suma+
SECCIONES
Marzo 2019
90
pp. 73-80

Los vestigios en pizarras de otras materias como recurso de aprendizaje matemático

MIQUEL ALBERTÍ PALMER

Crónica de una clase no anunciada

Pido a mis alumnos que no borren la pizarra de la clase anterior a la mía. A menudo aprovecho los vestigios que han dejado otros para relacionar sus materias con las matemáticas e incluso basarme en lo trabajado en ellas para incitar el aprendizaje matemático.

A continuación expondré tres ejemplos reales ocurridos en algunas de mis clases de matemáticas que se basaron en los trazos que encontré en las pizarras de materias como Inglés, Catalán, Pensar sobre el pensar y Expresión visual y plástica de primer curso de la ESO.

De entrada puede pensarse que lo trabajado en otras materias no tiene por qué estar relacionado con lo que se trabaja en matemáticas, menos todavía en un momento tan concreto como son un día y una hora de clase concretas: alguna de las previas a la mía. Esto sería así en una educación matemática basada en contenidos en la que lo primordial es el qué. Sin embargo, una educación por competencias basada más en el cómo permite centrarse más en aspectos metodológicos. Esto se pondrá de manifiesto más adelante.

Solo anticiparé que de la pizarra de Inglés mis alumnos aprendieron algo más importante que el algoritmo de la división. Aprendieron a dar significado al resto y al cociente de cualquier división. Y eso es algo que la calculadora no

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2018 y aceptado en enero de 2019

puede hacer. Aproveché la pizarra de Catalán para introducir las coordenadas cartesianas viendo la necesidad de ellas. Y de la pizarra de Pensar sobre el pensar aprendieron qué resulta esencial para reconstruir un rectángulo del que se conoce solo un pequeño fragmento.

Inglés: ejercicios tres y seis

Al entrar en clase vi en la pizarra los deberes de la materia de Inglés que se habían encargado a mis alumnos (figura 1). Eso me inspiró el planteamiento del siguiente problema:

¿Dónde estaría el 2018 en este esquema?

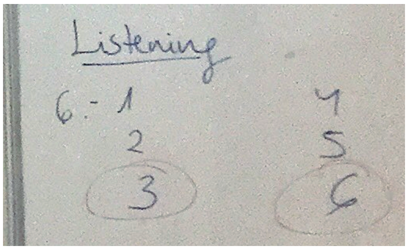

Figura 1. Deberes de Inglés: actividades 3 y 6

Primera solución: inalcanzable

Algunos dijeron que sería muy largo averiguarlo, pues la serie acababa en el número 6 y llegar hasta el 2018 llevaría muchísimo tiempo. Pero una cosa estaba clara, el 2018 caería en la primera, segunda o tercera filas. De eso, no había duda.

Segunda solución: probando

Tras la mención del término «filas» alguien observó que no estaría en la tercera fila, ya que en ella estaban los números «de la tabla del 3». El siguiente sería el 9, luego el 12, etc. Como 2018 no era múltiplo de 3 (la división por tres no era exacta), el 2018 estaría en la primera o en la segunda. Se habían reducido las opciones de tres a dos.

Hubo quien intentó aplicar el mismo razonamiento a la segunda fila. Pero los números que contenía no pertenecían a ninguna tabla multiplicativa: 2, 5, luego vendría el 8… Les invité a ampliar esa tabla para ver si se les ocurría algo más (figura 2).

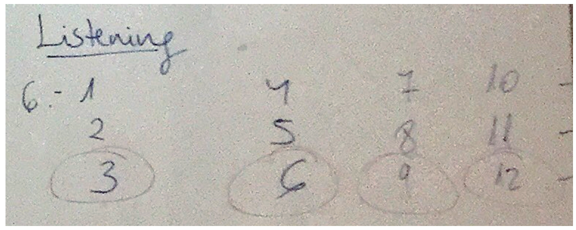

Figura 2. Ampliación de la serie con dos columnas más

No veían pauta reconocible en las dos primeras filas: 1, 4, 7 y 10 no eran parte de ninguna tabla multiplicativa; 2, 5, 8 y 11, tampoco. Además, en ambas filas había pares e impares, por lo que ese criterio tampoco servía para situar el 2018.

Tercera solución: definitiva

Estábamos en punto muerto. Entonces les sugerí reflexionar cómo habían decidido que en la tercera fila estaban los múltiplos de 3:

—Profesor: ¿Cómo sabéis que 3, 6, 9... están en la tabla del 3?

—Ell@s: Porque 3 por 1 es 3, 3 por 2 es 6, 3 por 3 es 9...

—Profesor: De acuerdo, pero ¿cómo sabéis que 2018 no es múltiplo de tres?

—Ell@s: Había una norma: si sumas 2, 0, 1 y 8 tenía que dar...

—Ell@s: Sí, tenía que dar 3 o un número de la tabla del 3.

—Profesor: ¿Y qué da?

—Ell@s: Da 11.

—Profesor: ¿Y cómo sabéis que 11 no es múltiplo de 3, que no está en la tabla del tres?

—Ell@s: Porque la división no es exacta.

—Profesor: ¿Qué da la división de 2018 entre 3?

—Ell@s: 672,6666666...

—Profesor: Lo has hecho con la calculadora, ¿no?

—Ell@s: Sí, no da exacto. 2018 no es múltiplo de 3.

—Profesor: ¿Sabríais hacer la división a mano?

—Ell@s: Claro.

—Profesor: Muy bien, pues dividid a mano 7, 8 y 9 entre 3.

—Ell@s: El 7 da 2 coma...

—Profesor: No saquéis decimales, dejad el resto como quede (figura 3).

—Ell@s: El 7 da 2 y resto 1.

—Ell@s: El 8 da 2 y resto 2.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

Figura 3. Tres divisiones por tres

—Ell@s: El 9 da 3 y resto 0.

—Profesor: ¿Y en qué fila están el 7, el 8 y el 9?

—Ell@s: En la primera, segunda y…

—Ell@s: Ah, ¡ya lo veo! Si el resto es 1, está en la 1.ª fila; si es 2, está en la 2.ª; y si es 0, en la 3.ª.

—Profesor: Ahí está la cuestión. Y si dividís ahora 2018 entre 3, ¿cuál es el resto? (figura 4).

—Ell@s: Da 672,6666666667.

—Prof.: Pero necesitamos el resto, ¿no?

—Ell@s: Da 672 y el resto es 2. ¡Estará en la 2.ª fila!

$$\begin{array}{r|l} 2018 & 3 \\ \hline 21 & 672 \\ 08 & \\ 2 & \end{array}$$

Figura 4. Dos mil dieciocho entre tres

Todos sabían dividir, incluso por números de dos, tres y más cifras. La mayoría habían hecho centenares de divisiones a mano. Pero los restos de esas divisiones no habían servido de nada. Alguien lo expresó en voz alta:

—Ell@s: Por fin sé para qué sirve el resto.

—Profesor: ¿Sabríais averiguar ahora en qué fila estaría un millón?

—Ell@s: Claro: el resto nos lo dice.

—Profesor: ¿Y si en lugar de tres filas hubiese cuatro?

—Ell@s: Entonces habría que dividir por 4.

—Profesor: ¿Y qué significa el 672?

—Ell@s: …

—Profesor: Hemos visto que el resto de la división nos dice en qué fila está el número en cuestión. ¿Qué significa el cociente 672?

—Ell@s: ¡La columna, es la columna!

—Ell@s: Sí.

—Ell@s: No. Si está en la segunda fila, habrá pasado la columna 672. Estará en la 673.

—Ell@s: Como el 8, que da resto 2 y está en la tercera.

Así expresamos la solución definitiva (tabla 1).

	Col. 1	Col. 2	Col. 3	…	Col. 673
Fila 1	1	4	7		2017
Fila 2	2	5	8		2018
Fila 3	3	6	9		2019

Tabla 1. Solución definitiva al problema

Catalán: conectores situacionales

Nada más entrar en el aula observo en la pizarra una tabla con los conectores de localización en catalán (figura 5). Los alumnos me dicen que es lo que acaban de trabajar en la materia de Catalán.

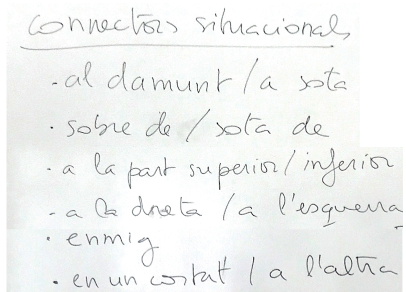

Figura 5. Restos de una pizarra de Catalán

Puesto que tarde o temprano tendremos que utilizar las coordenadas cartesianas se me ocurre que este puede ser un momento fantástico para llegar a construirlas a partir de lo estudiado en catalán. Así que formulo la pregunta siguiente:

¿Alguien podría expresar con un dibujo cada uno de esos conectores?

Enseguida levantan la mano dos personas y les invito a que realicen sus propuestas en la pizarra (figura 6).

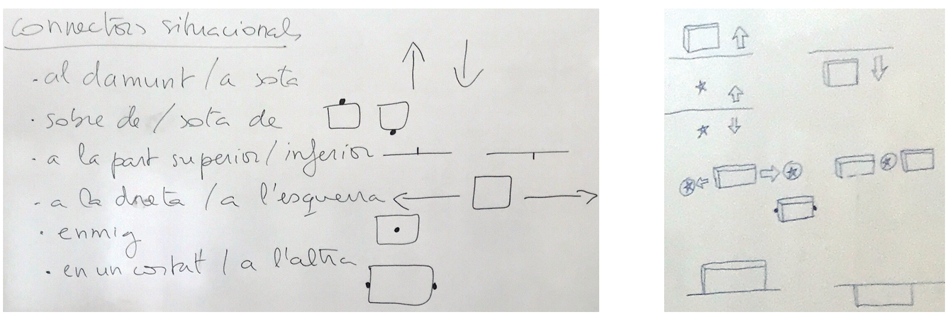

Figura 6. Dos representaciones figurativas de los conectores de localización

La mayoría de la clase se inclina por las representaciones de la izquierda, pues las considera más claras. Pero se observa una primera ambigüedad, pues al hablar de encima de, debajo de, a la izquierda de o a la derecha de, no se distingue si el objeto en cuestión está o no en contacto con el otro que le sirve de referencia.

Por ejemplo, cuando decimos que el borrador está encima de la mesa, se da por entendido que se apoya sobre ella, que está en contacto con ella. Sin embargo, si sostengo el borrador a una altura de un palmo por encima de la mesa, se entiende que el contacto no existe. La única diferencia estriba en esa proposición añadida: «por encima de». En cambio, si decimos que el borrador está debajo de la mesa, nadie pensará que está enganchado a ella como un chicle, sino que se encuentra en el suelo, en la parte del suelo que queda por debajo de la mesa. Algo parecido ocurre con izquierda y derecha, pues si una persona está a la derecha o izquierda de otra, puede estar en contacto o no con ella.

Se llega a la conclusión de que los conectores de localización lingüísticos no distinguen claramente entre cosas adosadas y cosas separadas. Un aspecto que se pone de manifiesto cuando pasamos a determinar las zonas de localización de un punto en un rectángulo. Si arriba y abajo dividen el espacio en dos mitades, una superior y otra inferior separadas por un eje horizontal (en matemáticas, se llama mediatriz); izquierda y derecha hacen lo mismo con un eje vertical (la otra mediatriz).

Para afinar más todavía la localización se fraccionan en mitades y/o tercios esas partes del rectángulo. Al final, llegamos a una fragmentación como la ilustrada en la parte central de la figura 7.

Llegados a este punto el problema está claro. Querer precisar más aun la localización nos conduce a utilizar el término «cuánto». Es decir, si un objeto está a la derecha, izquierda, encima o debajo de otro, el único modo de determinar con exactitud su posición es saber cuánto a la derecha, a la izquierda, encima o debajo. Es decir, conocer la distancia que lo separa del objeto que nos sirve de referencia. Introduciendo la cuantificación hemos convertido los conectores de localización lingüísticos en matemáticos. Pero en matemáticas, las localizaciones precisas no se dan en términos lingüísticos. ¿Cómo hacerlo?

Para ello podemos aprovechar las hojas de papel cuadriculado de los cuadernos con los que trabaja el alumnado. Del mismo modo en que lingüísticamente localizamos una cosa con relación a otra en que establecemos como referente, en matemáticas haremos lo mismo. Por tanto, lo primero es determinar qué utilizaremos de referente.

Por ejemplo, un vértice de la cuadrícula. Ahora se trata de localizar otros vértices que estén a su derecha, izquierda, encima o debajo. Para ello hemos de saber a qué distancia se halla. ¿Cómo cuantificamos o medimos esta distancia? Hay unanimidad: en cuadritos o celdas de la cuadrícula. De este modo localizamos cuatro puntos concretos (figura 8). La pizarra ya no es de Catalán, sino de Matemáticas.

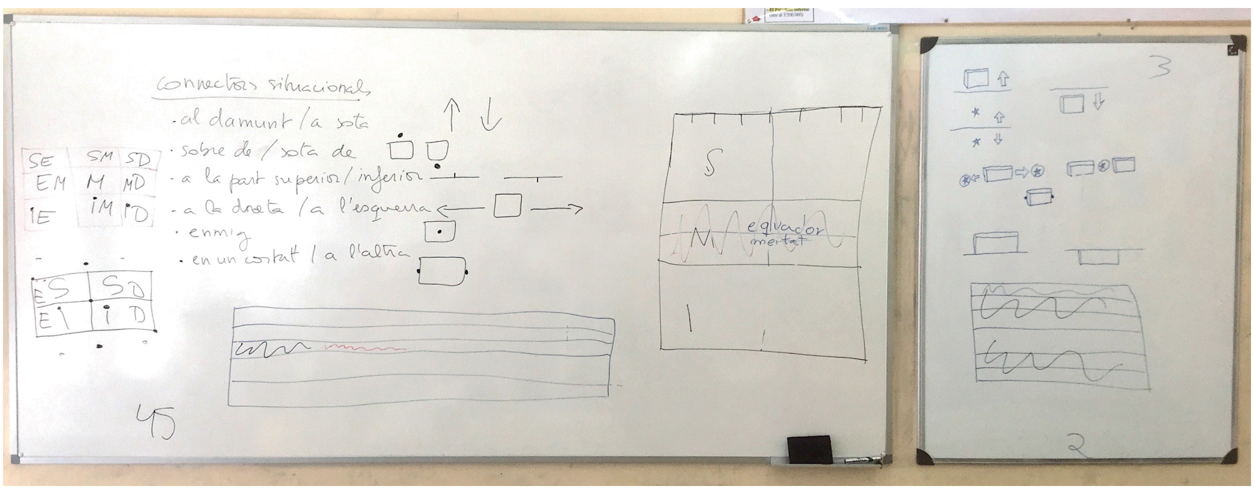

Figura 7. Pizarra de Matemáticas inspirada por los vestigios de una pizarra de Catalán

Acabamos viendo la necesidad de utilizar dos números (cantidades de cuadritos o celdas) para determinar sin ambigüedades las localizaciones. Hemos introducido las coordenadas cartesianas a partir de los conectores de localización lingüísticos. Solo falta introducir la nomenclatura propia de las matemáticas (tabla 2).

Lenguaje corriente	Lenguaje científico matemático
Vértice de la cuadrícula	Punto
Vértice referente	Origen de coordenadas
Celdas a derecha o izquierda del referente	Abscisa (positiva o negativa)
Celdas arriba o abajo del referente	Ordenada (positiva o negativa)
Par de dichas cantidades	Coordenadas del punto
Línea horizontal por el punto de referencia	Eje de abscisas
Línea vertical por el punto de referencia	Eje de ordenadas
Conjunto de conectores de situación geométrica	Sistema de coordenadas cartesiano

Tabla 2. Conectores de localizacion de ámbito lingüístico y geométrico

Pensar sobre el pensar: reconstruir el pasado

Encuentro la pizarra filosófica escrita durante la sesión de Pensar sobre el pensar. En esta ocasión trata sobre el diálogo filosófico sobre la cuestión del pasado. Las conclusiones a las que se ha llegado durante la sesión son que hay diversos tipos de pasado: el pasado inmutable y platónico (el ocurrido y que no podemos cambiar) y el pasado reconstruido día a día por la historia a partir de la investigación científica.

Mucho hemos estudiado los matemáticos el pasado inmutable y platónico de las propias matemáticas. De hecho, podría afirmarse que gran parte de la geometría tradicional y de la modelización geométrica elemental se basa en una aproximación a los elementos platónicos que tan fundamentales han sido en la historia de nuestra materia.

No creí conveniente abordar la cuestión desde ese ámbito en primero de la ESO y opté por plantear una pregunta sobre el pasado que la investigación científica trata de reconstruir a partir de los vestigios del presente. Pregunté:

Imaginad que esto (tracé un segmento vertical en la pizarra) es lo que nos hemos encontrado de un rectángulo. ¿Sabríais o podríais averiguar cómo era el rectángulo completo, el original?

Varias manos se alzan apuntando el techo del aula. Invito a tres persona a que tracen sus propuestas en la pizarra, una tras otra. La primera, toma el segmento ya trazado como lados verticales del rectángulo. La segunda, extiende dicho rectángulo a izquierda y derecha. La tercera, se sale de ambos límites (figura 9).

Conclusión 1: con un segmento se pueden hacer infinitos rectángulos. Y entonces abro un diálogo:

—Profesor: ¿Qué necesitamos conocer para poder averiguar el rectángulo sin ninguna duda?

—Ell@s: Dos lados.

—Ell@s: No, dos no. Hacen falta tres lados.

—Profesor: ¿Quién quiere completar el rectángulo (dibujo los tres lados)?

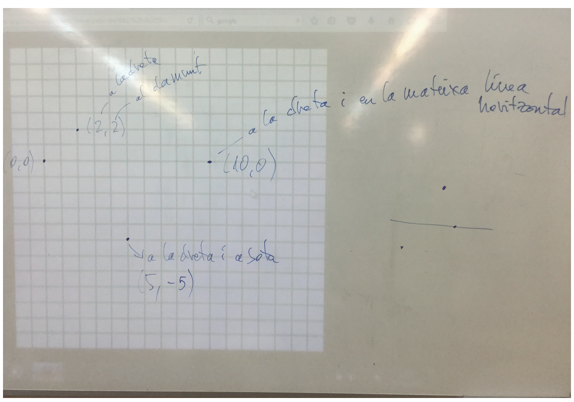

Figura 8. Localización de puntos con relación a otro

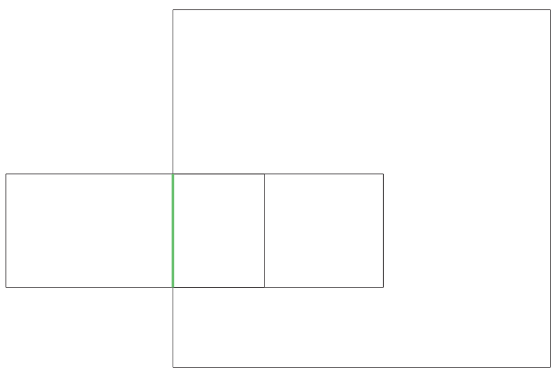

Figura 9. Tres posibles pasados rectangulares de un segmento

Una persona completa el rectángulo (figura 10). Pero enseguida se alzan voces considerando que existen más posibilidades.

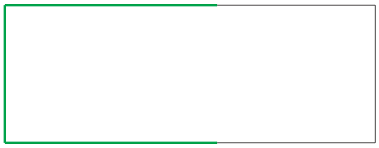

Figura 10. Posible pasado rectangular de una poligonal

—Ell@s: Con tres, tampoco. Se puede estirar hacia la derecha.

—Ell@s: También son infinitos.

Conclusión 2: con tres lados de un rectángulo, se pueden hacer infinitos rectángulos.

—Profesor: Entonces, ¿qué necesitamos como para saber cuál es el rectángulo?

—Ell@s: Cuatro lados.

—Ell@s: Toma, claro.

—Profesor: Pero, ¿no puede conocerse el rectángulo con menos?

—Ell@s: Bueno, sí. Recortados.

—Profesor: ¿Qué quieres decir?

—Ell@s: Cuatro lados, pero no enteros.

Y se dibuja en la pizarra (figura 11).

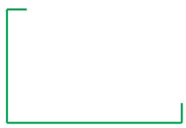

Figura 11. Vestigio de un rectángulo (mucho vestigio)

—Profesor: ¿No se podría con menos que eso?

—Ell@s: Sí, pero con las esquinas.

—Ell@s: Hay que tener las tres esquinas.

—Profesor: Los tres ángulos rectos, ¿no?

—Ell@s: Si los alargas, por fuerza te da.

Y lo hacemos (figura 12). La extensión de los dos lados interrumpidos conduce a un único punto correspondiente al cuarto vértice de la figura: el rectángulo completo.

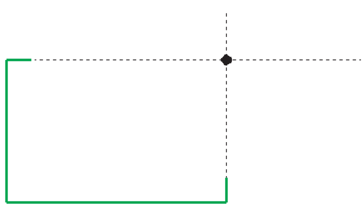

Figura 12. Reconstrucción de un rectángulo conociendo tres de sus cuatro vértices

Conclusión 3: Para reconstruir un rectángulo hacen falta, como mínimo, los tres vértices (tres ángulos rectos).

Expresión visual y plástica: mi cara es asimétrica

En esta ocasión no se trata de una pizarra, sino de una exposición de imágenes en una pared del aula que los alumnos de un grupo habían llenado de parejas de fotos con sus rostros. Cada pareja estaba compuesta por una imagen frontal natural y por otra formada con dos mitades perfectamente simétricas. Pero ninguna cara es perfectamente simétrica. Al entrar en el aula y ver multitud de caras duplicadas del alumnado les pregunté de qué se trataba.

Eran trabajos de EVP consistentes en hacerse un selfi, seccionarlo según el aparente eje de simetría vertical y enganchar una copia simétrica a la mitad original. El resultado eran lo que parecían caras humanas perfectamente simétricas, pero en las que se evidenciaba el aspecto irreal de las reproducciones simétricas.

No pude evitar preguntar a los alumnos cómo sabían cuál de las dos imágenes de una misma persona, la real y la simétrica, era la auténtica. La respuesta fue que bastaba con mirar a la cara a la persona en cuestión y percatarse visualmente de que sus facciones no respondían al patrón geométrico de simetría.

Insistí diciendo que en las familias siempre hay familiares que ven en el semblante de un niño o niña los rasgos de su padre y que otros, en cambio, ven los de su madre. ¿Quién tiene razón? ¿Acaso basta la percepción visual para decidir si una imagen se corresponde con la real o no? ¿Hasta qué punto eso sería científico?

No lo es. Es una conclusión subjetiva. ¿Cómo convertirla en científica? Para ello es necesaria la cuantificación. Al estilo de unos CSI podemos medir detalles de las imágenes y ver si la simétrica se corresponde o no con la real, pero no según el parecer de una persona u otra, sino de forma objetiva en base a las medidas tomadas. Pero para ello también es necesario conocer el significado de la simetría axial. ¿Qué reglas debe cumplir un punto del rostro para decir que es homólogo de otro por simetría?

Esto nos llevó a una reflexión sobre un fenómeno que muchos tipos de software reproducen automáticamente. La cuestión estriba en qué relación guardan un punto, el eje de simetría y el homólogo de aquel reflejado por este. Ante la figura 13, todos consideraban que los puntos P y Q sí eran simétricos el uno del otro, pero no tenían la misma opinión de P y R, de P y S ni de P y T. Sin embargo, nadie sabía el motivo. Miraban la figura como el rostro de un conocido.

Llevó tiempo acabar concretando las condiciones con respecto del eje que hace las veces de espejo. A saber: un punto y su homólogo deben estar sobre la perpendicular al eje y a la misma distancia de este. Los puntos P y Q de la figura 13 son los únicos que cumplen estos requisitos.

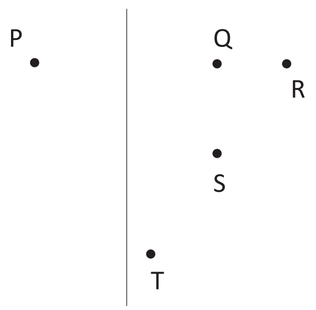

Figura 13. Solo Q es simétrico de P repecto al segmento

Una vez concretado esto, se trataba de averiguar objetivamente las diferencias entre la foto de la cara real y la compuesta con dos mitades simétricas. Bastaba tomar puntos que deberían ser homólogos y ver si lo eran o no con relación a un eje de simetría que, en la mayoría de casos sigue la línea del tabique nasal. Per ejemplo, los ojos, las comisuras de la boca, las orejas, las fosas nasales, las cejas…

La figura 14 muestra el rostro de un gato. De la observación visual concluiríamos que se trata de un animal de rostro simétrico y de que la fotografía ha logrado captar bien dicha simetría, aunque su eje no sea vertical. Sin embargo, esa simetría es tan solo aparente.

La transversalidad definitiva es la del profesorado

La incitación al aprendizaje matemático puede llevarse a cabo de muchas formas. En el proyecto L'INSiTU el principal recurso es el diálogo, pero se complementa con la práctica. Los vestigios que otras materias dejan en la pizarra representan la prueba de que se han realizado una serie de actividades en el aula cuya realidad es incuestionable. Merece la pena aprovechar la oportunidad que esas pizarras nos brindan, no solo para relacionar otras materias con las matemáticas, sino para que el alumnado aprenda y construya matemáticas a partir de ellas dándose cuenta de primera mano de la transversalidad inherente.

La verdadera interdisciplinariedad entre Matemáticas y Catalán, Matemáticas y Pensar sobre el pensar, y Matemáticas y Expresión visual y plástica resultó tan extraordinaria como imprevista. No hubo aspectos transversales ni interdisciplinares entre Matemáticas e Inglés, pues la actividad trataba sobre la organización de los ejercicios del libro de texto referentes al *listening* y en clase de matemáticas no los escuchamos.

Las conexiones de esas pizarras con las matemáticas se fraguaron en la organización de números en una tabla (Inglés), los conectores de localización (Catalán), la reconstrucción científica

Figura 14. La geometría demuestra que la simetría absoluta puede ser solo aparente

del pasado a partir de los vestigios del presente (Pensar sobre el pensar) y la introducción de la cuantificación objetiva (Expresión visual y plástica). ¿Para cuándo otras materias construirán alguna parte de sus competencias a partir de las matemáticas?

Que de esta forma el aprendizaje resultó muy significativo se hace evidente cuando se observan los resultados. De la pizarra de Inglés muchos aprendieron qué significa dividir y que el dominio de un algoritmo no nos hace competentes si no sabemos interpretarlo. Saber dividir es saber interpretar el cociente y el resto de la división.

De la pizarra de Catalán se llevó a cabo una aproximación lingüística y figurativa, más natural para el alumnado que la que realizó el propio Descartes, a las coordenadas cartesianas. A esa edad las personas utilizan conectores situacionales en su lenguaje corriente, aun cuando quizá no sepan su significado ni que forman un grupo de términos llamados así. El enfoque cuantificado de la cuestión ayudó, además, a mejorar la comprensión lingüística de dichos términos ganando precisión. Como consecuencia de ello se vio la necesidad de disponer de un término o un modo más preciso de diferenciar un punto u objeto que esté encima, pero en contacto con una mesa, de otro que esté encima pero no la toque.

De la pizarra de Pensar sobre el pensar aprendieron el enfoque científico para reconstruir el pasado. La reconstrucción del rectángulo sirvió además para profundizar en su conocimiento. Del mismo modo en que muchos no supieron dar significado a la división, también en el caso del rectángulo se obtuvo mayor grado de competencia al analizarlo con mayor profundidad: fijándose en sus ángulos rectos.

En cuanto a las caras asimétricas de Expresión visual y plástica debemos reconocer que la sociedad tolera mucho mejor la incompetencia de una persona para trazar una figura simétrica a otra que el hecho de no saber dividir a mano, aunque la calculadora sea capaz de dividir y la división se haga sin conocer el significado de la división. Gracias a las imágenes de los rostros se reflexionó sobre qué aspectos (de nuevo cuantificados) garantizan la simetría axial: equidistancia del eje que actúa como espejo y la perpendicularidad a él de un punto y su reflejo. Si estas condiciones no se respetan, no existe simetría axial.

¿Cómo no relacionar esas pizarras con las matemáticas? ¿Qué sentido habría tenido que el profesor de matemáticas borrase esas pizarras como si jamás hubiesen existido y comenzar la sesión matemática hablando siguiendo el hilo de su materia? Pretendemos que con los hilos de las materias el alumnado va tejiendo la malla de su aprendizaje. Sin duda, se trata de una labor difícil a la que con clases no anunciadas como esas podemos contribuir, ayudar, guiar.

No es aportando perspectivas diferenciadas y aisladas a la consecución de un trabajo que enfocamos la educación desde una perspectiva verdaderamente interdisciplinar o transversal, sino mostrando al alumnado que nos creemos la transversalidad y la interdisciplinariedad porque siempre han existido. De ahí la necesidad de relacionar las metodologías de otros colegas con las nuestras. Hay, por tanto, necesidad urgente de coordinación entre profesorado de ámbitos diversos, lo cual también resulta harto difícil. La transversalidad pasa por la interdisciplinariedad, pero la transversalidad definitiva no es la de las materias, sino la de su profesorado.

Miquel Albertí Palmer
Institut Vallès (Sabadell)
<alberti.miquel@gmail.com>