suma+ 90
Secciones
Marzo 2019
pp. 81-92

# Protagonistas olvidados en geometría

Jesús García Gual
Mercedes Sánchez Benito

## El rincón de ESTALMAT

En esta ocasión se presenta una actividad geométrica desarrollada con los estudiantes que ya han realizado los dos cursos del proyecto ESTALMAT- Madrid.

Su contenido se puede aprovechar parcialmente o en su totalidad en las aulas de secundaria en «Ampliación de Matemáticas» de cuarto de ESO o en Matemáticas de Primero de Bachillerato de Ciencias buscando razonamientos geométricos que nos muestren la independencia de los conceptos de perímetro y área de las figuras planas y en qué situaciones con un perímetro determinado se obtiene el área máxima en un polígono convexo. Pensamos que es importante que en las aulas de secundaria, alguna vez, se tome conciencia de la necesidad de plantear la enseñanza de la geometría en términos de investigación por parte de los alumnos para las cuestiones planteadas; es un buen camino para conseguir un verdadero aprendizaje.

El problema isoperimétrico desde su comienzo se muestra sugerente, no solo por la leyenda de Dido, sino por la relación tan inestable entre el perímetro y el área que presentan figuras tan elementales como por ejemplo los triángulos: con igual base todos los triángulos que tengan el otro vértice en una línea paralela a la base tienen igual área pero no el mismo perímetro.



Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2018 y aceptado en enero de 2019

A lo largo de la historia ha habido muchos matemáticos que han dedicado esfuerzos a su resolución, desde el griego Zenodoro que vivió en torno al año 200 a.C. hasta bien entrado el siglo XIX en el que quedó definitivamente resuelto por Weierstrass.

Aunque añadimos demostraciones o damos indicaciones para encontrarlas, no es este el objetivo de este artículo, sino el conocimiento argumentado de los resultados.

## Fórmula de Herón para el área de un triángulo

Si preguntamos a alguien con el título de bachiller cómo se calcula el área de un triángulo, nos encontraremos casi como única respuesta con la conocida fórmula «base por altura partido por 2». Habrá que toparse con una persona amante de la geometría para que mencione la fórmula de Herón.

No suele ser habitual encontrar la fórmula de Herón en los libros de texto de matemáticas de secundaria; y nos preguntamos: ¿Por qué no se enuncia la fórmula de Herón en nuestra escuela a pesar de ser la indicada para los datos naturales de un triángulo?

Seguramente porque su demostración no es inmediata, o porque…, la razón última quizás sea que la geometría no está de moda.

Nuestra apuesta es que dicha fórmula vuelva a ser conocida (se enuncie) en la Secundaria. ¡Qué sería del mundo si la gente solo hablara de lo que sabe, no ya demostrar, sino al menos razonar! (¡Cuánto silencio!).

Empecemos pues por enunciarla:

En un triángulo de lados $a$, $b$ y $c$, si llamamos, $s$ al semiperímetro $(a+b+c)/2$, tenemos que su área es:

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Adornamos la fórmula con una demostración geométrica basada en la igualdad de los segmentos tangentes trazados desde un punto a una circunferencia.

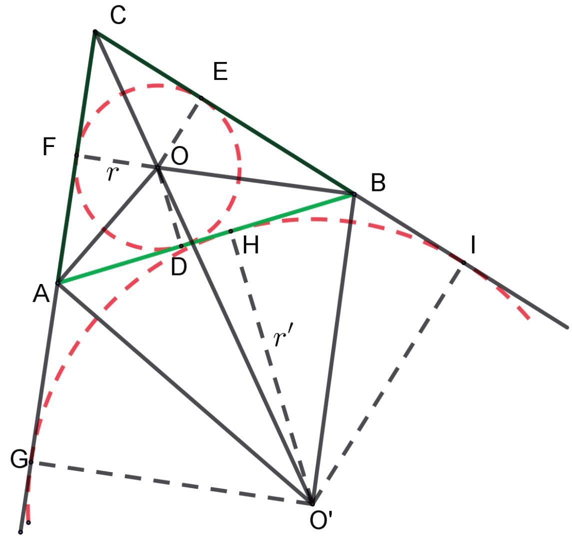


Figura 1

En la figura 1, sea $O'$ el centro de la circunferencia exinscrita al triángulo $ABC$ de radio $r'$ correspondiente al ángulo $C$; $G$, $H$, $I$ son los puntos de contacto de esta circunferencia con los lados del triángulo o sus prolongaciones.

Por tangencia $CI=CG$ y $CE=CF$, luego $EI=FG$.

Como también se cumple que:
$EI=EB+BI=BD+BI=BH+HD+BI=$
$=HD+2BI$
$FG=FA+AG=FA+AD+DH=AD+AD+$
$+DH=2AD+DH$

Resulta que $AD=BI$, y por tanto:
$CI=CE+EB+BI=CE+EB+AD=s$, siendo $s$ el semiperímetro del triángulo $ABC$, ya que por tangencias, el perímetro es $2CE+2EB+2AD$ (Observemos que: $CE=s-c$; $EB=s-b$; $AD=s-a$). Análogamente, $EB=AH$.

Tenemos que $\mathcal{A}=sr$; siendo $\mathcal{A}$ el área del triángulo y $r$ el radio de la circunferencia inscrita y además:

$\mathcal{A}=$ *área de* $O'CA+$ *área de* $O'BC-$ *área de* $O'BA=[(b+a-c)\cdot r']/2=(s-c)\cdot r'$

Multiplicando ambas igualdades tenemos que $A^2=s(s-c)\cdot r\cdot r'$

En la figura 2, el ángulo $OAO'$ es recto pues está formado por las bisectrices del ángulo que forman las rectas $CG$ y $AB$.

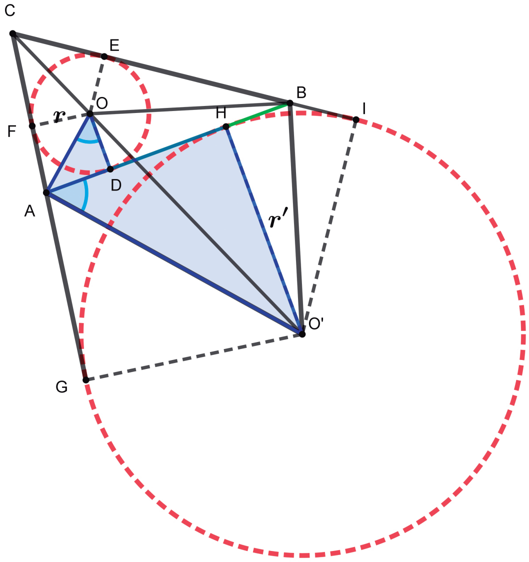


Figura 2

Por tanto los ángulos *OAD* y *HAO'* son complementarios y los triángulos rectángulos *OAD* y *HAO'* semejantes y así:

$$\frac{r}{AD}=\frac{HA}{r'}$$

con lo cual, $r \cdot r' = AD \cdot HA = (s-a) \cdot (s-b)$, llegándose al final a: $\mathcal{A}^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. q.e.d.

## El cuadrilátero inscrito (un secundario de lujo a la hora de maximizar áreas)

En la historia de «El problema de Dido» (la curva de perímetro dado que quería ser de área máxima y que dio origen al llamado problema isoperimétrico) aparecen personajes: algunos de amplio recorrido, como el triángulo isósceles que se ofrece como campeón de área entre los triángulos de base y perímetro dados y que propone dentro de los polígonos de perímetro dado a los equiláteros como compromisarios del círculo; y otros circunstanciales, como el casi olvidado lema de Zenodoro que avala como pareja de triángulos isósceles de bases dadas y suma de perímetros dada, a la compuesta por dos triángulos isósceles semejantes. El resultado (cierto, pero no demostrado con generalidad por Zenodoro) es usado con ingenio para argumentar la apuesta por polígonos, que siendo equiláteros, sean además equiangulares.

No aparece en el relato el apuesto cuadrilátero de lados dados inscriptible en una circunferencia (cuadrilátero cíclico) a pesar de ser un auténtico Eneas. Vayamos a los orígenes.

### *¿Podemos encontrar un cuadrilátero cíclico de lados dados?*

La respuesta es sí y aún más general. Se puede construir un polígono cíclico de lados dados siempre que sea posible formar un polígono con esos lados, es decir, que la longitud de cada uno de los lados sea menor que la suma de las restantes longitudes.

Basta colocar los lados en forma de cadena abierta (figura 3). Inscribir esta cadena en una circunferencia suficientemente grande de forma que no se crucen los lados. La circunferencia tendrá su centro en la mediatriz de uno de los la-

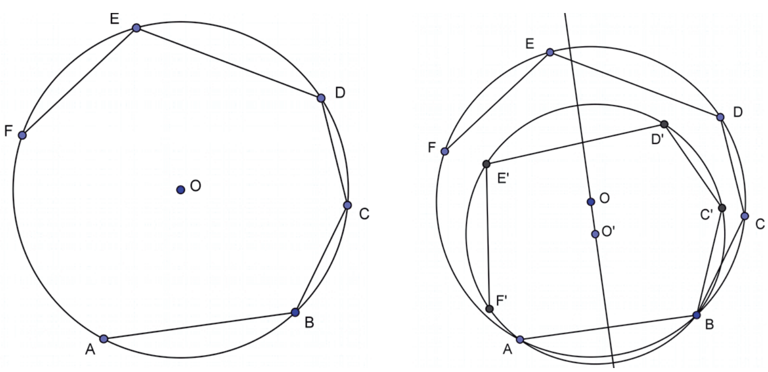


Figura 3

dos, $AB$. Moviendo este centro por la mediatriz y dibujando la circunferencia de radio $OA$, vamos a ir inscribiendo la cadena en circunferencias más pequeñas, hasta que por continuidad quede cerrada sobre una de ellas (bonito ejercicio para hacer con Geogebra y la herramienta compás).

Hemos justificado así la existencia de cuadriláteros cíclicos de lados conocidos.

Unimos $G$ con $E$ con un segmento, y trazamos desde $F$ una paralela $t$ que corta a $r$ en $H$.

Trazamos otra recta auxiliar $u$ que pasa por $H$, y en ella ponemos el punto $I$ (hacia arriba) de forma que $HI = b$.

En otra recta auxiliar $v$ que pasa por $D$, colocamos a ambos lados de $D$ los puntos $J$ y $K$, de forma que $JD = DK = c$.

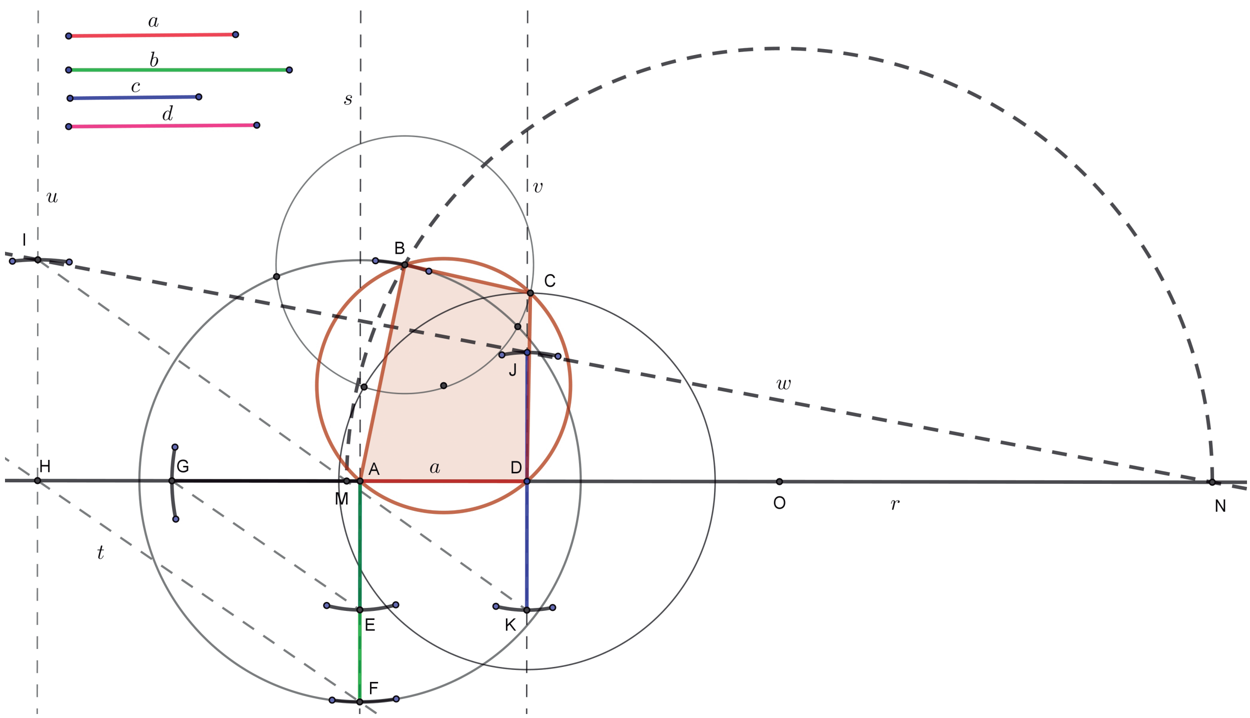


Figura 4

## Cuadrilátero cíclico de lados a, b, c y d

En la figura 4 podemos ver una construcción con regla y compás del cuadrilátero cíclico de lados $a$, $b$, $c$, y $d$.

Sobre una recta horizontal $r$ colocamos el punto $A$ y a su derecha $D$, siendo $AD = a$.

A la izquierda de $A$ colocamos $G$ de forma que

$$GA = d$$

En una recta auxiliar $s$ que pasa por $A$ colocamos, debajo de $A$, los puntos $E$ y $F$, de forma que

$$AE = c \ \text{ y } AF = b.$$

Unimos mediante recta o segmento $I$ con $J$ y $K$, de forma que obtengamos las intersecciones $M$ y $N$ de esas líneas con $r$.

Hallamos el punto medio $O$ de $M$ y $N$, y trazamos una semicircunferencia (hacia arriba) de radio $ON$.

Con centro en $A$ y radio $b$ trazamos una circunferencia que corta a la semicircunferencia anterior en un punto que va a ser $B$ (vértice del cuadrilátero buscado).

Teniendo colocados $D$, $A$ y $B$, obtenemos $C$ como intersección de circunferencias (la de centro $B$ y radio $c$, y la de centro $D$ y radio $d$. Es un placer comprobar que $A$, $B$, $C$ y $D$ son cíclicos.

Esta construcción está basada en la construcción de una circunferencia de Apolonio ya que el lugar geométrico de los puntos $P$ del plano que verifican que $d(P,A)=k\cdot d(P,B)$ es una circunferencia llamada de Apolonio[1].

## ¿Cuántos cuadriláteros cíclicos tenemos con cuatro lados dados?

Los cuatros lados forman cadenas cerradas inscritas en una circunferencia cuyos eslabones pueden ser colocados en orden diferente. Fijado un eslabón en la circunferencia, los otros tres eslabones pueden colocarse de seis formas, pero las cadenas que tienen las mismas parejas enfrentadas dan lugar a cuadriláteros simétricos, por lo que tenemos tres cuadriláteros inscritos diferentes, en la figura 5:

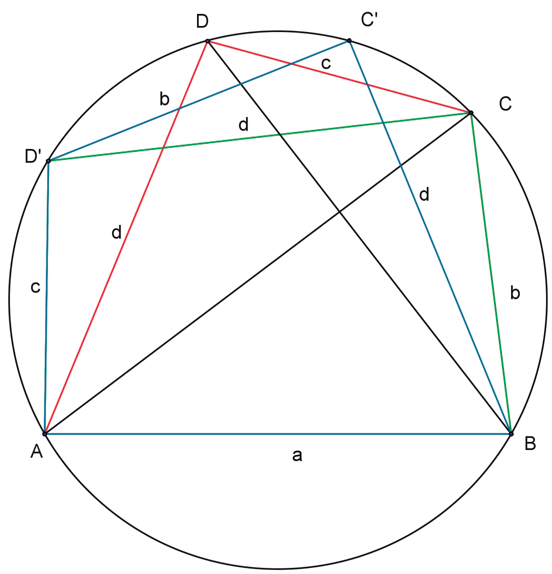


Figura 5

a y d enfrentados: cuadrilátero *ABCD*
a y c enfrentados: cuadrilátero *ABCD'*
a y b enfrentados: cuadrilátero *ABC'D'*

Los cuadriláteros pueden ser relacionados a partir de la división en dos triángulos por una diagonal, cambiando uno de ellos por su simétrico respecto a la mediatriz de la diagonal. (Es inmediato deducir que sus áreas son iguales).

De igual forma polígonos cíclicos con lados dados no hay muchos. Lo único que podemos hacer es ensamblar sus lados en diferente orden en la circunferencia hasta cerrar la cadena.

Si no hay lados iguales, el número es $\frac{(n-1)!}{2}$ (ordenaciones cíclicas de n vértices partido por 2).

## Cuadriláteros y área máxima

Se suele olvidar que este cuadrilátero inscrito (que puede tener tres formas diferentes) es el de mayor área entre los cuadriláteros que tienen sus lados dados (lo probaremos más tarde, pero ello no es óbice para que hagamos ya uso de ello).

Manejemos este resultado en otros problemas de áreas máximas.

## De entre todos los paralelogramos de lados dados el de mayor área es el rectángulo

Es un resultado inmediato de razonar a partir de la fórmula de área del romboide, pero es curioso observar que cambiando el enunciado por «el cuadrilátero con mayor área entre los que tienen lados dados e iguales dos a dos», nos encontramos con dos soluciones (figura 6):

- el rectángulo (porque es el único romboide que puede ser inscrito en una circunferencia);
- la figura en forma de cometa con dos ángulos opuestos de 90º.

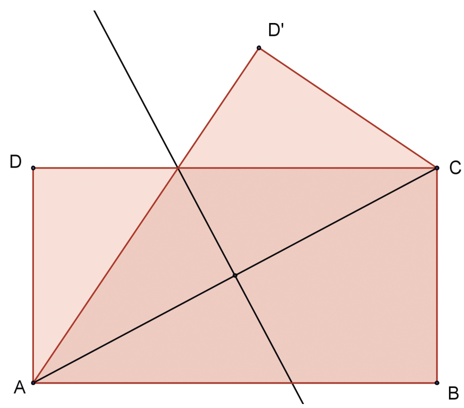


Figura 6

### De entre todos los cuadriláteros con lados dados y dos iguales, el de mayor área es el trapecio isósceles y…

Este problema ya no es tan inmediato, pero es que los trapecios isósceles se pueden inscribir en una circunferencia, lo que les hace merecedores de título, aunque compartido: *ABCD y ABCD*'.

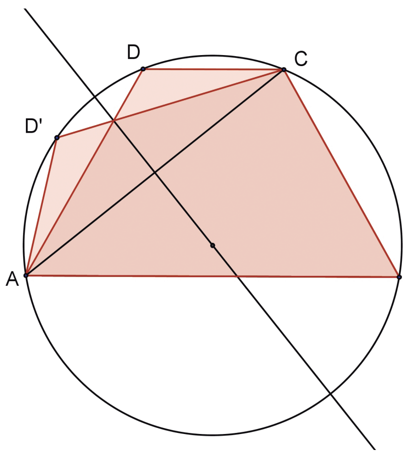


Figura 7

### De entre todos los cuadriláteros con lados dados y tres iguales, el de mayor área es el trapecio isósceles (aquí sin competencia)

Este es el resultado que justificaría la nominación como candidato a mejor secundario en «El problema de Dido», cuando queremos llegar a los polígonos regulares con el mayor número de lados posibles como porteadores de la antorcha hacia el pebetero en forma de círculo.

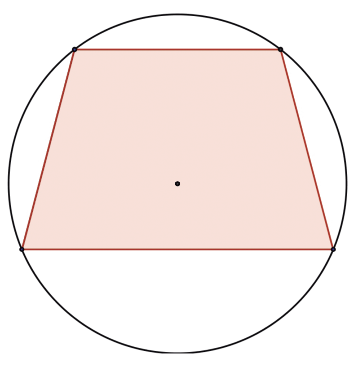

Figura 8

## *Polígonos de perímetro dado y área máxima*

### El candidato debe ser equilátero

Partimos de un polígono convexo (los no convexos no optan al premio) de *n* lados y formamos un triángulo *ABC* con tres vértices consecutivos. Luego cambiamos los dos lados del triángulo que ya eran del polígono por dos lados iguales (de longitud la semisuma de los que se quitan, para no modificar el perímetro) obteniendo un triángulo *AB'C* isósceles (de igual base y mayor altura) y a su vez un polígono de *n* lados con un área mayor.

Así pues, si existe un polígono de *n* lados de perímetro dado y área máxima, debe ser equilátero, para que no pueda ser estrictamente mejorado por el procedimiento anterior.

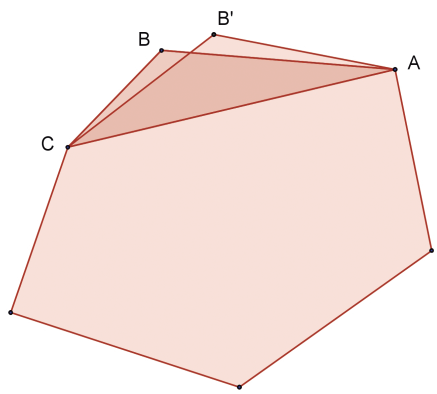


Figura 9

### El candidato debe ser además equiangular

Sea un polígono convexo de *n* lados iguales con $n > 5$. Consideramos el cuadrilátero definido por cuatro vértices consecutivos *ABCD*, que tiene tres lados iguales. Podemos cambiarlo por un trapecio isósceles *AB'C'D* con esos mismos lados y con mayor área, mejorando nuestro polígono con otro, cuyos ángulos en *B'* y *C'* son iguales (recordemos que en el caso de tres lados iguales el cuadrilátero óptimo era único).

Así pues, si existe un polígono equilátero de *n* lados de perímetro dado y área máxima, debe ser equiangular, para que no pueda ser estrictamente mejorado por el procedimiento anterior.

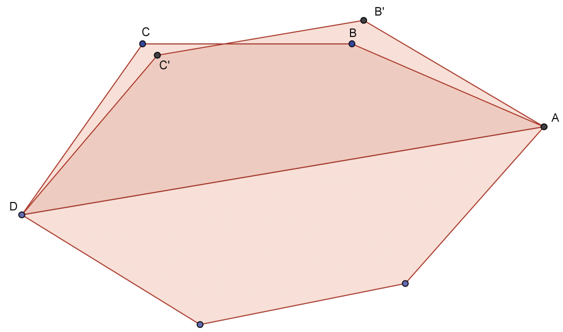


Figura 10

Tenemos pues que si existe un polígono de *n* lados con perímetro dado y área máxima (insistimos un poco en esto porque en los razonamientos usamos que no pueden ser mejorados por las transformaciones aplicadas, pero podrían serlo por otras y para negarlo necesitaríamos argumentos adicionales como por ejemplo, la continuidad) debe ser el regular.

### Si el polígono regular de n lados es el polígono regular de perímetro dado y mayor área, entonces el polígono regular de *n* +1 lados e igual perímetro tiene más área

Basta con considerar que un polígono regular de *n* lados, puede ser considerado como uno no regular de *n*+1 vértices, colocando un vértice nuevo en uno de sus lados.

### El polígono de *n* lados dados y área máxima es cíclico

Razonémoslo para un pentágono convexo *ABCDE*. Si el cuadrilátero *ABCD* no es cíclico, lo podemos cambiar por otro cíclico *ABC'D'*, con lados de igual longitud y mayor área. Como los segmentos *AD* y *AD'* miden lo mismo, podemos girar el triángulo *ADE* desde *A* y convertirlo en *AD'E'*. Los lados del polígono *ABC'D'E'* son iguales a los de *ABCDE* y aquel tiene mayor área.

De igual forma, si un polígono tiene cuatro vértices consecutivos, *A, B, C y D* que no son cíclicos, el cuadrilátero *ABCD* puede ser cambiado por uno cíclico *ABC'D'*, al que, como *AD* = = *AD'*, con un giro de centro *A* y radio *AD* se puede adosar el resto del polígono primitivo, obteniendo un polígono de lados iguales y mayor área. Luego si hay solución de área máxima, esta se corresponde con el cíclico.

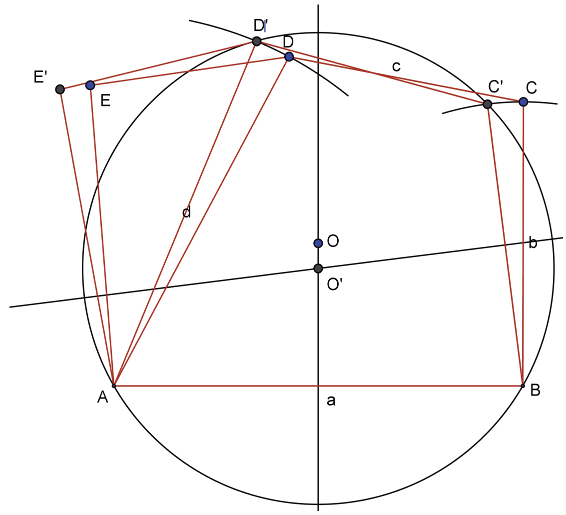


Figura 11

## El cuadrilátero inscrito (actor protagonista)

### Condición necesaria y suficiente

Un cuadrilátero convexo tiene circunferencia circunscrita si y solo si la suma de los ángulos opuestos es 180º.

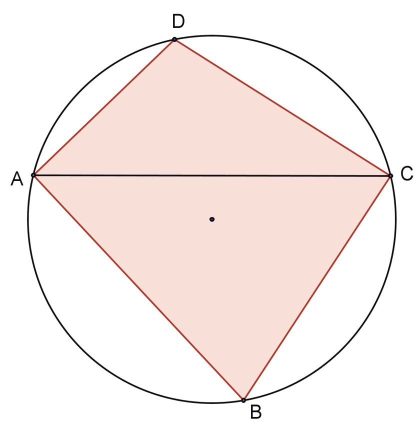


Figura 12

La condición es necesaria ya que al estar inscrito, los arcos de dos ángulos opuestos completan una circunferencia, y los ángulos inscritos miden la mitad de su arco.

La condición es suficiente.

Sean $\alpha$, $180^\circ-\alpha$ los ángulos en *B* y *D*.
Las construcciones de los arcos capaces de los ángulos $\alpha$, $180^\circ-\alpha$ sobre el segmento *AC* dan lugar a arcos complementarios de una misma circunferencia.

## Su área

Se conoce como fórmula de Brahmagupta la generalización de la fórmula de Herón del área del triángulo al área del cuadrilátero cíclico. El matemático indio no dejó ninguna indicación de la demostración e incluso no señaló la necesidad de que el cuadrilátero fuera inscribible.



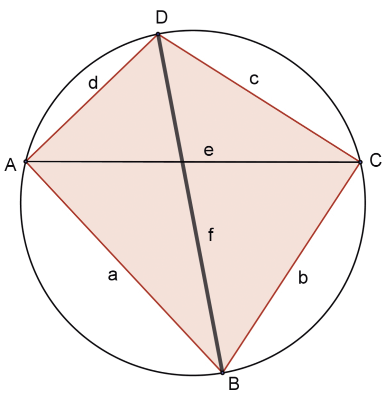


Figura 13

El área del cuadrilátero cíclico es:

$$K=\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$$

siendo, $s$ el semiperímetro.

$$s=\frac{a+b+c+d}{2}$$

La fórmula ya está al alcance de cualquiera para su uso (la fórmula es práctica, fácil de recordar y está avalada por grandes firmas).

Basta hacer *d=0* considerar el triángulo como un cuadrilátero con dos vértices iguales) y se obtiene la fórmula de Herón.

Como además de llamar la atención sobre la fórmula otros intereses nos animan, vamos a demostrar una fórmula más general: el área de un cuadrilátero convexo de lados y una diagonal dados, y así aireamos un poco a una fórmula poco conocida. Tan solo hace falta utilizar el teorema del coseno, un poco de trigonometría y paciencia para hacer «las cuentas».

### *Fórmula de Bretschneider*

Sea el cuadrilátero *ABCD*, de lados *a, b, c* y *d* y diagonal $e$ [2].

El área es

$$K=\frac{a\cdot b\cdot \operatorname{sen}\beta+c\cdot d\cdot \operatorname{sen}\alpha}{2},$$

de donde $4K=2ab\operatorname{sen}\beta+2cd\operatorname{sen}\alpha$ [1]

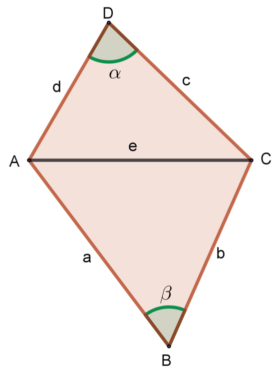


Figura 14

Por otro lado,

$$\begin{Bmatrix} e^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta \\ e^2=c^2+d^2-2cd\cos\alpha \end{Bmatrix}$$

y así,

$$a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos\beta-2cd\cos\alpha \ [2]$$

Elevamos al cuadrado las expresiones [1] y [2] y las sumamos,

$$\begin{aligned} &16K^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=\\ &=4a^2b^2sen^2\beta+4c^2d^2sen^2\alpha+8abcd\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha+\\ &+4a^2b^2\cos^2\beta+4c^2d^2\cos^2\alpha-8abcd\cos\beta\cos\alpha=\\ &=4a^2b^2+4c^2d^2-8abcd\cos(\alpha+\beta)=\\ &=(2ab+2cd)^2-8abcd(1+\cos(\alpha+\beta))=\\ &=(2ab+2cd)^2-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} \end{aligned}$$

Luego

$$16K^2 = (2ab+2cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 -$$
$$-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} \quad [3]$$

La diferencia de cuadrados del segundo miembro la expresamos como suma por diferencia, siendo igual a:

$$\begin{aligned}
&(a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2)\cdot\\
&\cdot(-a^2+2ab-b^2+c^2+2cd+d^2)=\\
&=((a+b)^2-(c-d)^2)\cdot((c+d)^2-(a-b)^2)=\\
&=(a+b+c-d)\cdot(a+b-c+d)\cdot\\
&\cdot(c+d+a-b)\cdot(c+d-a+b)=\\
&=(p-2d)\cdot(p-2c)\cdot(p-2b)\cdot(p-2a)
\end{aligned}$$

siendo $p$ el perímetro del cuadrilátero. Y acabamos dividiendo [3] por 16

$$K^2 = (s-d)\cdot(s-c)\cdot(s-b)\cdot(s-a) - abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

donde $s$ es ahora el semiperímetro. Si

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^\circ,\ K = \sqrt{(s-d)\cdot(s-c)\cdot(s-b)\cdot(s-a)}$$

y queda demostrado que:

> El cuadrilátero cíclico es el de mayor área entre los cuadriláteros de lados dados, a, b, c y d [3].

El área en el cuadrilátero genérico depende de una de sus diagonales $e$ pero esta diagonal no aparece en los inscritos, ya que su longitud se calcula en función exclusiva de los lados:

$$e^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

En efecto, si el cuadrilátero es inscrito, de [2], teniendo en cuenta que $\cos\alpha = -\cos\beta$ obtenemos,

$$\cos\beta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

teniéndose que

$$e^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

y con simple manipulación algebraica la fórmula anunciada.

En este punto no podemos evitar mencionar la otra diagonal,

$$f^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$

y multiplicando y extrayendo raíces cuadradas obtener el llamado teorema de Ptolomeo:

> El producto de las diagonales de un cuadrilátero cíclico es igual a la suma de los productos de los lados opuestos: $e\cdot f = ac+bd$

De la fórmula de Brahmagupta (598-670) a la de Carl Anton Bretschneider (1808-1878) doce siglos nos contemplan. Hemos sustituido los razonamientos geométricos clásicos por el cálculo algebraico-trigonométrico.

Hagamos un canto a la belleza de las técnicas geométricas con una demostración al estilo de Ptolomeo de su citado teorema.

Consideremos un cuadrilátero inscrito $ABCD$ (figura 15), cuyas diagonales miden $e$ y $f$.

Suponemos que

$$x \le \frac{\widehat{ADC}}{2}$$

(si no llamaríamos $x$ a $\widehat{ADB}$).

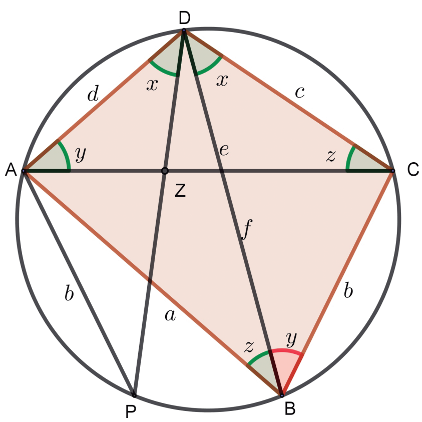


Figura 15

Con centro en $A$ y radio $b$ trazamos un arco que corta a la circunferencia inicial en $P$. Por abarcar arcos iguales tenemos los dos ángulos $x$, los dos ángulos $y$, y los dos $z$ marcados. Los triángulos $AZD$ (siendo $Z$ la intersección de $PD$ y $AC$) y $BCD$ son semejantes. Así, siendo $l$ la longitud de $AZ$, tenemos que:

$$\frac{l}{b}=\frac{d}{f}$$

de donde $l \cdot f = b \cdot d$ [4]

También son semejantes $ZCD$ y $ABD$, obteniéndose:

$$\frac{e-l}{a}=\frac{c}{f}$$

y por tanto, $e f - l f = a c$ que al combinar con [4] culmina la fórmula buscada.

El resultado de Ptolomeo es una caracterización del cuadrilátero inscrito pero, al intentar desandar la demostración anterior, tenemos problemas a la hora de probar la semejanza de los triángulos, y la solución no es lo armoniosa que nos gustaría.

Así que demos a la geometría la belleza y al álgebra la potencia. Apliquemos la fórmula de Julian Lowell Coolidge.

### *Fórmula de Coolidge (1940)(4)*

El área $K$ de un cuadrilátero convexo cualquiera, de lados, $a$, $b$, $c$ y $d$ y diagonales $e$ y $f$ (siendo $s$ el semiperímetro) (figura 16) es:

$$K=\frac{1}{4}\sqrt{4e^2\cdot f^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}=$$
$$=\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)-\frac{1}{4}(ac+bd+ef)\cdot(ac+bd-ef)}$$

No pensamos demostrarla (es un farragoso pero no muy complicado ejercicio de cálculo algebraico-geométrico a partir de la Fórmula de Bretschneider) pero sí queremos usarla para nuestros propósitos actuales.

Comparando esta fórmula con la del área del cuadrilátero inscrito se *colige* que, si y solo si $e \cdot f = ac + bd$ el cuadrilátero es cíclico.

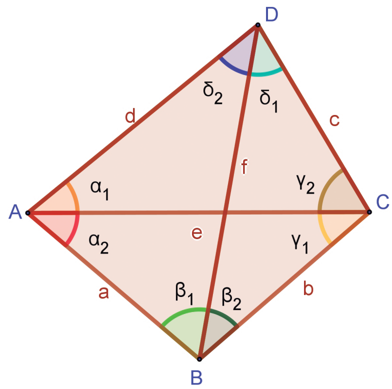


Figura 16

La geometría no se rinde tan fácilmente y responde al reto con una bonita demostración visual (5) (aunque no tan sencilla como para tildarla de «sin palabras»).

A los triángulos, $ACD$, $BCD$ y $ABD$, se les aplican homotecias de razones $f$, $d$ y $c$ respectivamente (figura 17).

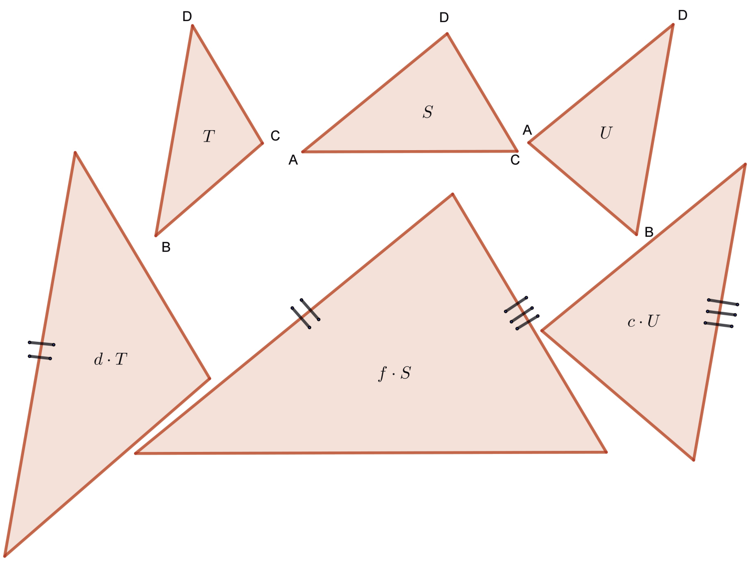


Figura 17

Los triángulos resultantes pueden ser pegados, formando un pentágono con dos lados iguales, $c \cdot d$ (figura 18).

Por otro lado, si $d \cdot b + c \cdot a = e \cdot f$, construimos el paralelogramo $QRNM$, de lados $c \cdot d$ y $e \cdot f$, siendo $MP = d \cdot b$, y $PN = a \cdot c$.

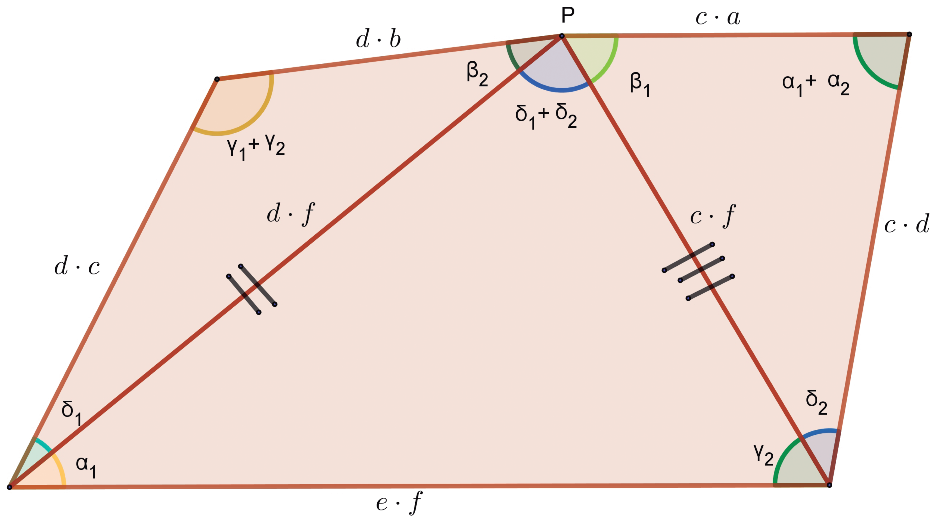


Figura 18

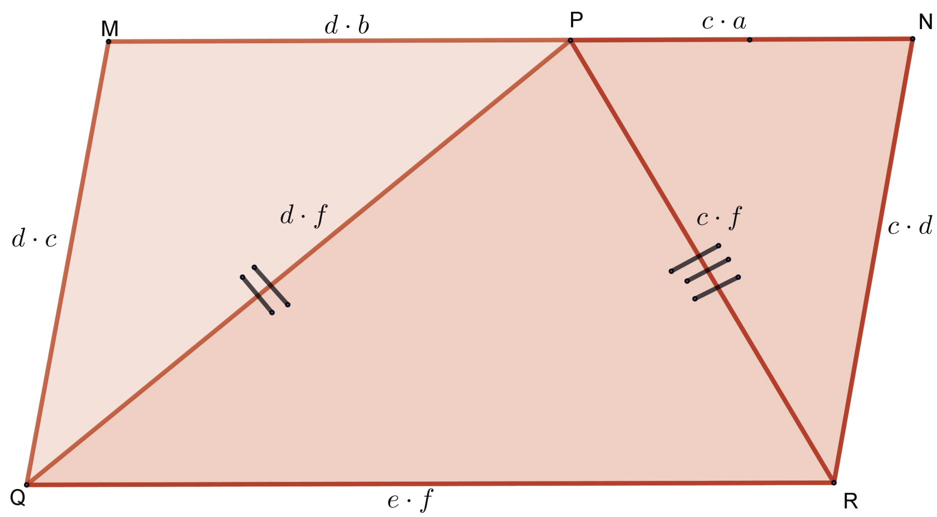


Figura 19

Si el cuadrilátero de partida es cíclico,

$$\beta_2 + (\delta_1 + \delta_2) + \beta_1 = 180^\circ$$

y el pentágono es un cuadrilátero, pero también,

$$(\gamma_1 + \gamma_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) = 180^\circ$$

y por ello el cuadrilátero es un paralelogramo, teniéndose que: $d \cdot b + c \cdot a = e \cdot f$.

Los lados de los triángulos que aparecen son los de nuestra construcción inicial, luego lo es el dibujo completo, con lo que resulta que se cumple la condición:

$$\beta_2 + (\delta_1 + \delta_2) + \beta_1 = 180^\circ$$

y el cuadrilátero es cíclico.

## Referencias bibliografícas

Boyer, C. (2003), *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 283-286.
Coolidge, J. L. (1939), «A historically interesting formula for the area of a quadrilateral», *American Mathematical Monthly,* n.º 46, 345–347.
Dunham, W. (1992), *Viaje a través de los genios*, Ediciones Pirámide, 154-176.
Herrero, J. (2012), *La Gaceta*, vol 15, n.º 2, 335-354.
— <webs.um.es/pherrero/prob_iso_1.pdf>.

Jesús García Gual
<jesusgarciagual@gmail.com>

Mercedes Sánchez Benito
*Universidad Complutense de Madrid*
<merche@mat.ucm.es>



1 Podemos ver una justificación en: <https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Constructions/Cyclic-Quadrilateral.shtml#construction>.

2 <https://brilliant.org/wiki/bretschneiders-formula/>.

3 Una demostración sencilla con cálculo diferencial <https://www.maa.org/sites/default/files/peter0901311967.pdf> (con la única pega de emplear la letra d tanto para un lado como para el operador derivada).