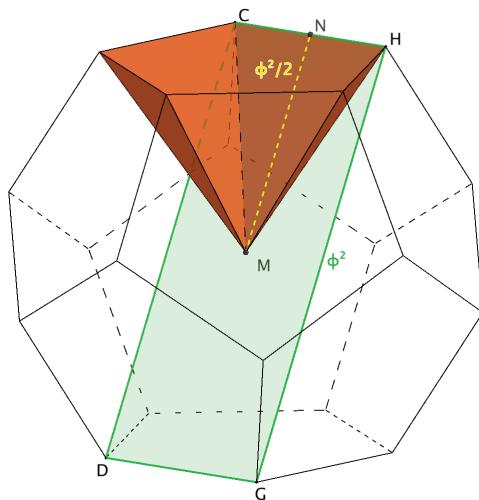


Figura 14

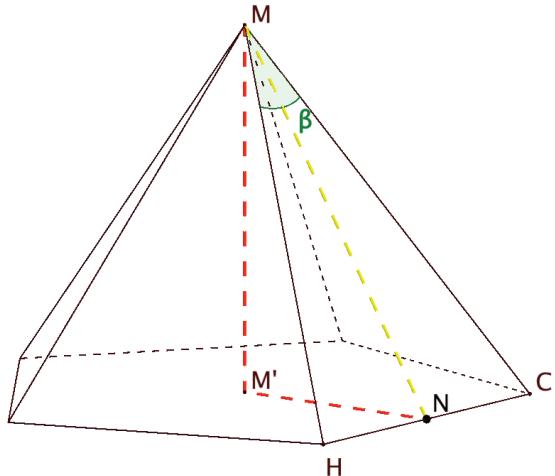


Figura 15. Cara del caleidoscopio dodecaédrico

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1/2}{\phi^2/2} = \frac{1}{\phi^2} \Rightarrow \beta = 41^\circ 49'$$

Y por lo tanto:

$$\alpha + \beta = 138^\circ 11' + 41^\circ 49' = 180^\circ$$



Figura 16. Pirámide central del dodecaedro



Figura 17. Desarrollo de las pirámides centrales del dodecaedro

Si plegamos el desarrollo hacia adentro, obtenemos el dodecaedro regular, si lo hacemos hacia afuera, el dodecaedro estrellado, que también podemos obtener colocando una pirámide central del poliedro regular en el fondo del caleidoscopio dodecaédrico:

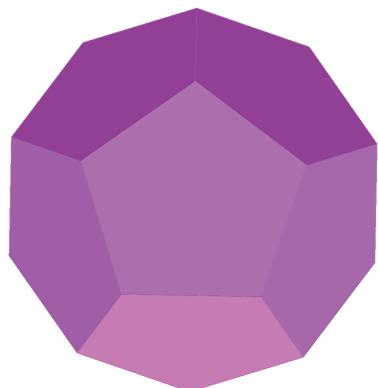


Figura 18. Dodecaedro regular

Figura 19. Dodecaedro estrellado²

Una vez visto el desarrollo hacia dentro y hacia fuera de las pirámides centrales del dodecaedro para formar el dodecaedro regular y el dodecaedro estrellado, pasamos a calcular el valor del diedro del dodecaedro, que deberá sumar 180° con la cara del caleidoscopio icosaédrico, dada la dualidad de estos dos poliedros regulares.

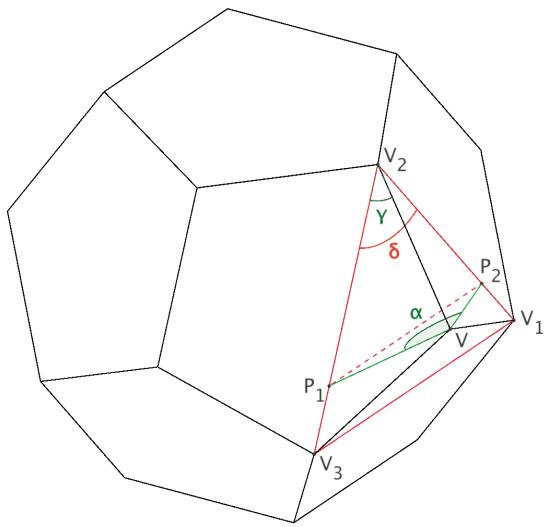


Figura 20. Ángulo diedro del dodecaedro

En el triángulo isósceles VV_2V_3 :

$$r = 90^\circ; \quad \gamma = 36^\circ; \quad l = 1$$

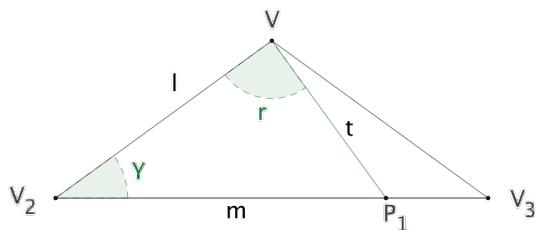


Figura 21

$$\tan \gamma = \frac{t}{l} = t = \tan 36^\circ = 0,726542528$$

$$\cos \gamma = \frac{l}{m} = \frac{1}{m}$$

$$m = \frac{1}{\cos \gamma} = \frac{1}{\cos 36^\circ} = 1,236067977$$

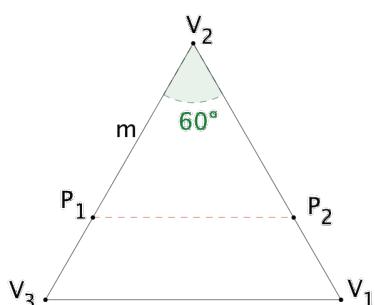


Figura 22

Como el triángulo $V_1V_2V_3$ es equilátero:

$$P_1P_2 = m = 1,236067977$$

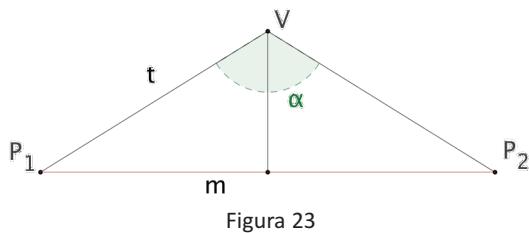


Figura 23

En el triángulo isósceles VP_1P_2 :

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{m/2}{t} = \frac{0,618033989}{0,726542528} = 0,8506508084$$

$$\alpha = 116^\circ 34'$$

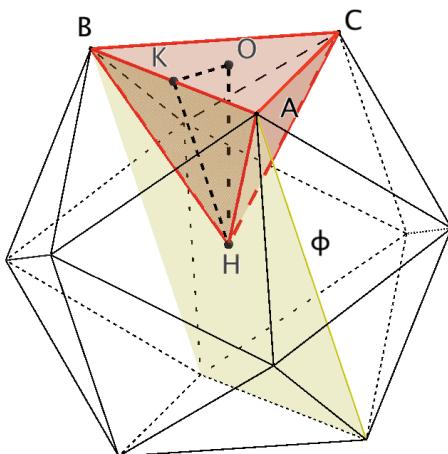


Figura 24

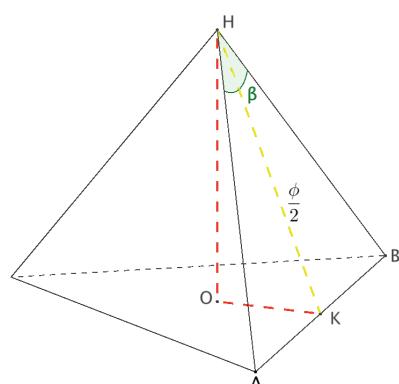


Figura 25. Cara del caleidoscopio icosaédrico

En el triángulo AHB:

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1/2}{\phi/2} \Rightarrow \beta = 63^\circ 26'$$

También en el caso del dodecaedro se cumple:

$$\alpha + \beta = 116^\circ 34' + 63^\circ 26' = 180^\circ$$

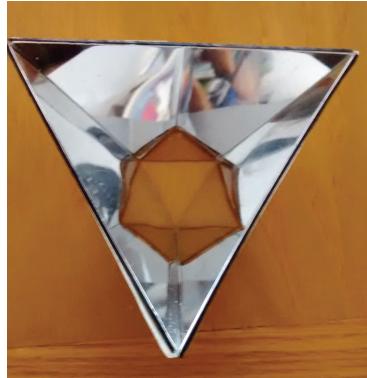


Figura 26. Icosaedro regular generado por el caleidoscopio icosaédrico

Simetrías especulares en el espacio que, a veces, se transforman en simetrías planas sobre el papel o la pantalla. Son afinidades del tipo:

$$\begin{cases} x' = m \cdot x \\ y' = n \cdot y \end{cases}$$

Cuya ecuación matricial tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

La simetría cumple: $m = -n = 1$. Así pues, su ecuación matricial es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El iceberg, la mariposa y la pluma de pavo real se proyectan en el plano de la pantalla o del papel fotográfico, dando lugar a la transformación de una simetría especular en otra axial.

Los caleidoscopios poliedrivos transforman un polígono plano en un políedro virtual tridimensional.

Pero los juegos ópticos no terminan aquí. El plano no tiene la exclusiva.

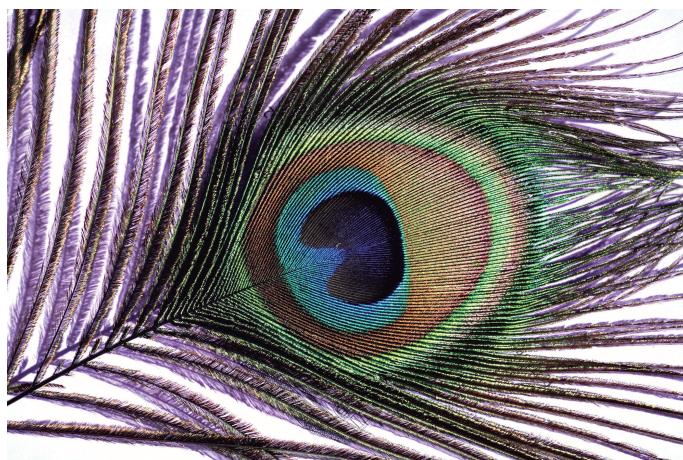


Figura 27. Pluma de pavo real (Pilar Moreno)

*Besos helados
Aleteos virtuales
Ojos tentadores*

XARO NOMDEDEU MORENO
<xaro123@gmail.com>

1 Hargittai, I. y M. Hargittai (1994), *Symmetry*, Shelter, California.

2 De la fotografía de *Flickr* de Raúl Panqueva.