suma+

90 revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas · *marzo 2019*



suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas
90
marzo 2019

sumario

¿Móviles en el aula? 3-6

artículos

El ajedrez y el sudoku como recursos para el aprendizaje en la Educación Primaria
Francisco Balibrea Gallego y Davinia Soto Clares 9-16

Introducción a la programación con Scratch
Virgilio Gómez Rubio, María José Haro Delicado y Francisco Palmí Perales 17-30

Tareas que fomentan el desarrollo de la competencia STEM
Adrián Cruz Guerra y José Luis Lupiáñez Gómez 31-39

El muestreo: una idea estocástica fundamental
Carmen Batanero, Nuria Begué, María M. Gea y Rafael Roa 41-47

secciones

CreoGebra
(Sección coordinada por José Luis Muñoz Casado)
Es hora de jugar en serio
Diego Lieban y Fabián Vitabar Vaz 51-56

Mujeres matemáticas: rompiendo moldes
(Sección coordinada por Marta Macho Stadler)
Katherine Johnson, una matemática estelar con la que construir problemas
Ignacio López Mendive y Juan Miguel Ribera Puchades 57-64

Del MMACA al aula
De lo que dejan los eventos
MMACA 65-72

Crónica de una clase no anunciada
Los vestigios en pizarras de otras materias como recurso de aprendizaje matemático
Miquel Albertí Palmer **73-80**

El rincón de ESTALMAT
(Sección coordinada por Rafael Ramírez Uclés)
Protagonistas olvidados en geometría
Jesús García Gual y Mercedes Sánchez Benito **81-92**

Sí a las calculadoras
Actividades con calculadora en un entorno de resolución de problemass
Ricard Peiró i Estruch y María Teresa Navarro Moncho **93-102**

FESPM & Cía

19 JAEM. Un Atlántico que *Suma*
Comité Organizador Local **105-114**

Ángel Ramírez. Un humanista de frontera
Carlos Usón Villalba **115-117**

Seminario federal: Paseos matemáticos
Juana M.ª Navas Pleguezuelos **119-125**

Seminario federal sobre usos de las redes sociales en el aula de matemáticas
Juan Martínez-Tébar Giménez **127-136**

XIII Jornadas de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana. Innovación y Tecnología en Educación Matemática
Fernando Arenas Planelles, Òscar Forner Gumbau y José Aurelio Pina Romero **137-140**

Suma *digital <revistasuma.es>*

Vivencias matemáticas
Segmento a la deriva
Miquel Albertí Palmer

Enlaces referenciados en este número

suma+ 90
pp. 3-6

¿Móviles en el aula?

A poco de empezar el curso 2018-2019 la ministra de Educación Isabel Celaá anunció un estudio sobre el uso de móviles en la escuela. Ella misma reconocía que el debate no es fácil ya que las posiciones entre defensores y detractores están muy enfrentadas. El debate está en todo el planeta.

Francia, por ejemplo, empezó el curso poniendo en marcha un plan en el que se prohíbe el uso de móviles en el aula, en el patio, en las clases de extraescolares y en las excursiones desde la etapa infantil hasta el liceo, esto viene a ser prohibirlo para alumnos menores de 15 años. Se añade a continuación que podrá ser usado en casos concretos y delimitados por el profesor y por el centro para una determinada actividad.

El secretario de Cultura británico, encargado de la política digital, aplaudió al ministro galo y sugirió que podía ser una buena idea también para su país.

China enfoca la cuestión responsabilizando a los padres, deben controlar el tiempo que sus hijos están absortos con los móviles y con los juegos electrónicos para evitar adicciones. «El uso de productos electrónicos sin finalidades educativas no debería superar la hora diaria», proclama el Ministerio de Educación que pide a los padres que los niños y los adolescentes salgan a jugar fuera de casa sin productos electrónicos.

En Finlandia, la Agencia Nacional de Educación afirma que los móviles solo se deben utilizar en el aula con fines pedagógicos y a discreción del maestro, pero a su vez proclama que los niños tienen derecho a ser educados en competencias digitales que incluyan cuándo y cómo pueden utilizar su móvil.

El 2015, el Consejo Escolar de Cataluña aprobó el documento «Las tecnologías móviles de los centros educativos» en el que se señala la importancia de enseñar

y desarrollar la competencia digital a niños y adolescentes. «La aplicación de cualquier nueva tecnología comporta en grados diversos la reconstrucción de las reglas sociales, de las instituciones, de los roles de las personas y de sus relaciones con el entorno, que, recíprocamente, también se modifica por el efecto de la tecnología». El documento recomienda el uso regulado por las direcciones de los centros y acorde con el Proyecto Educativo.

El pasado mes de febrero, la recién creada Dirección de Innovación, Investigación y Cultura digital del Departamento de Educación de Cataluña, dirigida por Mar Camacho Martí, presentó a la comunidad educativa el *Plan mòbils.edu* con la finalidad de desarrollar un marco de cobertura de educación digital que ofrezca la adquisición de la competencia digital propia del siglo XXI en los centros del Servicio de Educación de Cataluña. El plan, elaborado bajo la coordinación de Ana Albalat Martínez, subdirectora General de Investigación y Cultura Digital,y con la colaborción de Estel Marín Cos, responsable del grupo de investigación del *Plan mòbils.edu*, se fundamenta en el Marco europeo para las organizaciones educativas con competencia digital de la Comisión Europea, está alineado con las directrices de los organismos internacionales como la UNESCO y avanza en las recomendaciones del mismo Consejo Escolar de Cataluña.

El objetivo de la propuesta es que los centros utilicen la tecnología digital y, especialmente, los dispositivos móviles como herramienta educativa estratégica para el desarrollo del currículum competencial, la educación inclusiva, la acción tutorial y la gestión de la convivencia, para promover el éxito educativo. Este objetivo desplegará propósitos específicos, entre los cuales destacan:

- Educar para la ciudadanía digital en el ámbito de los centros educativos, las familias y los agentes sociales que intervienen directa o indirectamente en la educación de niños y adolescentes en el centro, promoviendo el pensamiento crítico y estableciendo los derechos y deberes que permiten la convivencia en la sociedad digital.
- Mejorar la competencia digital del profesorado y del alumnado favoreciendo un cambio metodológico en los diferentes ámbitos curriculares mediante el uso de dispositivos móviles.
- Potenciar la adquisición de las competencias curriculares a través del uso de los dispositivos móviles.
- Posibilitar un sistema educativo inclusivo incorporando los dispositivos móviles.

El Plan es una iniciativa pionera que apuesta decididamente por el uso educativo de los dispositivos móviles. Se pondrá en marcha durante el curso 2019-2020, para docentes y alumnos de 100 centros.

De carácter voluntario y con una duración de tres años, el programa integrará centros educativos de diferente tipología de todo el territorio. En una primera fase se destinará a los alumnos de 5.º y 6.º de educación primaria y 1.º y 2.º de secundaria. En los institutos-escuela se trabajará en los cursos de 6.º de primaria

a 1.º de secundaria. En una segunda fase, y a partir del tercer año de aplicación, se extenderá al resto del alumnado del centro.

En relación a los usos prácticos del móvil en el aula, los dispositivos móviles son incomparablemente diferentes de cualquier otro recurso que nunca antes hayan utilizado los alumnos o haya estado a disposición de los centros educativos. Esta es una realidad que los centros deberán tener presente en las previsiones que hagan respecto a los teléfonos móviles y otros instrumentos digitales de tipo personal, en consonancia con su Proyecto Educativo de Centro. El uso de dispositivos móviles requiere establecer pautas claras y factibles, que los propios alumnos compartan y puedan ayudar a aplicar y actualizar. En cualquier caso, los equipos docentes y la comunidad educativa deben ser conscientes de la necesidad de tener una visión adaptable y proactiva, abierta a incorporar nuevos conocimientos y pautas de actuación y reflejarlas en sus normas de funcionamiento y organización. El Plan *mòbils.edu* se basará en un modelo BYOD (Bring Your Own Device), de modo que los alumnos podrán llevar al aula los móviles personales. Además, el Departamento de Educación facilitará dispositivos en los centros para cubrir las carencias que pueda haber. Así, se utilizarán ejemplos de buenas prácticas como podrían ser: hacer radio y televisión con dispositivos móviles para trabajar la competencia comunicativa, el móvil como herramienta de investigación, exploración y creación artística, el móvil como laboratorio



«Natusfera Biodiversity Congress»

para proyectos de ciencia o ciudadanía, la clase inversa, enfoque STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics) o aprendizaje a distancia, etc.

A través de este plan también se desarrollará una formación específica para el profesorado, incorporando nuevas modalidades que potencien el trabajo en red. A continuación se reseña un ejemplo de buenas prácticas de trabajo competencial con el uso del móvil premiado en la edición de 2018 del programa mSchools.

«Natusfera Biodiversity Congress»

Proyecto de ámbito científico tecnológico dirigido a los alumnos de 1.º de ESO. En esta propuesta se hace uso de *Natusfera*, una plataforma virtual para registrar y compartir datos naturalistas. Los alumnos aprenderán a identificar especies de la Serra de Galliners de Sant Quirze del Vallès a partir de cooperar con la comunidad de la plataforma, utilizando la aplicación para el móvil. El producto final del proyecto es presentar un estudio científico, en formato póster, en el congreso organizado por los propios alumnos, abierto al pueblo y a las familias.

Los objetivos son:

- Reconocer la biodiversidad en diferentes hábitats del entorno cercano al centro.
- Registrar y compartir observaciones de la naturaleza mediante la plataforma virtual Natusfera.
- Utilizar el método científico para hacer un estudio.
- Organizar un congreso científico y participar como ponentes presentando un póster.

Así pues, el uso del móvil en el aula se concibe como una herramienta de aprendizaje que ofrece flexibilidad en el trabajo transversal e interdisciplinar de todas las competencias a la vez que proporciona información y capacidad de generar y crear contenidos de forma motivadora. El propósito es alcanzar el aprendizaje de la competencia digital favoreciendo las otras competencias y poner en valor el papel inclusivo de la tecnología móvil. Todo ello se llevará a cabo acompañando a toda la comunidad educativa en la ya imparable transformación educativa mediante un plan diseñado y coordinado por un equipo técnico multidisciplinar liderado por la Dirección General de Innovación, Investigación y Cultura digital del Departamento de Educación que evaluará su incidencia en resultados y cohesión social.

El Plan *mòbils.edu* da un paso en el sentido de planificar el uso del móvil desde un punto de vista educativo en los centros escolares. Desde la revista *Suma* saludamos la propuesta y animamos a que se promuevan otros planes de características similares ya que como dice Olli-Pekka Heinonen, jefe de la Agencia Nacional de Educación de Finlandia, «El niño tiene derecho a ser educado en competencias digitales que incluyan cuándo y cómo puede hacer servir su móvil».

+⁺

artículos



suma+ 90
Artículos
Marzo 2018
pp. 9-16

El ajedrez y el sudoku como recursos para el aprendizaje en la Educación Primaria

Francisco Balibrea Gallego
Davinia Soto Clares

Esta propuesta didáctica tiene la finalidad de analizar el uso del ajedrez y el sudoku como recursos para mejorar las habilidades matemáticas del alumnado de 5.° de Educación Primaria. Principalmente el estudio fundamenta los beneficios del ajedrez y el sudoku en esta etapa, diseña una propuesta metodológica para trabajar en el aula atendiendo a la diversidad del alumnado y establece unas conclusiones sobre los resultados obtenidos.

Palabras clave: Ajedrez, Sudoku, Primaria, Habilidades matemáticas, Diversidad.

Chess and sudoku as resources for learning in Primary School

This didactic proposal has a purpose to analyse the use of chess and sudoku as a resource for improving the mathematical skills in the students of 5th grade of Primary School. Mainly the foundations of the benefits of chess and sudoku in this stage are laid, a methodological proposal of work in the classroom is designed responding to the students' diversity, and conclusions about the obtained results are drawn in this study.

Keywords: Chess, Sudoku, Primary School, Mathematical skills, Diversity.

Hoy en día son muchos los estudios que avalan los beneficios del juego para el niño dentro y fuera del contexto escolar ya que desarrolla habilidades cognitivas fundamentales para su desarrollo personal y social.

El juego aplicado a la enseñanza se configura como una actividad universal y que abre el paso a un tipo de aprendizaje puesto que:

— Es una actividad natural: todos sabemos jugar.
— Despierta aspectos relacionales y motivacionales.
— Favorece el pensamiento divergente y la imaginación.
— Por primera vez aprender en la escuela es sinónimo de diversión.

Según Chamoso, Durán, García, Martín y Rodríguez (2004), el juego como herramienta para el proceso educativo posee unas características que lo presentan como:

— Lúdico.
— Limitado espacial y temporalmente.
— Libre.
— Se acompaña de tensión y alegría.
— Con reglas propias.
— Produce satisfacción en sí mismo.

Artículo recibido en *Suma* en octubre de 2017 y aceptado en agosto de 2018

Sin embargo, establecer una metodología basada en la actividad lúdica no consiste en introducir un juego de manera puntual y que esté totalmente desvinculado de los aprendizajes que se van a abordar.

Se deben de tener en cuenta las dificultades que el juego puede tener en su puesta en práctica, que han sido establecidas por Corbalán (1992):

— Limitaciones financieras.
— Excesivo número de alumnos.
— Presiones psicológicas y sociales.
— Dictadura de los programas.

Estas dificultades pueden ser superadas con la gran cantidad de beneficios que el juego posee y que se pueden ver resumidas en la figura 1.

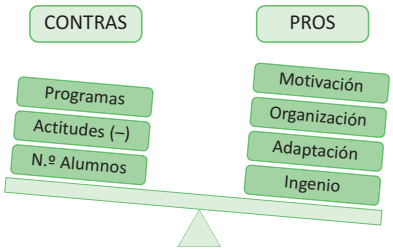


Figura 1. Pros y contras del juego en el aula

En cualquier caso son dificultades superables ya que siempre existen alternativas que permiten adaptarse a un presupuesto muy ajustado, al lugar en el que se vive, al alumnado y a las exigencias, fruto de los programas educativos.

De hecho, esta investigación pretende introducir dos recursos lúdicos que pueden estar al alcance de cualquier docente: por un lado, el ajedrez, juego de estrategia por excelencia y, por otro, el sudoku, conocido más como pasatiempo que como recurso para mejorar aprendizajes matemáticos.

Desde esta perspectiva y tal y como propone López (1997), la pedagogía del juego tiene como objetivo descubrir los recursos, lúdicos o con su apariencia, que faciliten el trabajo escolar y que este sea aceptado de buen grado por el alumno.

La finalidad última de esta investigación es la puesta en práctica de esta propuesta didáctica para comprobar realmente las virtudes de ambos recursos en primaria. Concretamente, este trabajo está dirigido al alumnado de entre 10 y 11 años de edad, de 5.º curso de Primaria, pertenecientes a un centro escolar de la Región de Murcia.

Todos estos y algunos más son los ingredientes que esta propuesta pretende utilizar en su objetivo por cambiar la forma de enseñar para mejorar la manera de aprender.

El ajedrez

Importancia del ajedrez en el área de Matemáticas

A lo largo de estos últimos años, el ajedrez se ha convertido en un recurso cada vez más extendido dentro del contexto escolar. La razón reside en la gran cantidad de beneficios que reporta al niño en su desarrollo cognitivo.

El artículo escrito por Leontxo García (2015) destaca el estudio científico de Trier (Alemania). En uno de los cursos de primaria (grupo A) se sustituyó una hora de matemáticas por ajedrez. El otro grupo, sin embargo, seguía teniendo esa hora de matemáticas. El estudio refleja que durante cuatro años consecutivos, la nota media en matemáticas del grupo A fue mejor que la del grupo B. Esto les hizo concluir la conexión entre ajedrez y capacidades matemáticas.

Salazar (1999) destaca el desarrollo de una capacidad fundamental para el aprendizaje del ajedrez y también las matemáticas: la atención. La motivación intrínseca que le supone jugar al niño, favorece desde el principio un foco de atención que de otro modo sería más difícil conseguir.

Otra capacidad importante que destaca es la anticipación. A medida que el alumno consolida las reglas del juego es capaz de anticipar movimientos, tomar decisiones y valorar sus consecuencias antes de ejecutarlos.

Decisión tras decisión, ambos jugadores componen la partida hasta llegar a su fin. Entonces, es momento de *mirar atrás* y ver qué fallos o qué aciertos se han llevado a cabo para entender el porqué de la victoria o la derrota.

En la misma línea, Fernández (2008) establece que son muchos los beneficios que el ajedrez brinda al jugador entre los que se destacan la capacidad de análisis y síntesis, la mejora en el razonamiento matemático y el fomento de la creatividad e imaginación.

Por otro lado, un aspecto muy interesante dentro de las investigaciones sobre el ajedrez es que su aprendizaje también contribuye al desarrollo de habilidades sociales.

Este ámbito de estudio lo abordaron García, Aciego y Betancort (2011) en su investigación. La propuesta se llevó a cabo en ocho centros escolares de la Isla de Tenerife. Esta muestra de alumnos asistió regularmente a clases de ajedrez como actividad complementaria durante todo un curso escolar. Para ello, aplicaron los mismos instrumentos de evaluación al comenzar y finalizar el curso.

Los resultados mostraron una notable mejoría en aspectos cognitivos como la abstracción verbal y la organización perceptiva y en aspectos socioafectivos como la satisfacción con la escuela y aceptación de sí mismo.

Otro valor importante a transmitir es la capacidad de saber ganar y perder. En palabras de Salazar (1999) «ganar es un riesgo, perder una oportunidad». El éxito en la partida puede llevar a la confianza extrema y el perder a las ganas de mejorar para volver a repetir la partida. También hay que evitar las etiquetas ya que no hay un ganador ni tampoco un perdedor absoluto en el aula: en la vida unas veces se gana y otras se pierde.

Propuesta metodológica

Las fases de la propuesta se han diseñado atendiendo a los niveles de aprendizaje del ajedrez configurados por Salazar (1999). Esta autora presenta en la página web <www.ajedrezenelaula.com>, junto con su equipo de trabajo, los ocho niveles que se desarrollan en su programa *Ajedrez en el aula*.

Cada nivel propuesto se debería trabajar en un curso escolar. Sin embargo, como el alumnado al que se dirige la propuesta no tiene formación previa, se pondrán en práctica los dos primeros niveles y se iniciará el tercero centrándose en los movimientos de las piezas (nivel 1), ejercicios de visualización (nivel 2) y solución de problemas sobre jaque mate en una jugada (nivel 3).

Por tanto, la propuesta llevada a cabo en el aula tendrá las siguientes fases:

Fase 1: ¿Qué sabemos sobre el ajedrez?			
Temporalización	1 sesión	**Materiales**	Tablero y piezas
En esta sesión se trabajará en gran grupo puesto que lo que se pretende es averiguar lo que los alumnos conocen sobre el ajedrez: piezas, reglas, tablero… a través de una lluvia de ideas. Estas ideas se apuntarán para contrastarlas al terminar la propuesta. Tras esto, se les enseñará el tablero, las piezas y su posición en el mismo.			
Fase 2: Fundamentos del ajedrez			
Temporalización	2 sesiones	**Materiales**	Tablero y piezas
En la primera sesión se volverán a presentar en gran grupo cada una de las piezas en el tablero y sus movimientos en el siguiente orden: peón, torre, alfil, dama, caballo y rey. En la segunda sesión de esta fase se establecerán algunas normas básicas como: — El movimiento excepcional del peón. — Qué significa *jaque*, *jaque mate* y *tablas*. — La llegada de un peón al final de tablero.			
Fase 3: Comienza la partida			
Temporalización	6 sesiones	**Materiales**	Tablero y piezas
Comenzarán las partidas de ajedrez poniendo en práctica los fundamentos básicos adquiridos. Al finalizar cada sesión se representarán jugadas interesantes de algunos alumnos en un tablero grande situado en la pizarra. Cada partida se jugará con un adversario diferente.			
Fase 4: Valores deportivos			
Temporalización	2 sesiones	**Materiales**	Tablero y piezas
En este momento, se analizará el comportamiento de uno mismo y de los compañeros en el transcurso del juego y al finalizar la partida, incidiendo en la importancia de *saber ganar* y *saber perder.*			
Fase 5: Cultura del ajedrez			
Temporalización	1 sesión	**Materiales**	Texto adaptado
Esta última sesión se dedicará a trabajar un texto adaptado sobre la historia del ajedrez, de dónde procede y cuál ha sido su evolución en España. La razón de hacerla al final de la propuesta es para garantizar la motivación de la lectura puesto que ya los alumnos se sentirán involucrados en este juego. Por último, comprobaremos si las ideas previas al inicio de la propuesta son verdaderas o falsas.			

Tabla 1. El ajedrez en el aula

Instrumentos de evaluación

Los principales instrumentos de evaluación de la propuesta son la escala de observación y la ficha de seguimiento de cada alumno para conocer su progreso en el aprendizaje del ajedrez a partir de los siguientes aspectos:

— Coloca el tablero correctamente.
— Respeta los turnos en la partida.
— Conoce los movimientos de las piezas.
— Logra el jaque y el jaque mate.
— Se interesa por los valores deportivos que se desprenden del ajedrez.

Puesta en práctica y conclusiones de la propuesta

La inclusión del ajedrez en el aula de 5.º curso se ha llevado a cabo en función de cada una de las fases previamente establecidas.

Las ideas iniciales sobre el ajedrez fueron pocas, más allá del reconocimiento de la mayoría de piezas y del tablero. Prácticamente todo el alumnado empezó de cero este proyecto.

Establecidas las normas generales del juego, el paso siguiente ya fue comenzar las partidas dentro del aula. Aunque semanalmente se reservaron dos sesiones de trabajo, el ajedrez se ha introducido como un elemento transversal en el día a día. Es decir, de manera complementaria se ha creado el *rincón de los juegos matemáticos* donde piezas y tablero están esperando a que los alumnos los utilicen siempre que haya un momento disponible.

Durante las ocho sesiones reservadas concretamente a las partidas de ajedrez (fases 4 y 5), hemos podido observar cómo progresivamente algunos alumnos comenzaban a configurar ciertas estrategias: no mover ninguna pieza sin pensar, no dejar desprotegido al rey, anticipar el movimiento que realizará su oponente, etc. Las estrategias incorporadas al juego se analizaban posteriormente en el tablero de la pizarra para que el resto de compañeros pudieran aprenderlas y aplicarlas.

Naturalmente, el ritmo de evolución de los alumnos no fue el mismo. En las primeras partidas había alumnos poco motivados ya que no terminaban de entender la dinámica de juego. Sin embargo, ante esta situación fue muy productivo llevar a cabo la dinámica *alumno-tutor* en la que los propios compañeros les enseñaban cómo plantear la partida.

Finalmente, se llegó a la última sesión con las nociones básicas del ajedrez adquiridas y concibiendo este juego como un recurso divertido para el alumnado. Por tanto, al trabajar un texto dedicado al origen del ajedrez, la atención de los niños estuvo más que garantizada porque sentían que era un texto vinculado a sus intereses.

Es importante destacar que dentro del aula se presentan algunos alumnos con dislexia. Realmente no fue necesario modificar la metodología de trabajo ya que:

— El uso de material manipulativo favorece la comprensión de la actividad.
— Este tipo de actividad se aleja del libro de texto por lo que no existe carga escrita.
— Al sentirse más motivados, mantienen la atención durante mayor tiempo.

De forma cuantitativa y teniendo en cuenta los ítems de estudio antes y después de la propuesta, la figura 2 muestra los resultados obtenidos.

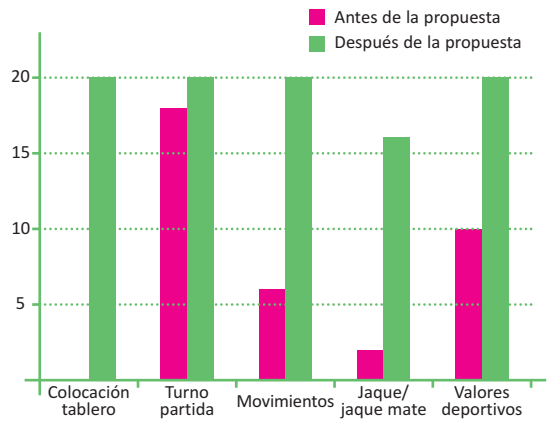


Figura 2. Gráfico comparativo sobre la evolución del alumnado en el ajedrez

Como se puede comprobar, al inicio de la propuesta ningún alumno sabía cómo colocar el tablero, apenas conocían los movimientos de las piezas, prácticamente nadie sabía qué significaba un jaque o jaque mate y la mitad del alumnado no tenía actitudes positivas hacia saber ganar y saber perder.

Sin embargo, al terminar la propuesta, la totalidad del grupo sabía cómo colocar el tablero, respetar el turno de su adversario, realizar los movimientos de cada pieza y desarrollar valores deportivos durante el transcurso de la partida. Aunque toda la clase no fue capaz de plantear una estrategia para llegar al jaque mate, ya que se detectaron ciertas dificultades, en varias ocasiones 16 alumnos consiguieron llegar a su objetivo en la partida.

Estas capacidades fomentadas gracias al ajedrez consiguieron que el alumnado mejorara en ámbitos matemáticos como:

— Capacidad de atención.
— Fomento de diferentes estrategias para resolver un problema.
— Desarrollo de la dinámica alumno-tutor.
— Anticipación de algunos resultados.
— Realización de estimaciones.

Por supuesto, haber acabado este módulo dentro de la propuesta no implica que el ajedrez abandone el aula, de hecho, seguirá siendo un recurso transversal que permita adaptarse a los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado.

El sudoku en el aula de Educación Primaria

Importancia del sudoku en el área de Matemáticas

A diferencia del ajedrez, el sudoku no es un recurso tan extendido en el ámbito escolar. Por ello, la primera cuestión a resolver sobre este recurso es: ¿puede ser el sudoku un recurso educativo?

Generalmente, el sudoku se ha concebido como un pasatiempo vinculado a los adultos. Prácticamente no se han encontrado investigaciones sobre su puesta en práctica en el aula. Sin embargo, estas son algunas de las capacidades basadas en las conclusiones expuestas por Portellano y presentadas en el artículo de Olivares (2014):

— *Gran poder motivador:* al ser planteado a modo de juego incrementa considerablemente el interés del alumnado por su resolución. Portellano afirma lo siguiente: «mientras se juega a resolver un sudoku se liberan endorfinas, produciendo bienestar en la persona».
— *Adaptación a las capacidades del alumnado:* una de las ventajas de este juego matemático es que no necesita grandes habilidades cognitivas ni lingüísticas pero sí ayuda al desarrollo de las mismas. Esto es debido a que sus reglas son muy fáciles de entender y permite graduar su nivel de dificultad.
— *Mejora la memoria y las estrategias de razonamiento:* el sudoku no es un juego de probabilidad, es decir, no se trata de ir probando números para llegar a su solución, por tanto, el niño tiene que memorizar la posición de los números o pictogramas para ir construyendo sus propias estrategias de razonamiento.
— *Desarrollo de los dos hemisferios cerebrales:* al iniciarse en la práctica del sudoku se trabajan habilidades propias del hemisferio izquierdo como la lógica, el razonamiento y el análisis. Sin embargo, cuando se progresa en los niveles de dificultad se fomentan capacidades vinculadas al hemisferio derecho como el reconocimiento y la intuición. También previene el deterioro de ambos hemisferios ya que obligan a utilizar estrategias de razonamiento, memoria, atención y lógica.
— *Fomenta actitudes positivas hacia el aprendizaje:* la paciencia y la confianza con los números favorece en el alumno la concentración que se precisa para dar un paso más en la numeración, el cálculo.

Becerra, Núñez y Perea (2006), apuntan que posiblemente fue el matemático Leonhard Euler en el siglo XVIII su creador a partir de sus denominados *cuadrados latinos*. Gracias a este tipo de cuadrado nace el sudoku. Es más, podría decirse que el sudoku es un cuadrado latino de orden 9. Tanto desde el planteamiento como en la resolución, se fomentan habilidades propias del ámbito matemático como son la familiarización con los números, el desarrollo de habilidades intuitivas para establecer estrategias, el razonamiento deductivo y la generalización.

Propuesta metodológica

La propuesta para trabajar el sudoku en el aula sigue un patrón similar a la expuesta en el apartado dedicado al ajedrez y se divide en las siguientes fases:

Fase 1: ¿Qué sabemos sobre los sudokus?	
Temporalización 1 sesión	**Materiales** No necesarios
En esta primera sesión se realizará una lluvia de ideas para conocer realmente si los alumnos saben qué es un sudoku, si lo relacionan con colocar números en un cuadrado o si, alguna vez, han visto uno en un periódico, revista…	
Fase 2: Fundamentos del sudoku	
Temporalización 1 sesión	**Materiales** Sudokus de orden 4
En esta sesión inicial se establecerán las normas básicas de un sudoku, incidiendo en que, además de no poder coincidir el mismo número en ninguna fila o columna, tampoco pueden repetirse en la misma subcuadrícula. Dentro de esta sesión también realizarán sudokus de orden 4 para una primera toma de contacto.	
Fase 3: Comienza el juego	
Temporalización 2 sesiones	**Materiales** Sudokus de orden 9
Durante estas cuatro sesiones se les presentarán a los alumnos sudokus convencionales, es decir, de orden 9, con un progresivo nivel de dificultad con el fin de establecer estrategias básicas como completar celdas de manera directa o barajar posibles opciones antes de elegir la opción definitiva. Si durante la resolución de los sudokus algún alumno tiene dificultades, se ubicará con otro compañero para superar el problema. Al finalizar cada sesión, se resolverá un sudoku en la pizarra digital entre todos para analizar las estrategias utilizadas.	
Fase 4: Los cuadrados mágicos	
Temporalización 2 sesiones	**Materiales** Cuadrados mágicos
Para enriquecer la propuesta en estas sesiones se presentarán cuadrados mágicos. Se trata de cuadrados de 3x3 en los que sus filas, columnas y diagonales deben sumar el mismo número. Esta actividad se realizará en parejas.	
Fase 5: Cultura del sudoku	
Temporalización 1 sesión	**Materiales** Texto adaptado
Por último, el módulo finalizará con un texto adaptado sobre el sudoku. La finalidad del mismo será relacionar este juego matemático con su historia para que el alumnado pueda conocer al matemático Leonhard Euler e incluso identificar cuadrados mágicos en obras de arte. Por último, comprobaremos si las ideas previas al inicio de la propuesta son verdaderas o falsas.	

Tabla 2. El sudoku en el aula

Instrumentos de evaluación

Los instrumentos utilizados para la evaluación del sudoku como recurso en el aula son la escala de observación y la ficha de seguimiento de cada alumno para conocer su progreso. Se han tenido en cuenta los siguientes aspectos:

— Conoce las reglas básicas.
— No rellena de forma aleatoria las subcuadrículas.
— Ubica estratégicamente los posibles números que pueden ir en una misma celda determinando el definitivo por descarte.
— Completa cuadrados mágicos.
— Insiste en la resolución tanto de sudokus como cuadrados mágicos.

Puesta en práctica y conclusiones de la propuesta

El sudoku se ha introducido en el aula de 5.º siguiendo las fases anteriormente comentadas.

La lluvia de ideas inicial determinó que todos los alumnos sabían que *existía un pasatiempo llamado sudoku* pero, tan solo dos alumnos conocían cuáles eran sus reglas básicas, aunque no habían practicado mucho. Por tanto, en general todo el grupo casi partía de cero.

Tras esta sesión comenzamos con la realización de un sudoku de nivel cero (sudoku de 4×4). La idea era que la facilidad de este tipo de sudoku introdujera al alumnado en la dinámica. La impresión obtenida fue muy interesante puesto que a todo el grupo les pareció un sudoku *demasiado sencillo* y querían enfrentarse a un *sudoku de verdad*.

En las siguientes sesiones se presentaron sudokus de nivel 1 en los que en alguna fila, columna o subcuadrícula tan solo faltaba un número para ser completado y, al rellenar este, de nuevo ocurría lo mismo.

Superado este nivel, empezaron a trabajar sudokus en los que no bastaba con colocar un solo número, había varias posibilidades en función del resto de columnas o filas. En este momento comenzamos a trabajar la *estrategia de descarte*, es decir, los alumnos ponían en una misma celda los posibles números y, posteriormente, miraban el resto de columnas o filas para comprobar que no se repitiera ningún número, descartando así uno de los candidatos. En este momento de la propuesta hubo algunos alumnos que se desanimaron porque el sudoku ya no tenía una resolución directa y no acababan de comprender la nueva estrategia.

La manera de afrontar esta situación fue trabajando por parejas con el fin de poner en práctica la dinámica *alumno-tutor*. A modo de competición, los niños ubicados por parejas tenían que resolver el sudoku. La distribución de las parejas fue equilibrada, intentando situar al alumno con más dificultades con un compañero que ya tuviera adquirida la estrategia.

Cuando ya percibimos que la resolución de sudokus adaptada a su nivel estaba más que adquirida, el siguiente paso fue incluir *cuadrados mágicos*. Estos fueron de un nivel básico (3x3). Primero se les presentó el número final que debían sumar las filas, columnas y diagonales. Los alumnos se fueron dando cuenta de que al completar algunas celdas, el resto se iban rellenando fácilmente. También se trabajaron por parejas para que, una vez más, los alumnos que tuvieran ciertas dificultades pudieran ser orientados por sus compañeros.

Los datos recogidos del antes y el después se reflejan en el gráfico que muestra la figura 3:

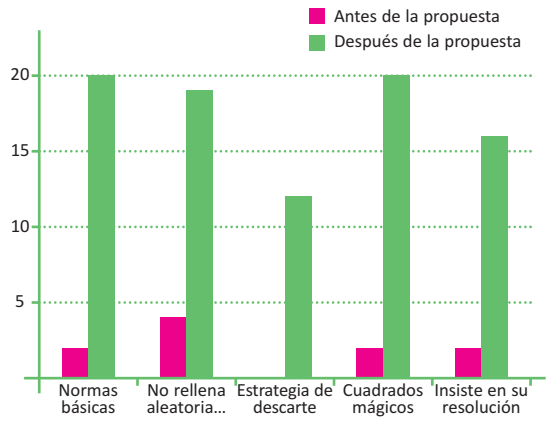


Figura 3. Gráfico comparativo sobre la evolución del alumnado en el sudoku

Tal y como refleja el gráfico, al inicio de la propuesta, aunque las normas del sudoku fueron planteadas de manera clara, la mayoría del alumnado rellenaba aleatoriamente las celdas sin seguir ninguna estrategia. Además, la insistencia para resolverlo decaía en casi todos los alumnos puesto que todavía no habían interiorizado las normas.

Sin embargo, tras varias sesiones, el interés fue incrementándose y la puesta en práctica de estrategias básicas para su resolución, principalmente la denominada *estrategia de descarte*, se fue extendiendo y, por tanto, el éxito en su resolución también. Además, la actitud positiva se incrementó en la resolución de cuadrados mágicos ya que, dado su nivel de dificultad, el alumnado los abordó por parejas. Esto permitió transformarlo en un juego por equipos, garantizando así, la motivación ante su resolución.

Ya que en la configuración global de toda la propuesta se ha tenido muy en cuenta la evolución del alumnado con dislexia en cada uno de los recursos, es necesario destacar los siguientes aspectos:

— El alumnado, aunque trabaja con números, para él se trata de símbolos (como podrían ser corazones, rombos, triángulos…) por lo que de manera visual podía completar fácilmente filas, columnas y subcuadrículas.
— Emocionalmente los resultados fueron favorables ya que en todo momento el alumnado se sentía integrado con el resto de la clase.
— En la resolución de los cuadrados mágicos, realizarse por parejas, evitó la frustración del alumnado ante posibles dificultades de cálculo y favoreció una actitud positiva.

Además, pudimos comprobar cómo de manera directa el trabajo con los números, el desarrollo de estrategias como el descarte y la práctica del cálculo mental contribuyeron a un mejor aprendizaje dentro del área de Matemáticas, principalmente en los siguientes aspectos:

— Puesta en práctica de diferentes alternativas en la resolución de un problema seleccionando la más adecuada.
— Revisión de los pasos dados en un problema.
— Mejora en el trabajo de cálculo mental.
— Actitud positiva ante los números.
— Aplicación de la dinámica alumno-tutor.

Por último, tras el desarrollo de la propuesta, los sudokus también formaron parte del rincón de los juegos matemáticos para seguir trabajándolos como un recurso transversal y lúdico en el aula.

Para terminar…

En definitiva, tras la puesta en práctica de la propuesta podemos afirmar que tanto el ajedrez como el sudoku son dos recursos muy enriquecedores para trabajar en el aula. Gracias a ellos, los niños han fomentado habilidades básicas para su formación matemática de una manera más divertida.

Los alumnos han aprendido a analizar una situación problemática, elegir la solución más adecuada y revisar sus estrategias una vez utilizadas. También han jugado con el compañero con respeto, regulando sus emociones y aprendiendo que cuando encontramos alguna dificultad en el camino, pedir ayuda es una muy buena opción.

Es cierto que durante la propuesta se han presentado momentos en los que algunos alumnos se han sentido más desmotivados que otros ya que se encontraban perdidos. Es en ese instante en donde el docente debe parar y reorientar la situación. La escuela supone adaptarse a la diversidad del alumno para que pueda desarrollar al máximo sus capacidades. Por ello, la dinámica alumno-tutor ha servido para que el alumno con dificultades pueda unirse al resto de sus compañeros desde una situación de igual a igual.

La elección del sudoku y el ajedrez también ha ayudado al alumnado con dislexia a sentirse integrado en el aula. Como se ha comentado en epígrafes anteriores, el alumno se enfrenta a situaciones reales, no solo centradas en un libro de texto. Necesita manipular, probar, rectificar y reorientar su posición desde la práctica. Este tipo de actividades contribuyen a una mejor comprensión del problema.

El juego en el aula ofrece al niño un escenario en el que sentirse cómodo y motivado. Se trata de adaptar el contexto escolar a su realidad, creando situaciones controladas en las que alcance sus metas, en las que pueda equivocarse y, lo más importante, en las que pueda aprender de sus errores; como la vida que le espera tras las puertas de la escuela.

Desde esta propuesta, incluir el juego en el día a día del aula no consiste en transformarlo en una asignatura que haya que evaluar con sus elementos curriculares. Se entiende como una forma de crear el escenario ideal para que el alumno pueda aprender de una manera integradora.

Finalmente como docentes hemos logrado enseñar habilidades matemáticas desde una perspectiva más lúdica, más allá de los libros de texto y adaptarnos a sus necesidades creando un entorno en donde el maestro disfruta enseñando y el alumno aprendiendo.

Referencias bibliográficas

Becerra, A., J. Núñez y J. M. Perea (2016), «¿Cuánta Matemática hay en los sudokus?», *Pensamiento Matemático*, n.º 1, 113-136.

Chamoso, J. M., J. Durán, J. F. García, J. Martín y M. Rodríguez (2004), «Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas», *Suma*, n.º 47, 47-58.

Corbalán, F. (1992), «Los juegos en la enseñanza de las matemáticas», *Aula de innovación educativa*, n.º 7, 37-41, <http://aula.grao.com/revistas/aula/007-juego-y-curriculo-escolar—dinamica-de-grupos/los-juegos-en-la-ensenanza-de-las-matematicas>.

Fernández, J. (2008), *Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la enseñanza de las matemáticas. Estudio de sus efectos sobre una muestra de alumnos de segundo de primaria*, Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. <https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2008/tdx-1215108-111407/jfa1de1.pdf>.

García, L. (2015), «Ajedrez para enseñar a pensar», *El País,* 13 de febrero de 2015, 40.

García, L., R. Aciego y M. Betancort (2011), «Los beneficios de la práctica del ajedrez en el enriquecimiento intelectual y socioafectivo en escolares». Universidad de la Laguna (Tenerife). <https://es.chessbase.com/portals/0/files/images/2012/ Leontxo/TBAH/El%20trastorno%20por%20d%C3%A9ficit%20de%20atenci%C3%B3n%20con%20hiperactividad.pdf>.

López, R. (1997), *El juego como recurso educativo*, Universitat de València, Valencia.

Olivares, P. (2014), «Sopa de letras y otros pasatiempos, puzzles para el cerebro», Efesalud.com, 12 de agosto de 2014, Madrid. <www.efesalud.com/noticias/pasatiempos-puzzles-para-el-cerebro/>.

Salazar, A. (1999), *Juega el maestro y ganan los niños*, Fundación M. Pilar Mas, Barcelona.

Francisco Balibrea Gallego
Universidad de Murcia
<balibrea@um.es>

Davinia Soto Clares
CEIP Vista Alegre (Las Torres de Cotillas, Murcia)
<daviniasotoclares@gmail.com>

suma+ 90
Artículos
Marzo 2019
pp. 17-30

Introducción a la programación con Scratch*

Virgilio Gómez Rubio
María José Haro Delicado
Francisco Palmí Perales

En este artículo describimos el entorno de programación Scratch y cómo puede ser utilizado en el aula. Entre las muchas características de este software libre, destacamos su entorno interactivo y visual, que facilita la creación de programas a los alumnos. Los programas operan sobre una serie de imágenes ubicadas en un entorno. La creación de programas se realiza mediante el ensamblaje de bloques que representan operaciones sencillas, como mover la imagen, emitir un sonido, etc., de manera que los alumnos pueden crear sus propias historias.

Palabras clave: Scratch, Programación, Algoritmo, Entorno visual, Lenguaje de programación.

Introduction to programming with Scratch

In this paper we describe the programming language Scratch and how it can be used in the classroom. Among its many characteristics, we highlight its interactive and visual environment, which makes it easy for the student to write programmes. Programmes operate on a number of images within a stage. These programmes are created by assembling different blocks which represent simple operations, such as moving the image, making a noise, etc., in a way that allows students to develop their own stories.

Keywords: Scratch, Programming, Algorithm, Visual environment, Programming language.

Scratch es un lenguaje de programación visual que permite a niños y jóvenes adentrarse en el terreno de la programación y familiarizarse con conceptos clave de las ciencias de la computación como si de un juego se tratase. Funciona a base de piezas o bloques que representan distintas operaciones y que se encajan como en un puzle. Mediante el desarrollo de pequeños *programas* que aumentan su complejidad de manera natural según se avanza, los estudiantes son capaces, no solo de aprender conceptos y procedimientos propios del terreno de la computación, sino que, además, adquirirán habilidades y serán capaces de desarrollar estrategias que les serán útiles en cantidad de situaciones cotidianas.

Su interfaz gráfica y atractiva permite interactuar desde el principio y obtener resultados llamativos con muy pocos conocimientos de programación. Siguiendo la lógica y la intuición, los estudiantes podrán desarrollar pequeños programas y aplicaciones, lo que constituirá una fuente de motivación importante y favorecerá la creatividad y el autoaprendizaje. La práctica permitirá progresar desarrollando aplicaciones más depuradas desde el punto de vista sintáctico y con estructuras más complejas, en las que aparezcan conceptos avanzados, como el de recursividad. Por otro lado, se promueve el aprendizaje colabo-

Artículo recibido en *Suma* en enero de 2018 y aceptado en julio de 2018

rativo, ya que los chicos pueden compartir sus trabajos y programas con sus compañeros de clase. A la vez, se les prepara para el futuro en un mundo que demanda, cada vez más, gente preparada en el terreno de la programación y la computación.

¿Por qué es importante que los niños tomen contacto con la programación desde muy jóvenes?

Los niños, lo queramos o no, son grandes consumidores de tecnología. Desde muy pequeños manejan móviles, tablets e incluso ordenadores con total naturalidad y vale más que sean productores activos que consumidores pasivos de tecnología. La tecnología está dando forma al mundo actual y lo hará todavía más en el futuro resolviendo gran variedad de problemas en todo tipo de situaciones y áreas. Programando, los niños desarrollarán habilidades propias del pensamiento computacional como lo son el pensamiento lógico y la capacidad de abstracción; aprenderán a llevar a cabo tareas de diversa índole de una manera clara y precisa, dividiendo los problemas en partes que se resuelven de una en una y después se ensamblan para alcanzar un objetivo; aprenderán a detectar y corregir errores y a descubrir patrones. Estas son habilidades transversales necesarias en cualquier terreno cotidiano en que nos movamos. El objetivo no es que los niños aprendan a programar, sino que aprendan programando.

Antecedentes

Tomar contacto con la programación desde edades muy tempranas no es algo nuevo. Encontramos antecedentes en el uso de lenguajes de programación como Logo, que durante los años 70 y 80 enseñó a niños, y también a mayores, a dar sus primeros pasos en el mundo de la informática y de la programación. Las características de este lenguaje lo hacían particularmente útil en el aprendizaje de las matemáticas y, más concretamente, de la geometría. Se planteaban retos que tenían que resolverse mediante el desarrollo de pequeños programas. La tortuga se convertía en una poderosa aliada que animaba a pensar y a detectar y depurar errores. La figura 1 muestra un ejemplo del entorno de programación proporcionado por Logo, en el que se puede apreciar la tortuga que realizará las acciones programadas por el usuario.

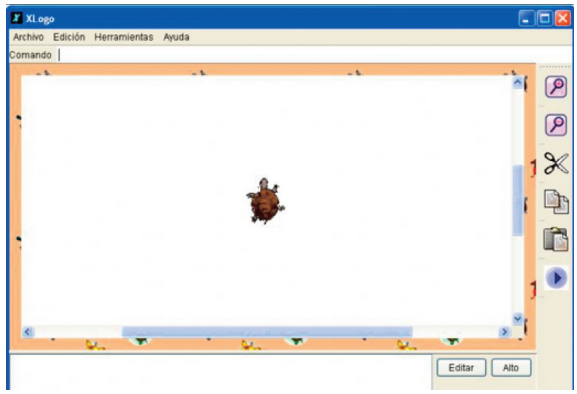


Figura 1. Ejemplo de sesión
del entorno de programación Logo

¿Por qué Scratch?

Scratch ha sido desarrollado por el grupo Lifelong Kindergarten del MIT (Instituto Tecnológico de Massachusetts, EE.UU.) con el único propósito de enseñar a los niños a programar. Se puede trabajar con Scratch online, o bien descargándolo de la dirección <https://scratch.mit.edu>.

Entre las ventajas que ofrece Scratch para trabajar con niños y adolescentes se encuentran:

- Se descarga con facilidad y se puede trabajar con él en cualquier sistema operativo.
- Es un lenguaje de programación libre con el que se pueden crear historias interactivas, juegos y animaciones.
- Los programas operan sobre objetos llamados *personajes* (representados por imágenes) que interactúan entre ellos en un entorno llamado *escenario*. Poder ver actuar a los personajes en el escenario ayuda a comprobar en el acto el funcionamiento



Figura 2. Ejemplo de *personaje* disponible en Scratch

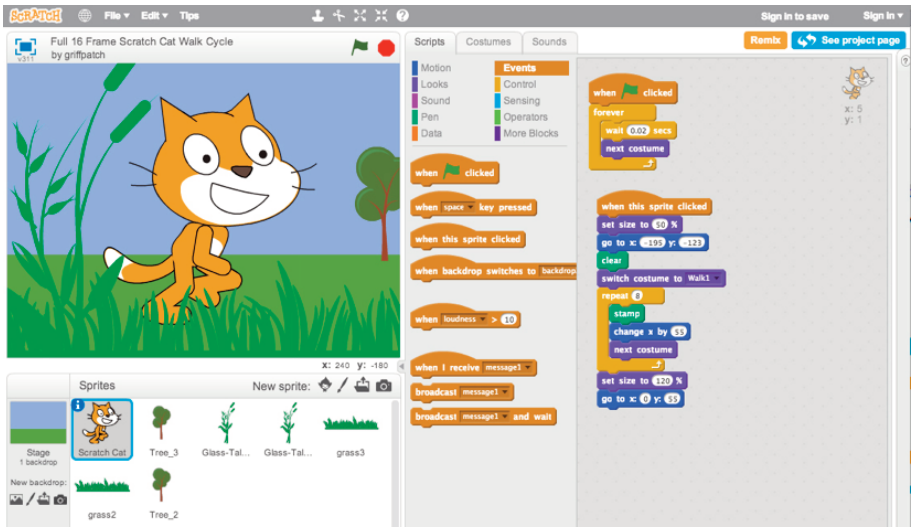


Figura 3. Ejemplo del entorno de programación de Scratch con varios *personajes* en el *escenario* (izquierda) y los bloques del programa desarrollado (derecha)

de las instrucciones y a depurar errores cuando los resultados no son los esperados. La figura 2 muestra la imagen del *personaje* que aparece por defecto en Scratch, aunque es posible elegir muchos otros.

— Es un lenguaje visual. Los programas se crean arrastrando y soltando bloques, como si de un puzle se tratara, en vez de usar comandos. Algunos de los errores se detectan inmediatamente al intentar encajar bloques que no deberían unirse. La imposibilidad de cometer cierto tipo de errores ayuda a centrar la atención en la resolución del problema. La figura 3 muestra un ejemplo del entorno de Scratch en el que se pueden ver varios *personajes* en el *escenario* y un ejemplo de programa construido a base de bloques con distintas operaciones.

— El entorno es multimedia, lo que quiere decir que hay bloques que sirven para producir sonidos, usar el teclado o el ratón o incluso usar la *webcam*. De esta manera se pueden crear historias animadas de forma fácil y rápida.

— Los usuarios pueden compartir sus creaciones con otros miembros de la comunidad Scratch, comentar el trabajo de los demás y recibir sus comentarios y usar las ideas y código de otras personas, como fuente de inspiración en el desarrollo de sus propias creaciones.

Dos principios básicos

A la hora de presentar el uso de Scratch a los alumnos trabajaremos con dos conceptos fundamentales:

— Algoritmo: Es la secuencia ordenada de pasos que necesitamos seguir para resolver un problema.

— Codificar: Después de desarrollar el algoritmo hay que escribirlo en un lenguaje que el ordenador entienda. A ello se le llama codificar.

Además, al proceso de crear algoritmos y codificarlos se le llama programar.

Describiendo el entorno

Para trabajar con Scratch tenemos dos opciones:

— Descargar el programa y trabajar sin conexión.

— Ir directamente a la página web de Scratch <https://scratch.mit.edu> y trabajar usando el editor on-line.

Si optamos por esta segunda modalidad solo necesitamos hacer clic en Crear para comenzar una nueva sesión y desarrollar un programa nuevo, tal y como puede apreciarse en la figura 4, que muestra la web de inicio de Scratch.



Figura 4. Editor on-line de Scratch disponible en <https://scratch.mit.edu>

La ventaja de trabajar de esta segunda forma es que tendremos acceso a nuestros proyectos en cualquier lugar en el que dispongamos de conexión a Internet. De todas formas, si preferimos descargarlo podemos ir a la parte final de la página y pinchar en Editor sin conexión, tal y como se puede ver en la figura 5.



Figura 5. Pie de la web de Scratch desde la que se puede descargar el editor de Scratch pinchando en Editor sin Conexión

Después de pinchar en Crear, nos encontraremos un entorno como el que aparece en la figura 6. El área de la izquierda es el escenario y ahí es donde podremos observar los efectos del programa que realicemos. Además, aparece un menú en el que seleccionar el fondo del escenario y el *personaje* a utilizar. Durante el desarrollo de programas es posible utilizar varios *personajes* e incluso cambiar su apariencia.

En la parte de la derecha es donde podemos encontrar los distintos bloques con los comandos de programación, los diferentes *personajes* y sonidos disponibles, así como un área en la que poder combinar los distintos bloques para elaborar el programa. Estos bloques están divididos en grupos

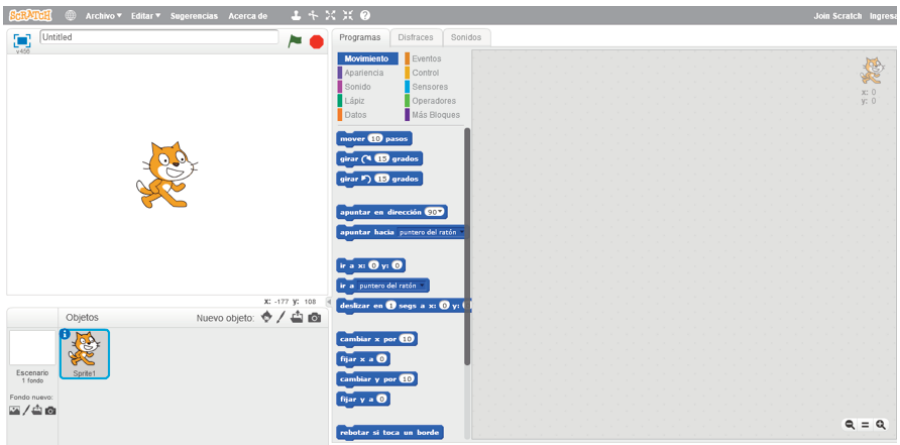


Figura 6. Inicio del editor de Scratch

en un menú, dependiendo de su función, y cada grupo aparece representado por un color distinto dependiendo de su funcionalidad. Por ejemplo, los bloques que se refieren a los comandos de movimiento del *personaje* aparecen representados en azul, los que tienen que ver con la apariencia del *personaje* en violeta, etc.

Podemos cambiar el escenario blanco por diferentes fondos que podremos obtener de la biblioteca de Scratch o que crearemos nosotros. Vamos a pinchar en la Librería y a seleccionar uno de ellos, tal y como aparece indicado en la figura 7.



Figura 7. Pinchando sobre el icono de escenario se puede acceder a la biblioteca de fondos para el *escenario* de Scratch y escoger otro más apropiado a nuestras necesidades

De los muchos que hay, vamos a escoger, por ejemplo, «school 1» que se refiere a un fondo que representa la parte delantera de una escuela. Podremos observar que la situación cambia en la imagen de la figura 8.

El escenario mide 480 unidades de ancho y 360 de alto. Está dividido en una cuadrícula representada por puntos de coordenadas (x, y). Las coordenadas del punto central son (0, 0). Para averiguar la posición de un punto dentro del escenario basta con pasar el ratón por encima y

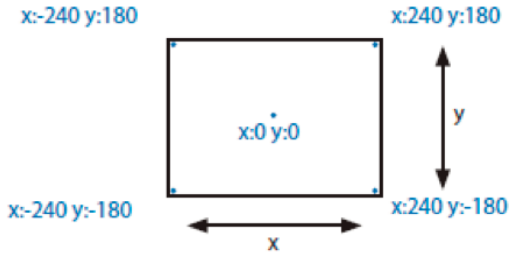


Figura 9. Representación de las dimensiones del escenario de Scratch, así como de las coordenadas de sus límites

ver las coordenadas que se muestran en la parte inferior derecha del escenario. La figura 9 muestra las dimensiones del rectángulo que define el escenario y de las coordenadas de los cuatro puntos que marcan sus límites. El uso de estas coordenadas puede ser útil, por ejemplo, a la hora de ubicar o desplazar el *personaje* durante el desarrollo de un programa.

Como ya se ha mencionado con anterioridad, a los objetos que creemos con Scratch se les llama *personajes*. Al empezar, nos encontraremos con la mascota de Scratch (un gato, que aparece en la fgura 2), pero también podemos crear nuestros propios objetos o seleccionarlos de nuevo de la biblioteca de Scratch pinchando en el símbolo que aparece indicado en la figura 10.



Figura 10. Pinchando en el símbolo señalado podemos seleccionar el *personaje* que usaremos en el programa

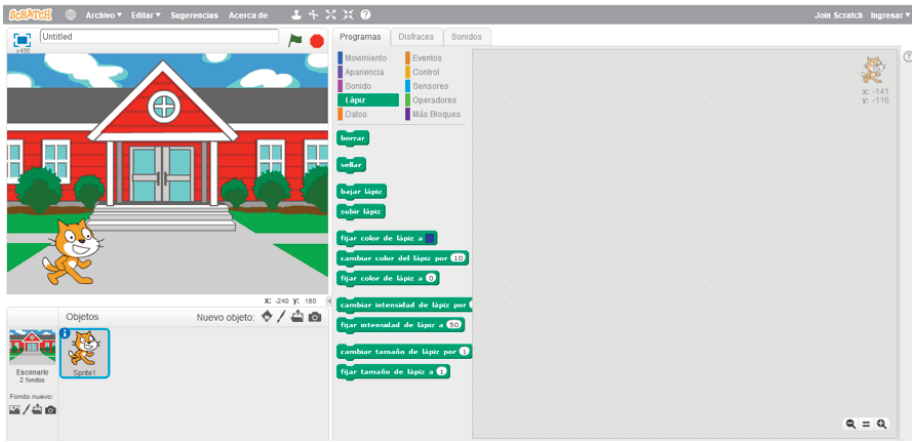


Figura 8. Entorno de Scratch al cambiar el fondo del *escenario* usando el llamado «school 1»

Vamos a controlar los movimientos, y el comportamiento en general, de nuestro objeto arrastrando y soltando bloques que están organizados por categorías: **Movimiento, Apariencia, Sonido, Lápiz, Datos, Eventos** (para indicar cuando se deben ejecutar determinados bloques de código), **Control, Sensores, Operadores, Más bloques** (para crear nuestros propios bloques).



Figura 11. Listado de los grupos de bloques de comandos disponibles en Scratch

Para actuar sobre un objeto, hacemos clic sobre él y a continuación arrastramos bloques al área de código (parte derecha de la figura 6), conectándolos entre sí. Generalmente, empezaremos con el bloque de inicio de programa, que aparece en la figura 12. Este bloque hace que se inicie la ejecución de un programa al pinchar la bandera verde que aparece en la parte derecha del entorno de Scratch.



Figura 12. Bloque que marca el inicio de un programa

Si se comete un error en la creación del programa, es posible separar los bloques en el área de código y arrastrarlos al área de bloques (parte central en la figura 6) o se hace clic con el botón derecho sobre el bloque que se quiere borrar, marcando borrar en el cuadro de diálogo que se despliega.

La figura 13 muestra un ejemplo de programa en el que se han seleccionado dos bloques de movimiento. El primero hace girar el *personaje* 90 grados, mientras que el segundo le hace avanzar 40 pasos. Estos valores se pueden modificar pinchando sobre ellos en los bloques que se han colocado en el programa.

Hay *disfraces* para los objetos, lo que quiere decir que podemos cambiar su apariencia cuando actúan sobre el escenario. La figura 14 muestra un programa más complejo en el que el *personaje* cambia de aspecto y realiza una serie de acciones más, como moverse, decir «Buenos días», cambiar de posición, volver a cambiar de aspecto y emitir un maullido. Para hacer que el programa se ejecute, presionaremos sobre la bandera verde.



Figura 14. Pequeño programa para cambiar la apariencia de un *personaje* y que realice varias acciones más

Si queremos guardar nuestro proyecto, le asignaremos un nombre y haremos clic sobre **descargar a tu computadora** (ver figura 15).

Si estás registrado, en el menú archivo aparecerán más opciones. En este caso, haz clic en **Guardar ahora**, tal y como aparece en la figura 16.



Figura 13. Ejemplo de programa para girar el *personaje* 90 grados y hacerlo avanzar 40 pasos

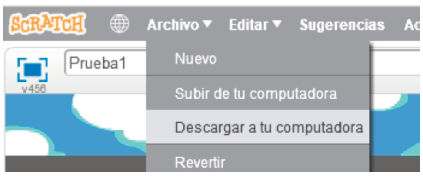


Figura 15. Menú para la descarga del programa realizado cuando se usa el editor on-line



Figura 16. Opción de guardar un trabajo on-line para usuarios registrados

Al guardar de esta última forma, el proyecto se guarda en Mis cosas. Podemos acceder a él desde Archivo > Ir a mis cosas (ver figura 17).

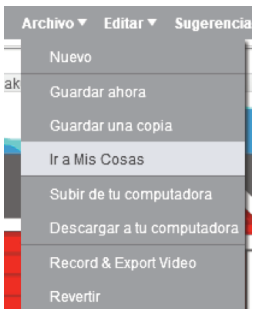


Figura 17. Acceso a trabajos guardados para usuarios registrados

Si se hace de esta forma, podremos compartir nuestro proyecto y cualquier miembro de la comunidad Scratch podrá verlo. También podremos nosotros acceder a otros proyectos e incluso ver su código para ayudarnos en nuestro trabajo.

Más sobre bloques

Como ya se ha comentado, los bloques están agrupados en 10 grupos distintos que podemos identificar por el color (ver figura 11). Hablaremos muy brevemente de cada uno de dichos grupos:

- Grupo de movimiento: Son instrucciones que nos permitirán mover al objeto, girarlo en el sentido de las agujas del reloj y en el contrario, colocarlo en posiciones concretas, determinadas por coordenadas, rebotar al tocar un borde, etc.
- Grupo de apariencia: Estas instrucciones permiten cambiar la apariencia escogiendo nuevos disfraces, aumentando o disminuyendo, de una o gradualmente, el tamaño inicial del objeto, poniendo el objeto en la capa especificada, estableciendo efectos de color, escondiendo, enviando al frente, etc.
- Grupo de sonido: Permiten tocar sonidos, establecer el instrumento, cambiar el volumen, cambiar el tempo, etc.
- Grupo de lápiz: Permite bajar y subir lápiz, borrar, fijar el color del lápiz, cambiar la intensidad, el grosor del trazo, etc.
- Grupo de datos: Nos permite crear y trabajar con variables.
- Grupo de eventos: Contiene el bloque de inicio (figura 13) y, en general, bloques que indican acciones que se desencadenarán cuando se den determinadas situaciones como el aumento de un sonido, presionar el espaciador, recibir o enviar un mensaje, al hacer clic en un objeto, cuando el fondo cambie, etc.
- Grupo de control: Con estas instrucciones se detectan acciones realizadas por otros objetos y se actúa ante ellos. También se ejecutan determinadas acciones según se presione o no una determinada tecla. Procesos iterativos y recursivos se pueden llevar a cabo usando las instrucciones de este bloque, ya que es posible repetir acciones o actuar de una manera u otra por medio de los condicionales.
- Grupo de sensores: Estas instrucciones permiten detectar si hay teclas presionadas, si los objetos están tocando bordes o colores determinados, se puede leer la posición del ratón, medir la distancia al puntero del ratón, preguntar algo y esperar la respuesta, que se almacenará en una variable, etc.
- Grupo de operadores: Las instrucciones de este bloque permiten realizar operaciones

lógicas, operaciones matemáticas básicas como sumar, restar, multiplicar o dividir, calcular raíces cuadradas, y generar números al azar entre otras cosas.

— Grupo Más bloques: Permite crear nuevos bloques y extensiones que representen comandos de programación nuevos construidos a partir de otros más sencillos.

Algunos ejemplos

Presentándonos

Imaginemos que dos personas se encuentran sobre el escenario y se saludan preguntándose cómo se llaman.

Seleccionemos primero un escenario, haciendo doble clic sobre Escenario nuevo. Se abrirá una página como la de la figura 18, y en ella seleccionaremos el escenario que más se adapte a lo que queremos.

A continuación, seleccionamos y añadimos al escenario los dos objetos que van a representar el papel de personas que se encuentran y saludan. Esto lo haremos haciendo doble clic en Nuevo objeto (ver figura 10) y seleccionando los que más nos gusten. Nosotros hemos seleccionado los de un chico y una chica. Dentro de la pantalla que se abre, utilizaremos el código de la figura 19 para cada uno de los objetos.

Podemos ver el resultado de la ejecución de este programa en la figura 20. Este programa está disponible en <https://scratch.mit.edu/projects/173539313>.



Figura 19. Programas para que se saluden los dos *sprites*. Un *personaje* ha de usar el primer programa, mientras que el otro usará el segundo código



Figura 20. Resultado del programa realizado en el que dos *personajes* se saludan mutuamente



Figura 18. Ejemplos de fondos para el *escenario* de Scratch

Jugando con el lápiz

Vamos a ver ahora otro ejemplo con el que podemos practicar con el lápiz para realizar dibujos sobre el escenario. Primero seleccionaremos un *personaje* con forma de lápiz (o como mejor nos parezca) y después dibujaremos con él un cuadrado. Vamos a hacerlo de manera que antes de empezar a dibujar, el lápiz se sitúe en el centro del escenario y que cuando termine de hacer el cuadrado vuelva a la posición original y con la misma orientación, dispuesto para volver a dibujar otro cuadrado. Empezará a hacer el dibujo cuando hagamos clic sobre el objeto. Al terminar su tarea, y después de esperar breves segundos, el dibujo desaparecerá. Repetiremos el dibujo indefinidamente, cambiando cada vez el color del lápiz.

El programa quedaría tal y como aparece en la figura 21.

Se puede observar lo que ocurre en el enlace <https://scratch.mit.edu/projects/173595491> (para que el lápiz inicie su movimiento hay que pinchar sobre el objeto).



Figura 21. Programa para dibujar un cuadrado

Si nos fijamos un poco en el programa de la figura 21, hemos repetido lo mismo cuatro veces. Podemos usar las opciones de repetición del programa para evitar usar tantas instrucciones. Podemos ver el programa modificado en la figura 22.



Figura 22. Programa para dibujar un cuadrado con la opción de repetir una parte del código cuatro veces

Se puede ver cómo funciona el código en <https://scratch.mit.edu/projects/173604146/>.

Por último, el resultado de este programa se puede ver en la figura 23.

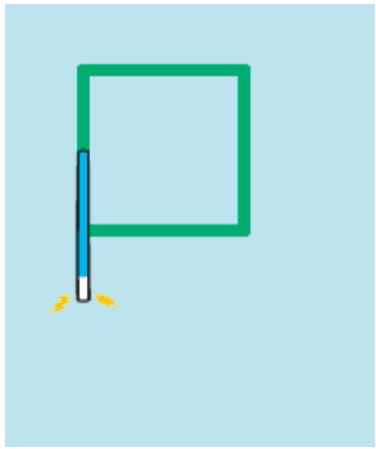


Figura 23. Resultado del programa que dibuja un cuadrado

¿Cómo se podría hacer un octógono? Un programa para hacerlo con Scratch está disponible en <https://scratch.mit.edu/projects/173624461/>.

Preguntas y respuestas

Vamos a ver a continuación cómo hacer preguntas y reaccionar de una forma u otra según la respuesta sea correcta o no.

Analicemos el programa de la figura 24. Al presionar sobre la bandera verde, se nos hace una pregunta («¿En qué mes es la feria de Alba-

cete?») y el personaje cambia su postura hasta que le damos una respuesta. Con los condicionales (comandos si y si no), el objeto actúa de una manera u otra según le demos una respuesta correcta o no. Si la respuesta es septiembre habremos acertado, se oirá un aplauso, nuestro personaje cambiará de expresión mediante un cambio de disfraz y nos dirá «muy bien». Si damos cualquier respuesta que no sea septiembre, habremos fallado. El personaje adoptará una expresión diferente y nos dirá cuál es la respuesta correcta, a la vez se oirá un sonido de fallo. Finalmente, el personaje-objeto cambiará su expresión y nos invitará a visitar la feria. Al mismo tiempo se oirá una música de fiesta.

Si ejecutamos de nuevo las instrucciones el personaje tendrá la expresión con la que haya quedado en la ejecución anterior. Para que cambie y aparezca siempre con el disfraz inicial es necesario colocar al inicio del programa un comando que cambie el disfraz.

La figura 25 muestra el momento en el que el *personaje* del programa realiza la pregunta. El programa completo puede ejecutarse en la dirección <https://scratch.mit.edu/projects/173706311/>.

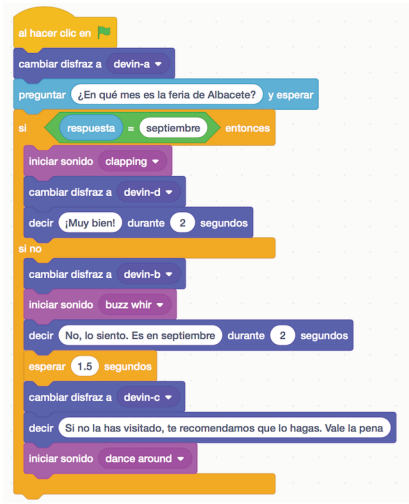


Figura 24. Comandos del programa de preguntas y respuestas

Controlando el movimiento

Vamos a dibujar un circuito por el que se ha de mover un objeto. Si el objeto choca con alguna de las paredes finaliza el juego. Para que el coche gire usaremos las teclas de control de nuestro ordenador.

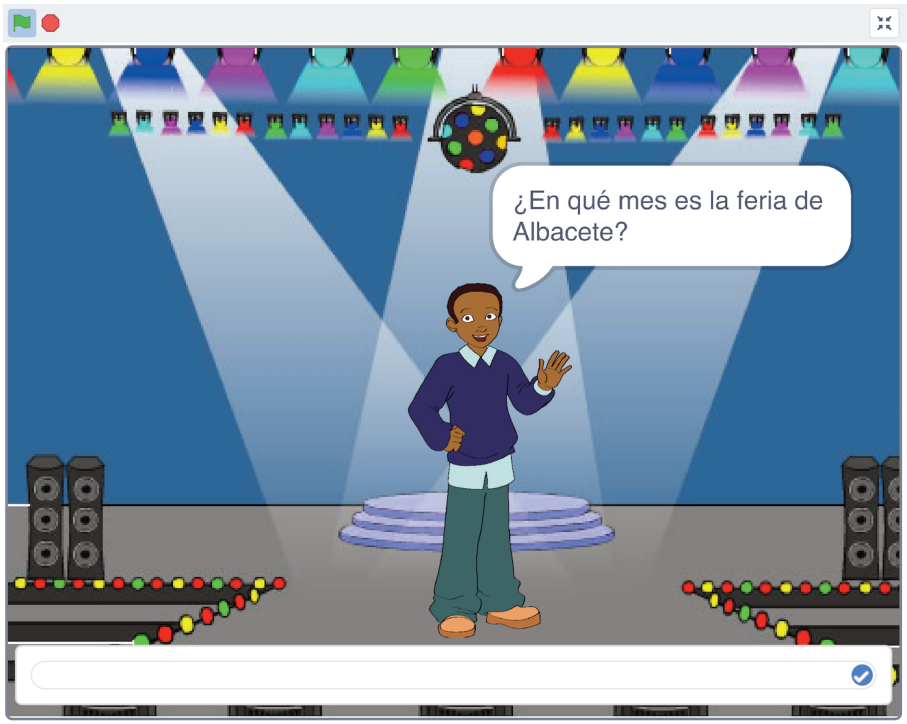


Figura 25. Resultado del programa de preguntas y respuestas

Lo primero que vamos a hacer es dibujar nuestro propio escenario yendo a **Dibujar fondo nuevo**. Dibujaremos un gran rectángulo de bordes negros y dentro de él otro rectángulo mucho más pequeño. Inicialmente colocaremos el objeto en la esquina superior izquierda y mirando hacia la derecha. Se detenga el objeto donde se detenga, haremos que, al presionar sobre la bandera verde, se sitúe en la posición inicial. El objeto se moverá en línea recta mientras no cambiemos su dirección.

Podemos dibujar muy diversos circuitos y hacer que el juego se complique a nuestro gusto. La figura 26 es una captura del escenario de Scractch para este ejemplo, en el que se puede ver el *personaje* seleccionado junto con el rectángulo dibujado.

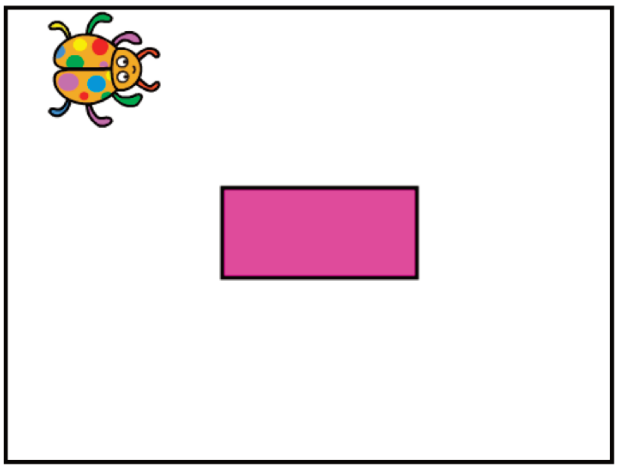


Figura 26. Escenario para el programa de control del movimiento

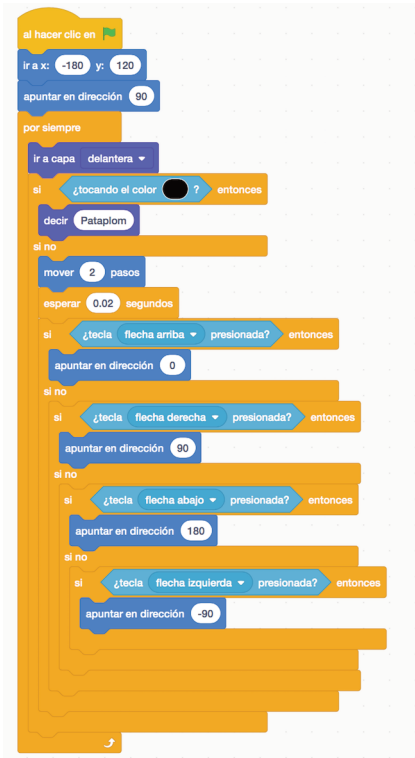


Figura 27. Programa del ejemplo de control del movimiento



Figura 28. Creación de una variable numérica con el menú de Datos para controlar la velocidad del *personaje*

El programa relacionado con este ejemplo se puede ver en la figura 27.

Se puede ver cómo evoluciona el objeto en <https://scratch.mit.edu/projects/173870675/>.

Más difícil todavía

Para finalizar, haremos algo similar a lo anterior, pero en este caso podremos aumentar la velocidad del objeto pulsando una tecla y también introduciremos un contador que haga que el vehículo se detenga al recorrer el circuito completo una sola vez, de manera que si presionamos la flecha derecha el objeto entenderá que ha recorrido el circuito completo y parará en el centro de la pista y nos dirá que ya hemos acabado el juego.

En este ejemplo se trabaja con variables que hemos de crear primero, desde la categoría **Datos** (ver figura 28). En este caso se trabajará con dos variables **contador**, destinado a contar las veces que pulsamos la flecha **hacia la derecha** y **velocidad** que nos permitirá aumentar la velocidad del objeto.

Para conseguir nuestro objetivo podríamos usar un programa como el de la figura 29. Se pueden ver los resultados de su ejecución en <https://scratch.mit.edu/projects/173876915/>.

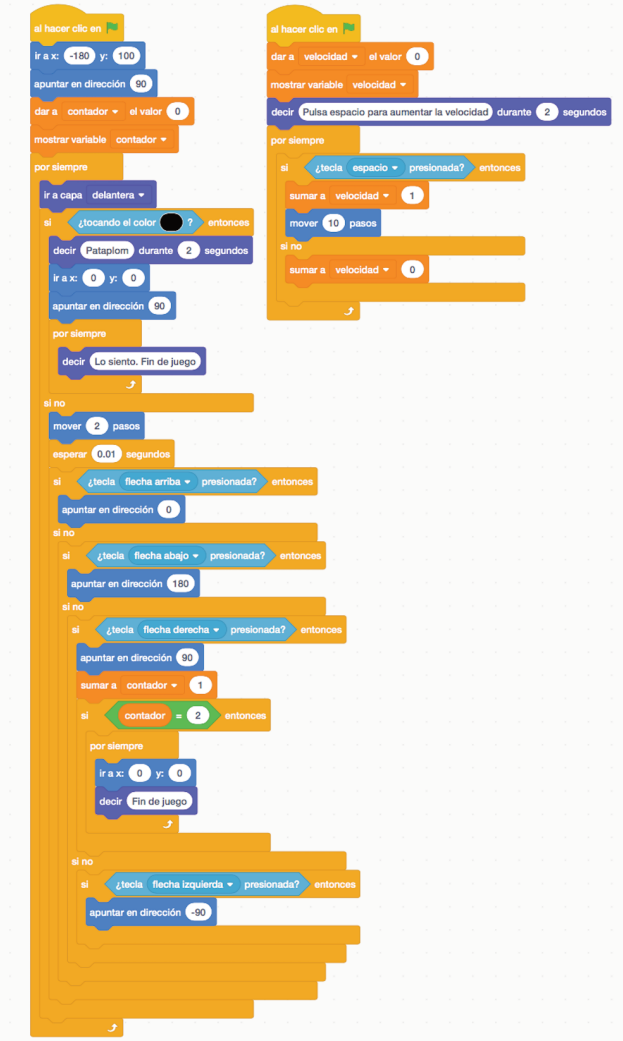


Figura 29. Programa para
controlar el movimiento usando las flechas
y aumentar la velocidad pulsando la barra espaciadora

Ventajas de usar Scratch

Una vez que hemos visto qué es Scratch y su uso para el desarrollo de programas, vamos a presentar las principales ventajas para trabajar con niños y adolescentes. Las hemos dividido en dos grupos: ventajas para el docente (es decir, que facilidades tiene el utilizar Scratch para enseñar) y ventajas para el alumno (es decir, qué capacidades adquieren los estudiantes con Scratch).

Ventajas para el docente:

— Es un programa gratuito y software libre, permitiendo a las instituciones educativas su uso sin limitaciones por el coste de licencias.
— Está disponible para los principales sistemas operativos (Windows, Mac, Linux) y, por tanto, facilita su implantación en el aula ya que el docente no tiene que comprobar el sistema operativo disponible.
— Se puede trabajar con Scratch on-line o instalándolo localmente en un ordenador y trabajar sin red, lo que permite una mayor flexibilidad en el aula.
— Se trata de un lenguaje de programación visual y que además incorpora elementos audiovisuales (vídeos, fotos, grabaciones, etc.), lo cual lo hace más atractivo para los alumnos.
— Los materiales elaborados se pueden insertar en una página web, permitiendo una mayor difusión del trabajo hecho y una futura reutilización de estos materiales.
— Se puede utilizar de forma transversal en una gran parte de las áreas de conocimiento.
— Finalmente, también se trata de una plataforma multilingüe, lo que permite trabajar contenidos en otros idiomas.

Ventajas para el alumno:

— Con Scratch se lleva a cabo un inicio en la programación de un modo visual y casi podríamos decir que jugando con piezas de un puzle.
— Se produce un desarrollo de la capacidad de resolución de problemas al desarrollar la capacidad de dividirlo en pequeños subproblemas más sencillos.
— Se produce un acercamiento a la programación desde dentro, facilitando la comprensión de conceptos lógicos y algoritmos matemáticos.
— Con la libre programación se fomenta la creatividad del alumno al poder construir programas sobre todo aquello que se le pueda ocurrir.
— Se desarrolla el pensamiento sistémico y de ordenación teniendo contacto directo con el modo en que funciona cada elemento, así como en la forma en que este se relaciona con otros elementos o pasos dentro del programa.

— Mejora la habilidad de comprensión de los alumnos mediante la interacción entre lo que se programa y los resultados instantáneos que se muestran.
— Debido a la interacción instantánea con la plataforma también se fomenta la capacidad de autocorrección, ya que, si no obtienen los resultados esperados, pueden cambiar fácilmente lo programado encajando y desencajando los bloques del programa con el ratón.
— La capacidad reflexiva antes de tomar una decisión también se fomenta con Scratch por el simple hecho de que se trata de encajar piezas de un puzle y los alumnos deben reflexionar sobre qué bloque tendrán que añadir en cada paso de la programación del algoritmo.
— Finalmente, Scratch puede ayudar a reforzar o entender conceptos de otras asignaturas o del propio colegio fomentando la relación entre materias y/o áreas de conocimiento.

Conclusiones

Scratch es un entorno sencillo para introducir la programación a los alumnos de últimos años de primaria, secundaria y bachillerato. Los programas operan sobre una serie de imágenes o *personajes* que actúan en un escenario, de manera que resulta muy visual y atractiva para el alumno. Dado que los comandos vienen representados por bloques y que los programas se construyen combinando unos bloques con otros, la creación de los mismos es muy sencilla.

Scratch dispone de una gama bastante amplia de comandos para manejar los *personajes*, de manera que se pueden crear desde programas sencillos que muevan de un lado a otro el *personaje*, hasta programas más complejos que permitan moverlos con el teclado e incluso interacciones entre varios *personajes*. A pesar de la sencillez y facilidad de uso, Scratch fuerza a los alumnos a ser cuidadosos y prestar atención a la hora de desarrollar el programa de un algoritmo, de manera que les obliga a trabajar paso a paso y con rigor en la resolución de problemas.

Además de los ejemplos presentados en este artículo, en la web de Scratch se pueden encontrar muchos otros recursos que pueden ser utilizados en el aula. Este uso podría ser de dos tipos. Por un lado, los alumnos podrían acceder a los recursos y examinar los programas creados por otras personas para aprender la programación con Scratch y, por otro lado, se puede pedir a los alumnos que intenten reproducir desde cero un programa ya creado y luego comparar su programa con el original. La primera opción puede ser mejor en las etapas iniciales del uso de Scratch para familiarizarse con él y ver todo su potencial, mientras que la segunda opción puede ser útil a la hora de proponer actividades a alumnos más avanzados en el uso de Scratch. Además, en la web de Scratch hay numerosos tutoriales con instrucciones para la construcción de programas paso a paso que se podrían utilizar.

Por último, pensamos que Scratch puede ser interesante para desarrollar actividades que abarquen otras materias. Por ejemplo, desarrollar programas para realizar preguntas sobre otras materias (como, por ejemplo, Lengua) de manera que se compruebe si la respuesta proporcionada es correcta o no. Para la asignatura de Biología, se podrían utilizar *personajes* que representen distintos tipos de animales dentro de un ecosistema y que interactúen entre ellos.

Bibliografía

Badger, M. (2014), *Scratch 2.0 Beginner's Guide*, 2nd edition, Packt Publishing, Birmingham.
Breen, D. (2015), *Scratch For Kids For Dummies,* For Dummies, New Jersey.
Dickins, R., L. Stowell y J. Melmoth (2015), *Coding for beginners using Scratc,* Usborne Publishing, London.
Hijón, R. (2018), *Piensa y programa con Scratch… en casa y en clase,* Anaya, Madrid.
Lakeman, L. (2014), S*tep by Step SCRATCH Programming*, Edco Publishing, Dublin.
Lifelong Kindergarten (2018), *Scratch*, <https://scratch.mit.edu>.
Marji, M. (2014), *Learn to program with Scratch*, No Starch Press, San Francisco.
McManus, S. (2013), *Scratch Programming in easy steps*, In Easy Steps Limited, Warwickshire.

Milonovich, B. (2013), *Scratch Cookbook*, Packt Publishing, Birmingham.

Sweigart, A. (2016, *Scratch Programming Playground*, No Starch Press, Toronto.

Vlieg, E. (2014), *Beyond Basic Scratch: Beyond Scratch programming basics,* Amazon Digital Services LLC.

— (2014), *Basic Scratch: An introduction to the Scratch programming language,* Amazon Digital Services LLC.

Woodcock, J. (2015), *Coding games in Scratch*, DK Children, New York.

Virgilio Gómez Rubio
Universidad de Castilla-La Mancha
<virgilio.gomez@uclm.es>

María José Haro Delicado
IES Al-Basit, Universidad de Castilla-La Mancha
<mariajose.haro@uclm.es>

Francisco Palmí Perales
Universidad de Castilla-La Mancha
<francisco.palmi@uclm.es>

* El presente artículo está escrito usando la versión 2.0 de Scratch, que era la última cuando se redactó. Sin embargo, el largo proceso de publicación en *Suma* (recepción, paso por *referees,* maquetación…), ha dado lugar a que en el momento de imprimirse, ya se encuentre disponible la versión 3.0. Ese es el motivo de que algunas de las pantallas y menús que aparecen no coinciden exactamente con sus equivalentes en la versión actual. Los autores no son responsables de esta *desactualización.*

suma+ 90
Artículos
Marzo 2019
pp. 31-39

Tareas que fomentan el desarrollo de la competencia STEM

Adrián Cruz Guerra
José Luis Lupiáñez Gómez

.En el siguiente artículo se presenta una descripción y puesta en práctica de una actividad de innovación docente, propuesta por de Gastineau et al (2011), donde se pretende activar la competencia STEM en un grupo de estudiantes de 3.° de ESO. El principal objetivo de la actividad será modelizar el movimiento de dos personas a través de la tecnología y las matemáticas. Además, se presentarán los resultados de la puesta en práctica y las conclusiones pertinentes.

Palabras clave: STEM, Modelización, Tecnología, Innovación, Secundaria.

Tasks that encourage the development of STEM Education

The following article presents a description and implementation of a teaching innovation activity, proposed by Gastineau et al (2011), where it is intended to activate the STEM competence in a group of students from the 3rd year of ESO. The main objective of the activity will be to model the movement of two people through technology and mathematics. In addition, the results of the implementation and the relevant conclusions will be presented.

Keywords: STEM, Modelling, Technology, Innovation, Secondary.

Es indudable que vivimos en la era de la información y la tecnología, y es que nunca se había visto una evolución tan rápida en cuanto a avances tecnológicos se refiere. El campo de la educación no es ajeno a este hecho, y el desarrollo de nuevos planteamientos curriculares se vincula también al diseño y puesta en práctica de diferentes dispositivos y aplicaciones en las aulas que permiten una interacción muy rica con el entorno. No obstante, la variedad y disponibilidad de tecnología también amplifica la complejidad de integrarla correcta y coherentemente en el aula (Lagrange y Monaghan, 2009).

La integración de toda esta infraestructura tecnológica, que suministra nuevas formas de representación, abre las puertas a modos de expresión novedosos en matemáticas, como son los gestos y las interacciones físicas. El reto actual para los profesores y para los autores de actividades curriculares es ahora «cómo aprovechar estas ricas infraestructuras para suministrar oportunidades para el aprendizaje y para la construcción de significados» (Hegedus y otros, 2017: 11).

En este contexto, nuestro trabajo propone el diseño de una actividad para Educación Secundaria centrada en el uso de sensores que capturan datos del medio, para que los estudiantes, mediante desplazamientos en el aula, exploren el

Artículo recibido en *Suma* en enero de 2018 y aceptado en julio de 2018

significado gráfico de la resolución de un sistema de ecuaciones. Esta actividad se enmarca en las propuestas que promueven el desarrollo de la competencia STEM (acrónimo en inglés de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas)

Matemáticas y tecnología. La competencia STEM

Laboy-Rush (2011) propone una enseñanza contextualizada, donde el entorno del estudiante tome una mayor relevancia y presencia. Valencia, Méndez y Jiménez (2008), defienden, por otro lado, un modelo disciplinar que ofrezca a los estudiantes herramientas para entender e interpretar el mundo que les rodea. Estos planteamientos también sostienen la importancia de romper la brecha entre lo teórico y lo práctico, destacando un enfoque funcional de las disciplinas escolares, como ocurre con las matemáticas en marcos curriculares basados en la noción de competencia como expectativa formativa (Rico y Lupiañez, 2008)

Como respuesta a dicho modelo educativo, y aprovechando los avances tecnológicos con aplicación en educación, se ha retomado con fuerza el debate acerca de la idoneidad de fomentar la competencia STEM en los escolares. La importancia y el reconocimiento de fomentar científicamente a los ciudadanos para sostener el avance social y económico de un país, se consolidó en Estados Unidos a partir de la carrera espacial que acabó la Unión Soviética con el lanzamiento del Sputnik en 1957. En la década de los 70 estas voces llegaron al ámbito educativo, y varias asociaciones, entre ellas el NCTM, destacaron también el valor de la formación de los jóvenes en áreas científicas (Berube, 2014). En los 90 se acuñó el término «SMET» para destacar esta formación integral y ya en el siglo XXI se reformuló, también en Estados Unidos, hasta el término que se ha manejado hasta nuestros días.

La base educacional de STEM intenta quitar las barreras que separan estas cuatro disciplinas mencionadas e integrarlas con experiencias de aprendizaje rigurosas y significativas para los estudiantes. STEM enfatiza una estrategia educativa interdisciplinaria donde los conceptos académicamente rigurosos se acoplan a lo real (Sanders, 2009). Es decir, se ponen en práctica la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas en contextos relacionados con la escuela, la sociedad el deporte o el trabajo, entre otros (Tsupros y otros, 2009). La constitución en 2012 de la STEM Education Coalition[1] en Estados Unidos y en 2015 de la EU STEM Coalition[2] en Europa, que ha dado pie a diversas iniciativas europeas, atestigua el interés internacional de este enfoque curricular.

La conjunción de las materias a las que se refiere la competencia STEM no es arbitraria. Las ciencias suministran un contexto de reflexión, organización y actuación. Proponen problemas, cuestiones y contrastes que invitan a la exploración y al descubrimiento y brindan criterios para clasificar y organizar el medio natural, y así profundizar en su riqueza y complejidad. La tecnología ofrece herramientas y técnicas y, junto a la ingeniería, permiten afrontar la construcción de modelos y artefactos que resuelven conflictos o minimizan impactos. El diseño en la actualidad emplea esos dos referentes de manera conjunta: se diseña lo que puede resolver un determinado fenómeno y se afronta su elaboración para después validar su eficacia y su eficiencia y estudiar sus limitaciones. Las matemáticas, finalmente, aportan un modo de expresión y representación, un conjunto de nociones y destrezas que permiten interpretar el entorno, suministran estrategias para inventar y resolver problemas y promueven el pensamiento lógico y crítico (Lupiáñez y Ruiz, 2017). La competencia STEM permite a los estudiantes comprender el mundo e interactuar con él de manera crítica, constructiva y eficiente. Puede considerarse como una oportunidad de introducir el mundo real a la escuela y conectar los conocimientos impartidos con el contexto social y científico del momento.

El currículo español vigente se ha acercado a esta orientación formativa al aunar tres disciplinas en una de las competencias clave. La denominada «Competencia matemática y competencias básicas en ciencias y tecnología», expresa en una la conjunción de tres de las áreas destacadas por la

competencia STEM (Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte, 2015). Esta nueva competencia propugna derribar las barreras existentes entre esas áreas, ofreciendo a los docentes la posibilidad de plantear un modelo educativo interdisciplinar. Se pretende que los estudiantes utilicen las matemáticas para interpretar el entorno y resolver problemas sociales y científicos actuales, usando con criterio las herramientas tecnológicas pertinentes.

Morrison (2006) desarrolla esta idea para perfilar lo que estaría al alcance de un estudiante alfabetizado en la competencia STEM:

- Resolutor de problemas: capaz de trazar un plan de actuación sobre un problema de forma ordenada y extrapolarlo a situaciones innovadoras.
- Innovador: creativo a la hora de utilizar la ciencia en el diseño de ingeniería.
- Inventor: capaz de detectar y proponer soluciones a las necesidades del mundo actual.
- Autosuficiente: capaz de automotivarse y usar la iniciativa.
- Pensador lógico: capaz de aplicar de forma racional y lógica los diversos procesos de la ciencia.
- Tecnológicamente alfabetizado: capaz de no solo desarrollar las aptitudes necesarias para el uso de la tecnología en cuestión, sino comprender su naturaleza.

Una buena práctica en una educación basada en la competencia STEM, exige un protagonismo evidente de los escolares: el fomento de la inventiva, la iniciativa y el interés por esas áreas científicas pasa por brindar una mayor autonomía. La curiosidad y el pensamiento crítico son actitudes que ocupan un lugar preponderante y que solo se desarrollan en un contexto práctico y participativo. Una estrategia docente que resulta muy provechosa para el desarrollo de la competencia STEM es el aprendizaje basado en proyectos (Capraro, Capraro y Morgan, 2013).

Morrison (2006) también enumera una serie de ventajas producto de la integración de la competencia STEM con esa propuesta metodológica. Entre ellas destaca que se puede facilitar la transferencia de conocimientos y habilidades en la resolución de problemas en diversos ámbitos, se puede incrementar la motivación por aprender y todo ello puede redundar en una mejora notable de los resultados académicos en matemáticas y ciencias.

Estos planteamientos han hecho que sea muy frecuente localizar y consultar numerosas propuestas didácticas centradas en el desarrollo de la competencia STEM. En internet hay varios portales con esa finalidad y también existen resultados de su implementación en el aula (Benjumeda y Romero, 2017; Taub y otros, 2018; Mata, 2014). Según Laboy-Rush (2011), este tipo de actividades deben seguir una serie de fases: reflexión, búsqueda, descubrimiento, aplicación y comunicación. En este trabajo describimos el diseño, la implementación y los resultados de una actividad de modelización matemática que ejemplifica algunas de estas fases.

Objetivos y justificación de la intervención

La finalidad general de esta propuesta es obtener algunos indicadores del desarrollo de la competencia STEM en estudiantes del curso de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 3.º de ESO. Para llevarlo a cabo, realizamos una intervención de aula en la que se implementó una actividad a partir de la propuesta de Gastineau y otros (2011). La actividad consiste en recolectar y modelizar los datos obtenidos mediante la utilización de unos sensores de movimiento, simulando la intersección de dos rectas en la gráfica espacio-tiempo.

En el marco de las fases propuestas por Laboy-Rush (2011), nos centramos en las fases de reflexión, descubrimiento y aplicación. Por tanto, los objetivos de la actividad fueron:

1. Simular con el movimiento la gráfica de algunas funciones.
2. Etiquetar cada función según el crecimiento o decrecimiento.
3. Registrar datos de movimiento de dos caminantes.

4. Realizar una gráfica de ambos movimientos en un mismo eje de coordenadas.
5. Hallar ecuaciones lineales que modelicen los movimientos.
6. Resolver el sistema de dos ecuaciones lineales para determinar la intersección.
7. Comparar la solución algebraica con la solución gráfica.
8. Extrapolar el procedimiento realizado.

Vemos entonces, como los objetivos 1, 2 y 3 pretenden que el estudiante aplique herramientas y conocimientos en la resolución de un problema fisicomatemático, los objetivos 3, 4 y 5 pretenden conducir al estudiante al descubrimiento de la conexión entre el procedimiento físico y el procedimiento matemático y por último, los objetivos 6 y 7 consiguen que el estudiante reflexione acerca de lo realizado en las etapas anteriores.

Para la puesta en práctica de la actividad, se usaron dos sensores de movimiento (figura 1), conectados al software Logger Lite 1.5[3] para PC. Estos sensores capturan datos de distancia, velocidad y aceleración de un móvil y las envía al software que los organiza en una tabla y los representa gráficamente.

Tras realizar una serie de actuaciones para introducirse en el funcionamiento de los sensores, cada estudiante disponía de un cuestionario con 6 preguntas para realizar la actividad. En primer lugar, cada uno debía cumplimentar la tabla 1 con los datos que generó el software, después de que dos estudiantes simularan con su movimiento las ecuaciones de dos rectas.



Figura 1. Sensores de movimiento de Vernier

	Punto 1	Punto 2	Pendiente (m)	Ecuación recta
Caminante 1				
Caminante 2				

Tabla 1. Datos pedidos al estudiante

Las preguntas planificadas fueron las siguientes:

1. Identifica la función de cada caminante en la gráfica. Razona tu respuesta.
2. ¿Se adapta bien la recta al movimiento real del caminante?
3. Compara los valores que has obtenido para el tiempo de intersección por los dos métodos: (1) la intersección buscada gráficamente, y (2) resolviendo el sistema de ecuaciones. ¿Son los valores similares?
4. ¿Sería posible realizar un movimiento enfrente de los sensores de forma que las gráficas resultantes no se intersecten? Si es así, da un ejemplo; si no, explica por qué.
5. ¿Podrían los caminantes moverse de forma que las gráficas se intersecten más de una vez? Si es así, ¿cómo?
6. ¿Podrías aportar una situación real donde el procedimiento realizado sea de ayuda?

En la tabla 2 relacionamos cada una de las preguntas del cuestionario con los objetivos enumerados anteriormente y los indicadores de Morrison (2006) involucrados.

Descripción de la intervención

La actividad se llevó a cabo en un centro público de Granada, en un grupo de 3.º de ESO. Según el profesor responsable del mismo, los estudiantes muestran un gran interés por los estudios y se involucran activamente en la materia de mate-

Preguntas	Indicador	Objetivo
Identificar funciones (pregunta 1)	Resolutor de problemas	Etiquetar cada función según el crecimiento o decrecimiento
Completar la tabla	Autosuficiencia	Registrar datos de movimiento de dos caminantes
¿Se adapta bien? (pregunta 2)	Pensador lógico	Valorar correctamente la fiabilidad del modelo
Resolver sistema	Solucionador de problemas	Resolver el sistema de dos ecuaciones lineales para determinar la intersección
Comparar valores (pregunta 3)	Pensador lógico	Comparar la solución algebraica con la solución gráfica
Preguntas 4 y 5	Solucionador de problemas	Extrapolar el procedimiento realizado
Situación real (pregunta 6)	Inventor	Extrapolar el procedimiento realizado

Tabla 2. Preguntas del cuestioanrio, objetivos e indicadores de la competencia STEM

máticas. En el momento de implementación de la actividad, los estudiantes habían superado la unidad didáctica de sistemas de ecuaciones con buenos resultados y se encontraban inmersos en el estudio de las funciones. De los 24 estudiantes del grupo, 22 realizaron la actividad. Esta se desarrolló durante tres sesiones de una hora de duración.

Desarrollo de las sesiones

La primera sesión de la actividad sirvió para presentar a los estudiantes la herramienta tecnológica que se utilizaría posteriormente. Tras unos ejemplos iniciales de gráficas sencillas, planteamos cuestiones generales sobre cómo conseguir funciones crecientes y decrecientes, que los estudiantes contestaron con prontitud. Después, propusimos que los estudiantes reprodujeran individualmente una gráfica generada de forma aleatoria por el software, con su movimiento frente al sensor. La propuesta tuvo gran aceptación y en el apartado siguiente mostramos algunos resultados.

Para la realización de la segunda sesión se preparó una presentación para guiar la realización del cuestionario. En primer lugar, se propuso a los estudiantes que identificaran en diversas gráficas, generadas aleatoriamente por el programa, a los caminantes según el crecimiento o decrecimiento de las funciones, algo que resolvieron con facilidad. Luego, se les indicó que rellenaran la tabla 1. Fue entonces cuando empezaron a presentar carencias desde el punto de vista de la contextualización. Al ser una actividad puesta en contexto y no puramente matemática, les costaba reconocer cuáles eran los puntos obtenidos por el programa y propuestos para modelizar el movimiento, llegando a pensar en los puntos como coordenadas separadas. Entonces realizamos un breve recordatorio del significado de los puntos en el plano y su representación algebraica.

Después presentamos la fórmula de la pendiente y de la ecuación de la recta punto-pendiente, ya que hasta el momento eran dos conceptos que habían trabajado poco. Nuevamente presentaron carencias a la hora de sustituir en la fórmula correspondiente los puntos obtenidos. Además, se creó una confusión generalizada pues no sabían por qué debían sustituir las variables en la ecuación de la recta. La explicación siguiente agotó esta sesión.

En la tercera sesión, los estudiantes ejecutaron algún método de resolución de sistemas para completar la pregunta tres, la cual fue afrontada aceptablemente por la mayoría. Por último, se reflexionó acerca del sentido de los resultados obtenidos y concluyeron si dichos resultados eran aceptables o no. Para finalizar la actividad, se propuso a los estudiantes que respondieran las tres últimas preguntas del cuestionario.

Resultados

Para estudiar los datos de la primera sesión se ha decidido hacer un análisis por tendencias. Es decir, una vez recopilada la información, se han analizado y se han observado algunos patrones de comportamiento generales, los cuales se destacarán ejemplificados con imágenes de los resultados. Para el estudio de los datos del cuestio-

nario se atenderá a los indicadores propuestos por Morrison (2006) y que se vinculan con las preguntas del cuestionario en la tabla 2.

Experiencias preliminares: dibujando gráficas

Las gráficas siguientes fueron resultado de las experiencias iniciales de la primera sesión. En ellas se podrá observar la gráfica propuesta, coloreada de verde en el caso de las individuales, y rojo y azul en el caso de las de pareja, y la gráfica generada por el estudiante, roja y azul, o roja, respectivamente.

Si analizamos la gráfica de la figura 2, notamos cómo el estudiante en cuestión, al no poseer ninguna herramienta de medida, inicia su movimiento desde una posición algo alejada de la real.

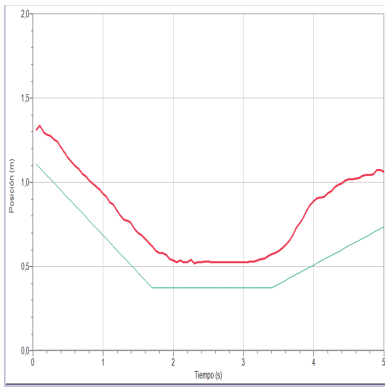


Figura 2. Movimiento de un estudiante para reproducir una gráfica

No obstante, se percibe cómo el estudiante comprende la mecánica de la tecnología utilizada y responde ante los cambios de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de forma correcta. Sin embargo, a medida que avanzamos con la actividad, vemos cómo los estudiantes consiguen traducir sus errores en cuanto al posicionamiento inicial. Esto queda reflejado en la figura 3.

En los resultados obtenidos en la segunda parte de la sesión, donde los estudiantes por parejas generaban gráficas con su movimiento, podemos definir dos grandes tendencias. Por un lado, observamos cómo algunos estudiantes, a

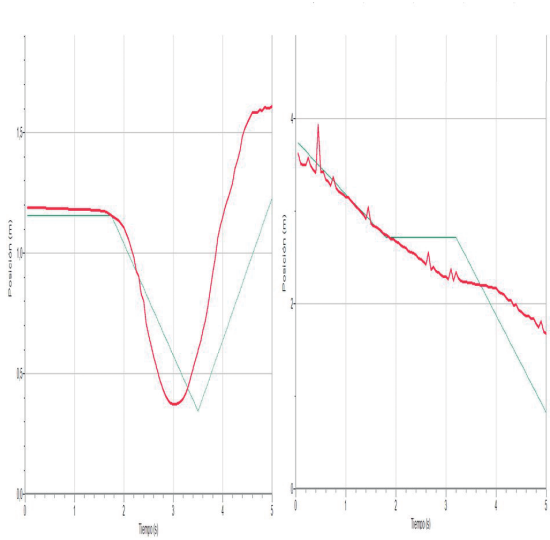


Figura 3. Corrección de posición inicial

pesar de realizar la prueba más de una vez, siguen reflejando carencias a la hora de utilizar su error de posición inicial como herramienta de medida para los posteriores experimentos, como se muestra en la gráfica roja de la figura 4.

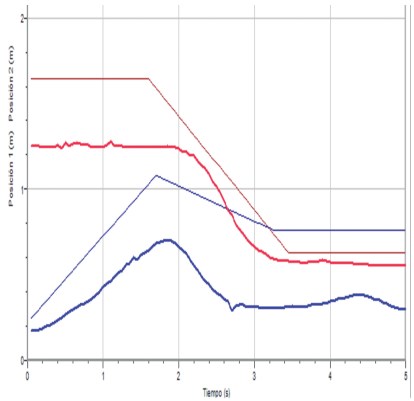


Figura 4. Desacertada posición

Por otro lado, algunos estudiantes que consiguen comenzar en una posición acertada evidencian dificultades para interpretar la gráfica en términos de crecimiento y decrecimiento y reproducirlas con su movimiento (figura 5, izquierda). En otras ocasiones, esas dificultades se debían a la modulación de la velocidad para reflejar fielmente la gráfica propuesta (figura 5, derecha).

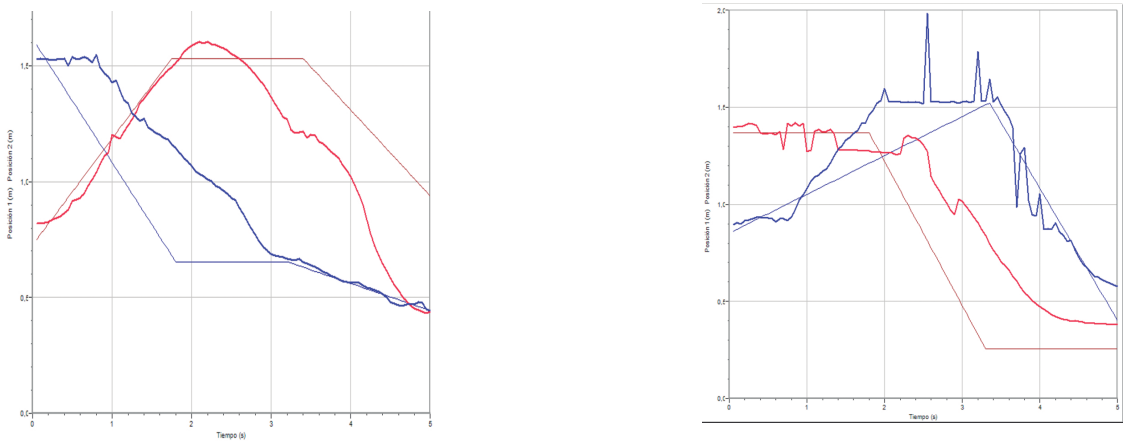


Figura 5. Uso de la herramienta y modulación de la velocidad

Respuestas al cuestionario

En la primera pregunta, todos los estudiantes relacionan correctamente a cada caminante con la gráfica pertinente, pero un 14% de ellos no justifica su respuesta. Un ejemplo de justificación que evidencia una buena capacidad a la hora de interpretar y traducir gráficas a otros lenguajes, es la siguiente: «El caminante 2 iba alejándose del sensor, por lo que la función es creciente».

A la hora de cumplimentar la tabla 1, la mayor parte de los estudiantes no sabían identificar los puntos como un par de componentes y mostraban carencias a la hora de aplicar una fórmula nueva, como era la de la pendiente. También manifestaron dificultades para reconocer el concepto de punto en el plano como dos componentes en una situación contextualizada. Además, aun habiéndoles facilitado las fórmulas correspondientes, los estudiantes no fueron capaces de aplicarlas de forma autónoma, demostrando una notable inseguridad a la hora de interpretar y aplicar una fórmula desconocida.

Por otra parte, aunque todos los estudiantes consiguieron obtener el punto de intersección de ambas rectas al resolver el sistema de ecuaciones, por la observación realizada al menos 14 de ellos presentaron graves problemas en la resolución del sistema de ecuaciones.

Dichos problemas iban asociados, en su mayoría, a la utilización de decimales durante la actividad.

En la segunda parte del cuestionario (preguntas 4, 5 y 6), se pretende que los alumnos y las alumnas pongan de manifiesto sus capacidades a la hora de extrapolar resultados a situaciones hipotéticas y a la hora de aplicar procedimientos en situaciones reales. Por un lado, aproximadamente el 10% de los estudiantes aportan una respuesta negativa ante la pregunta 4, mientras que un 90% responde afirmativamente. Sin embargo, dentro de dichas respuestas encontramos una variedad de procedimientos que englobaremos en tres grupos.

En un primer grupo, nos encontramos con que el 65% de los estudiantes que responden afirmativamente a la primera pregunta, no son capaces de aportar un procedimiento riguroso para conseguir las gráficas pedidas. Por el contrario, manifiestan debilidad a la hora de tener claras las condiciones necesarias para conseguirlo. Por ejemplo, un estudiante que responde: «Sí. Que ambos se queden quietos», olvida una condición fundamental que es la posición inicial, pues si ambos quedan quietos en la misma posición inicial las gráficas serán coincidentes. Otra tendencia, que representa el 10% del total, es aquella que en la propia respuesta los estudiantes imponen condiciones que llevan a un resultado erróneo. Este es el caso de un estudiante que responde: «Sí, por ejemplo, estando a la misma distancia (de los sensores) y uno se acera y otro se aleja». Al imponer como condición inicial estar a la misma distancia de los sensores, se genera

inevitablemente una gráfica que se corta al inicio de la misma. El tercer grupo, que representa un 25%, consigue aportar un procedimiento donde se manifiestan las condiciones necesarias para generar las gráficas pedidas. Un ejemplo de este caso es el estudiante que responde: «Sí. Quedándose los dos parados a diferentes distancias de los detectores». Este último conjunto de estudiantes demuestra una buena capacidad para extrapolar un procedimiento a una situación hipotética, y lo llevan a cabo de forma rigurosa.

En la quinta pregunta, donde se pide aportar una situación donde las gráficas se corten más de una vez en caso de ser posible, todos los estudiantes responden afirmativamente. Sin embargo, tan solo un 10% es capaz de aportar una respuesta rigurosa. Por ejemplo, un estudiante que responde: «Sí, moviéndose para adelante y para atrás varias veces», aporta un procedimiento que podría ocasionar gráficas que no se corten en ningún punto. Esto refleja una falta de rigurosidad a la hora de extrapolar procesos a situaciones hipotéticas. Los estudiantes, aunque describen condiciones que podrían generar la gráfica pedida, no exponen todas las condiciones necesarias para ello.

Finalmente, analizamos el conjunto de respuestas desde el punto de vista del indicador de invención, que como Morrison (2006) declara, tiene que ver con la capacidad de detectar y proponer soluciones a las necesidades del mundo actual. Tres estudiantes (1,5%) no aportan ninguna situación donde aplicar el proceso. Por otro lado, un 64% de los estudiantes aportan ideas pero que no encajan completamente con el procedimiento utilizado.

Así, por ejemplo, un estudiante considera que el proceso llevado a cabo podría servir de ayuda para saber la llegada de un tren, autobús o cualquier otro medio de transporte. Por otro lado, un 13% de la muestra aporta situaciones donde no tiene cabida el proceso, como puede ser la aportada por el siguiente estudiante: «En el PIB de un país desarrollado y otro no desarrollado a lo largo de un año». Por último, un 10% de los estudiantes aporta una situación y el posible beneficio producido, como por ejemplo: «Dos ascensores. Uno baja y sube y otro sube y baja. Punto de intersección para saber la velocidad y cuál de ellos tiene un fallo».

Conclusión

En primer lugar, destacamos el hecho de que los estudiantes han manifestado facilidad para trabajar con unos dispositivos y aplicaciones desconocidos hasta el momento para ellos. Con los resultados obtenidos mediante el software y las anotaciones obtenidas durante la sesión, concluimos que todos los estudiantes consiguieron entender rápidamente el mecanismo de los sensores y elaboraron con prontitud protocolos para minimizar errores de medición y ajustes. Por otro lado, los resultados de las preguntas finales del cuestionario evidencian carencias de los estudiantes para trabajar y generar argumentos con datos contextualizados. Hay que destacar también, la confusión que pudo generar en el alumnado el uso del término posición reflejado en las gráficas, ya que realmente indica distancia con respecto al sensor.

En suma, afirmamos que los estudiantes han sabido trabajar con los sensores de una forma acertada y han sido capaces de contestar las tres primeras preguntas del cuestionario en un nivel aceptable. Sin embargo, en el momento de reflexionar, extrapolar e innovar, los estudiantes demuestran una falta de formación que se hace patente en las tres últimas preguntas del cuestionario.

La actividad propuesta articula varias habilidades fundamentalmente propias de las áreas de matemáticas, pero con un fuerte vínculo de actuaciones físicas y de manejo e interpretación de dispositivos tecnológicos. Los resultados evidencian un desempeño notable en destrezas técnicas y carencias claramente visibles en la argumentación en contextos aplicados. Esto último resulta clave en términos de la competencia STEM y pone de manifiesto la importancia de hacer más habituales propuestas didácticas con esa orientación. El avance tecnológico suministra un rico contexto de aplicación, pero la dificultad para diseñar y gestionar actividades ricas con ellos debe seguir siendo objeto de reflexión y estudio.

Referencias bibliográficas

Benjumeda, F. J., e I. Romero (2017), «Ciudad sostenible: un proyecto para integrar las materias científico-tecnológicas en Secundaria», *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, n.º 14(3), 621-637.

Berube, C. T. (2014), *STEM and the City: A Report on STEM Education in the Great American Urban Public School System,* Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Capraro, R. M, M. M. Capraro y R. Morgan (2013), *STEM Project-Based Learning. An Integrated Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Approach,* SensePublishers, Rotterdam

Egedus, S., C. Laborde, C. Brady, S. Dalton, S-H. Siller, M.Tabach, J. Trgalova y L. Moreno-Armella (2017), *Uses of technology in Upper Secondary Mathematics Education*, Springer Open.

Gastineau, J., C. Brueningsen, B. Bower, L. Antinone, y E. Kerner (2011), *Real-World math with Vernier. Beaverton,* OR: Vernier Software & Technology.

Laboy-Rush, D. (2011), *Integrated STEM Education through Project-Based Learning*, <https://www.learning.com/>.

Lagrange, J. B., y J. Monaghan (2009), *On the adoption of a model to interpret teachers' use of technology in mathematics lessons,* Trabajo presentado en WG7, CERME 6 Conference, Lyon, Francia.

Lupiáñez, J. L., y J. F. Ruiz (2017), «Diseño de tareas que promueven el desarrollo de la competencia STEM: los problemas de modelización matemática» [Artículo en blog educ@conTIC]. Recuperado de <http://www.educacontic.es/en/blog/diseno-de-tareas-para-el-desarrollo-de-la-competencia-stem-los-problemas-de-modelizacion>.

Mata, C. (2014), *Un estudio de casos para evaluar la competencia STEM*, Trabajo de Fin de Máster. Universidad de Granada.

Morrison, J. (2006), *Atributes of STEM education. The Student, the Academy, the Classroom. TIES*. <https://www.partnersforpubliced.org/uploadedFiles/Teachingand_Learning/Career_and_Technical_Education/Attributes%20of%20STEM%20Education%20with%20Cover%202%20.pdf>

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, Boletín Oficial del Estado del 1 de marzo de 2015, Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 381-422. <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pds/BOE-A-2015-37.pdf>.

Rico, L., y J. L. Lupiáñez (2008), *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*, Anaya, Madrid.

Sanders, M. (2009). «STEM, STEM education, STEMmania», *The Technology Teacher*, n.º 68(4), 20-26.

Taub, M., R. Azevedo, A. Bradbury, G. Millar y J. Lester (2018), *Using sequence mining to reveal the efficiency in scientific reasoning during STEM learning with a game-based learning environment. Learning and Instruction*<http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.08.005>

Tsupros, N., R. Kohler y J. Hallinen (2009), *STEM education: A project to identify the missing components*, Carnegie Mellon University, Pennsylvania.

Valencia, S., O. Méndez y G. Jiménez (2008), «¿Enseñanza de las ciencias por disciplinas o interdisciplinariedad en la escuela?», *Tecné, Episteme y Didaxis: Revista de la Facultad de Ciencias y Tecnología*, n.º 23, 78-88.

Adrián Cruz Guerra
IES Tomás Iriarte, Santa Cruz de Tenerife
<adriancruzguerra94@gmail.com>

José Luis Lupiáñez Gómez
Universidad de Granada
<lupi@ugr.es>

1 <http://www.stemedcoalition.org>
2 <http://www.stemcoalition.eu>
3 <https://www.vernier.com/products/software/logger-lite/>



COLABORAN:

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE

XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE CULTURA, EDUCACIÓN E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA

Deputación DA CORUÑA

Ayuntamiento de A Coruña
Concello da Coruña

suma+ 90
Artículos
Marzo 2019
pp. 41-47

El muestreo: una idea estocástica fundamental*

Carmen Batanero
Nuria Begué
María M. Gea
Rafael Roa

En este trabajo nos centramos en el muestreo, resaltando su importancia como idea estocástica fundamental. Analizamos también los contenidos básicos del muestreo y describimos algunas dificultades relacionadas con las mismas descritas en la investigación didáctica. Se presentan también ejemplos de tareas propuestas en dicha investigación que podrían utilizarse en el aula para desarrollar la comprensión del muestreo.

Palabras clave: Muestreo, Ideas fundamentales, Desarrollo de la comprensión.

Sampling: a fundamental stochastic idea

In this paper we focus on sampling, highlighting its importance as a fundamental stochastic idea. We also analyze the basic contents of the sampling and describe some difficulties related to them described in the didactic research. We also present some examples of tasks proposed in this research that could be used in the classroom to develop the understanding of sampling

Keywords: Sampling, Fundamental ideas, Development of understanding.

El muestreo es la base de la inferencia estadística, cuyo objetivo es proporcionar modelos matemáticos que extiendan las conclusiones de estudios realizados en una parte de la población (muestra) a la población en su conjunto, dando una medida de la incertidumbre en los resultados.

Tanto Heitele (1975), como Burrill y Biehler (2011) describieron ideas fundamentales en probabilidad y estadística, entre las cuales destacaron el muestreo. Las ideas fundamentales son aquellas que, históricamente, supusieron saltos conceptuales que contribuyeron al crecimiento de estas disciplinas. Por aparecer en muchas situaciones cotidianas, han de ser enseñadas, pero tienen algunos aspectos contra intuitivos, que deben ser tenidos en cuenta por el profesor. Además de ser el fundamento de la inferencia, Heitele (1975) indica que el muestreo es un vínculo entre estadística y probabilidad. En el día a día, inconscientemente tomamos muestras; por ejemplo, cuando controlamos nuestro peso o tensión arterial periódicamente, o cuando observamos el comportamiento de nuestros conocidos. Usamos estas muestras para construir nuestro conocimiento y realizar predicciones, pues no nos es posible observar completamente todos los fenómenos que nos interesan.

Los medios de comunicación e Internet difunden estudios y encuestas que utilizan muestra

Artículo recibido en *Suma* en mayo de 2018 y aceptado en septiembre de 2018

para hacer predicciones generales, cuya validez debe ser juzgada por el lector. Es por ello que documentos como el proyecto GAISE (Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry y Scheaffer, 2007) consideran que los conocimientos elementales sobre muestreo deben ser parte de la cultura estadística de cualquier ciudadano.

La enseñanza del muestreo se incluye en muchas licenciaturas, grados y estudios postdoctorales, así como en el Bachillerato en algunos países (por ejemplo, Common Core State Standards Initiative, CCSSI, 2010; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD, 2015; Senior Secondary Board of South Australia, SSBSA, 2002). Igualmente se sugiere comenzar desde la Educación Secundaria Obligatoria con algunos conceptos elementales relacionados, como los de población y muestra, representatividad y sesgo y tipos de muestreo.

En lo que sigue analizamos los contenidos básicos del muestreo, describimos algunas dificultades relacionadas con las mismas y proponemos actividades tomadas de diversas investigaciones que pueden ayudar a superarlas.

Contenidos básicos del muestreo

El término muestreo remite en realidad a una serie de contenidos, los más elementales de los cuáles, detallamos a continuación.

Muestra y población. El estudio del muestreo requiere de la distinción entre población y muestra (subconjunto de la población). Por diversas razones, como, por ejemplo, limitación del tiempo o de los recursos o que el estudio sea destructivo, no se puede siempre trabajar con una población completa. Por ello se estudia una parte de la población (muestra), que se trata de seleccionar de una forma adecuada. Por tanto, la comprensión del muestreo comienza con la concepción de muestra.

Variabilidad aleatoria: La estadística estudia la variabilidad y trata de medirla, predecirla y, cuando sea posible, controlarla. Aunque las variables y la variabilidad aparecen en todas las ramas de la matemática, juegan un papel especial en estadística. Los estudiantes deben aprender a reconocer las diferentes fuentes de variabilidad en un estudio estadístico (Reading y Shaughnessy, 2004): a) variabilidad de resultados en un experimento aleatorio; b) variabilidad en los datos; c) variabilidad en una variable aleatoria; d) variabilidad en las muestras. Todas estas fuentes de variabilidad aparecen en el muestreo, por lo que sería necesario dotar al estudiante de experiencias con las mismas; por ejemplo, mediante el empleo de simuladores.

Distribución. Este es un concepto propiamente estadístico, que no se utiliza en otras ramas de las matemáticas. Algunos estudiantes tienen dificultad en considerar la distribución como un todo y no como un agregado de datos. Igualmente les cuesta trabajo asumir que un estadístico, como la media, es una propiedad de la distribución, considerada como un todo y no de un elemento particular.

La distribución interviene en el muestreo con tres niveles de complejidad (Harradine, Batanero y Rossman, 2011): a) la distribución teórica de probabilidad que modela una variable aleatoria tomada de una población; b) la distribución del conjunto de datos que constituye una muestra aleatoria simple; c) la distribución de un estadístico (como la media muestral) en todas las posibles muestras del mismo tamaño y condiciones (distribución muestral). La coordinación de estos tres niveles de distribución, y su diferenciación, supone una gran dificultad conceptual para los estudiantes. Shaughnessy, Ciancetta y Canada (2004) identifican tres niveles progresivos de comprensión de estas distribuciones: 1) nivel de razonamiento aditivo, que consiste en considerar las diferentes muestras como subconjuntos disjuntos de la población y utilizar en las estimaciones únicamente la frecuencia absoluta, sin tener en cuenta la proporción del suceso; 2) nivel de razonamiento proporcional, donde se utilizan las proporciones al realizar las estimaciones y se comprende el valor esperado de la distribución muestral; y 3) nivel de razonamiento distribucional (el menos frecuente), donde se integra la comprensión del valor esperado y de la variabilidad de la distribución muestral al realizar las estimaciones.

Estimación. La idea básica en estimación es que es posible generalizar los datos de una mues-

tra a una población mayor. Estudiamos la distribución de una variable en la población (por ejemplo, el peso de los chicos de 18 años, que está caracterizada por unos parámetros; en el ejemplo, el peso seguiría una distribución normal $N(\mu, \sigma)$ cuyos parámetros son la media μ y la desviación típica σ. La estimación es el proceso de obtención de los valores de los parámetros a partir de una muestra de la población; en el ejemplo, podríamos tratar de obtener el valor de μ a partir de la media $\bar{x}$ de una muestra de la misma. La estimación ha permitido aplicar las matemáticas a las ciencias no exactas y ha llevado a la actual sociedad basada en la evidencia (Batanero y Borovcnik, 2016). Por supuesto, las conclusiones tendrán siempre un grado de incertidumbre, que la teoría del muestreo trata de estudiar.

Representatividad y variabilidad muestral. En la estimación es necesario tener en cuenta dos características de las muestras (Saldahna y Thompson, 2002). La primera de ellas es la representatividad, que implica que si no hay sesgos en el método de selección, un estadístico muestral debe ser un buen estimador del parámetro poblacional. La variabilidad nos sugiere que diferentes muestras de la misma población podrían dar distintos valores del estadístico. La variabilidad en las muestras depende de la variabilidad en la población de partida, pero puede disminuirse si se aumenta el tamaño de la muestra.

Métodos de muestreo y sesgo. Un proceso correcto de estimación se basa en el método de selección de la muestra. Para poder estudiar el error probable, el método de selección debe asegurar que podemos calcular la probabilidad de que cada elemento de la población forme parte de la muestra y que los elementos sean independientes entre sí. La primera forma de conseguirlo es utilizar un método de selección aleatoria, pero es posible también utilizar métodos equivalentes (como el muestreo sistemático) o métodos donde, aunque no todos los miembros de la población tienen la misma probabilidad, podemos medir esta probabilidad, como el muestreo estratificado. Si no somos capaces de asegurar las condiciones adecuadas, diremos que hay un *sesgo* en el muestreo. Este sesgo se transmite a las conclusiones y no disminuye aunque aumente el tamaño de la muestra.

Algunas dificultades de comprensión en el muestreo

De acuerdo a Ben-Zvi, Bakker y Makar (2015), son los fallos en comprensión de las ideas de variabilidad y representatividad muestral los que impiden una correcta comprensión de la distribución muestral. Por ejemplo, algunos estudiantes tienden a asumir que una muestra, aunque sea pequeña, siempre representa a la población, independientemente de cómo se ha seleccionado (Tversky y Kahneman, 1982). Esta creencia conduce a graves consecuencias en el trabajo estadístico, pues se espera una convergencia estocástica a la distribución teórica incluso en pocas repeticiones de un experimento, porque se generaliza indebidamente la Ley de los Grandes Números. Algunos sesgos asociados son los siguientes:

- *Falacia del jugador*, o suponer que el resultado de un experimento aleatorio afectará, al repetirlo en el futuro, a la probabilidad de los sucesos de dicho experimento. Esta creencia es infundada cuando los experimentos aleatorios son independientes. La influencia del resultado de un experimento aleatorio en el cálculo de probabilidades futuras es una creencia que se denomina *recencia positiva*, si se supone que los siguientes resultados de un experimento aleatorio seguirán el patrón observado, y *recencia negativa*, si se piensa que se compensarán los resultados futuros con los observados.
- *Sesgo de equiprobabilidad* (Lecoutre, 1992), que consiste en pensar que los resultados de cualquier fenómeno aleatorio, en particular, cualquier valor de un estadístico muestral, son igualmente probables.
- *Falacia de la composición* (Chernoff y Russel, 2012), que consiste en transferir a un todo una propiedad que se cumple en alguna de sus partes. Así, por ejemplo, puesto que todos los puntos al lanzar un dado son equiprobables; algunos estudiantes consideran equiprobables todas las sumas o productos obtenidos al lanzar dos dados.

— *Ilusión de control* (Langer, 1975), o creencia de poder controlar los resultados de un proceso aleatorio (una muestra). Este sesgo aparece frecuentemente en los jugadores compulsivos y se refuerza cuando se incrementa la motivación (por ejemplo, si se espera un fuerte premio) y la persistencia (cuanto más se juega).

Una vez comprendidas la representatividad y variabilidad muestral, se debe pasar al estudio de la distribución muestral. Sin embargo, como ya se ha indicado los estudiantes confunden los tres tipos de distribución implícitos en el muestreo. En especial, tienen mucha dificultad en visualizar la distribución muestral.

Como indican Saldahna y Thompson (2002), aunque la estimación se realiza a partir de una única muestra, la comprensión de la distribución muestral requiere imaginar todas las posibles muestras del mismo tamaño que podrían tomarse de la población dada. Shaughnessy, Ciancetta y Canada (2004) investigaron esta compresión con estudiantes de 10 a 19 años. La cuarta parte de ellos esperaban obtener el mismo resultado en las dos muestras repetidas del mismo tamaño y algunos propusieron en sus muestras resultados muy poco probables (como todos los sucesos idénticos). Los autores identifican tres niveles progresivos en el razonamiento sobre la distribución muestral: 1) el nivel de razonamiento aditivo (el más frecuente), que consiste en considerar las diferentes muestras como subconjuntos disjuntos de la población y utilizar en las estimaciones únicamente, la frecuencia absoluta, sin tener en cuenta la proporción del suceso; 2) el nivel de razonamiento proporcional, en el que se utilizan proporciones al realizar estimaciones y se comprende el valor esperado de la distribución muestral; y 3) el nivel de razonamiento distribucional (el menos frecuente) donde se integran las ideas de valor esperado y de variabilidad, al realizar estimaciones.

Ideas para el aula

En esta sección retomamos las ideas básicas requeridas para la comprensión del muestreo y sugerimos algunas tareas utilizadas por autores que han investigado la comprensión del muestreo por estudiantes de educación secundaria que pueden ser utilizadas en el aula, para desarrollar dicha comprensión.

Población y muestra. En primer lugar, es importante que los estudiantes discriminen correctamente la muestra de la población y reconozcan las situaciones en que es necesario recurrir al muestreo. Esta comprensión se puede desarrollar con preguntas como la planteada en la actividad 1 (Meletiou-Mavrotheris y Paparistodemou, 2015). Watson y Moritz (2000) proponen a alumnos entre 8 y 15 años preguntas similares y diferencia tres niveles de desarrollo en la comprensión del concepto: en el primero solo se comprende la terminología del muestreo; en el segundo, se comprenden además las aplicaciones del mismo y en el tercero se adquiere una capacidad crítica para discutir conclusiones obtenidas a partir de muestras sesgadas.

Actividad 1

¿Has oído la palabra muestra antes? ¿Qué significa para ti? Pon algunos ejemplos de muestras e indica por qué fue necesario tomar una muestra.

Sesgo en muestreo. Como hemos indicado, se suele tener excesiva confianza en la representatividad muestral, independientemente del tamaño de la muestra. Además, Saldahna y Thompson (2002) concluyen que muchos estudiantes prefieren métodos sesgados y no confían en el muestreo aleatorio para producir muestras representativas. Será importante entonces plantear actividades como la 2, tomada de Watson (2004).

Actividad 2

Alrededor de 6 de 10 estudiantes de los institutos de los Estados Unidos dicen que ellos conseguirían una pistola si quisieran una, de los cuales, una tercera parte aseguran que les costaría menos de una hora conseguirla. La encuesta dirigida a 2508 estudiantes en Chicago mostraba también que el 15 % había llevado realmente una pistola los últimos 30 días, y el 4 % llevaba una al colegio.

a) ¿Harías alguna crítica de la afirmación de este artículo?
b) Si tu fueras un profesor, ¿te llevaría esta información a rechazar una oferta de trabajo en otra ciudad de los Estados Unidos, como Colorado o Arizona? ¿Por qué?

Métodos de muestreo. Una vez aceptada la posibilidad de sesgo en el muestreo, se puede proponer la siguiente tarea adaptada de Meletiou-Mavrotheris y Paparistodemou (2015) que, además de reforzar la idea de sesgo en el muestreo, permite introducir diferentes métodos estadísticos para selección de las muestras.

Actividad 3

Los estudiantes en un colegio realizaron una encuesta con el fin de determinar la proporción de niños que reciclan en sus casas. Compara los siguientes métodos de elegir la muestra e indica cuáles te parecen fiables. Si tuvieras que elegir uno de los métodos, ¿cuál elegirías y por qué?

1. Mari preguntó a 60 amigos.
2. Rafa hizo una lista con los nombres de todos los niños del colegio y eligió 60 niños al azar.
3. Andrés preguntó a 60 estudiantes que eran miembros de un club de medio ambiente.
4. Elena envió el cuestionario por correo electrónico y usó las primeras 60 respuestas.
5. Ana preguntó a 5 chicos y 5 chicas de cada uno de los cursos de 1.° a 10.° para tener una muestra representativa.

Generación de muestras. Como hemos indicado, los estudiantes han de visualizar la idea de que es posible tomar muchas muestras de la misma población. Una actividad interesante es pedirle formar muestras. Por ejemplo, podemos proponer la actividad 4, tomada de Gómez y otros (2014). En esta tarea, el valor esperado del número de chinchetas que cae con la punta hacia arriba en la siguiente repetición del experimento será próximo a 68, pues la proporción muestral observada es esa ($\hat{p} = 0{,}68$) y, por tanto, sería el mejor estimador de la proporción en la población. Sin embargo, cabe esperar alguna variabilidad en las cuatro muestras diferentes, debido a la variabilidad en el muestreo. Una respuesta razonable sería, por ejemplo, indicar los valores 65, 70, 71 y 64 para las cuatro nuevas muestras. Sin embargo, algunos estudiantes dan estimaciones próximas a 50 chinchetas con la punta hacia arriba, o bien intentan compensar el resultado del profesor dando muestras con el número de chinchetas alrededor de 30. También hay estudiantes que dan valores muy extremos, como 100 chinchetas con la punta hacia arriba, o mezclan las anteriores respuestas (Begué, 2016). Además de discutir las soluciones en clase, se pueden realizar experimentos con chinchetas reales o utilizar el simulador presentado en la figura 1 para hacer ver a los estudiantes el comportamiento previsto en diferentes muestras..

Actividad 4

Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba y 32 caen hacia abajo. Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño vacía una caja de 100 chinchetas y obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Escribe cuatro resultados posibles si se repite el experimento cuatro veces.

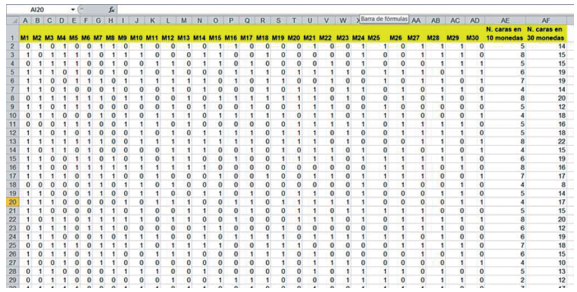


Figura 1. Simulación de muestras de lanzamiento de monedas

Ditribución muestral. La discusión en clase de la actividad 4 y la producción de una gráfica con los resultados de los diferentes estudiantes permite introducir la distribución muestral. Para reforzar su comprensión y ayudar en la diferenciación con la distribución de la población y la distribución de los datos en la muestra, es conveniente realizar alguna actividad de simulación. Por ejemplo, por medio del applet de la colección de Allan Rosman y Beth Chance disponible en <http://www.rossmanchance.com/applets/OneSample.html> se visualizan las tres distribuciones. El applet permite seleccionar el tipo de distribución y el estadístico; también se puede cambiar el tamaño de la muestra y ver el efecto del tamaño de la muestra sobre la distribución muestral.

Nosotros podemos (o incluso los mismos estudiantes pueden) construir un simulador de este tipo usando Excel. Con la opción de generación de números aleatorios, se pueden generar secuencias de diferentes longitudes de valores 0 y 1 (representando la cara y la cruz). En la figura 1 se han generado de tamaños 10 y 30 para comparar los resultados del lanzamiento de 10 o 30 monedas equilibradas. La población en este caso

es la variable aleatoria que solo toma dos valores, 0 y 1; las muestras (de tamaño 10 y 30 se visualizan en la figura 1, donde también se han añadido dos columnas sumando el número de caras en las 10 primeras monedas y en las 30. El estudiante puede examinar cada una de las muestras y ver no solo que cambia el número total de caras, sino también el orden en que se presentan caras y cruces. Además, se puede identificar la presencia de rachas de resultados iguales seguidos.

La simulación se puede complementar con la representación gráfica del número de caras obtenidas en los dos tipos de muestras (figura 2). Nosotros hemos realizado 100 simulaciones (100 filas en la hoja Excel representada en la figura 1), pero se puede ampliar el número. Lo que representamos en las dos gráficas de la figura 2 son las distribuciones muestrales del número de caras, de modo que el estudiante puede diferenciarlas de la distribución en la población y de la distribución de cada muestra que aparecen en la figura 1.

Pueden también observar que el valor esperado o media de la distribución muestral sería en el primer caso igual a 5 y en el segundo a 15. Pero mientras que los valores muy alejados de esta media aparecen ocasionalmente en la muestra pequeña, son muy raros en la de mayor tamaño. La diferencia de variabilidad se puede ver mejor si en vez de representar el número de caras representamos la proporción de caras, que es sencillo, sin más que dividir por el tamaño de muestra el número de caras obtenido.

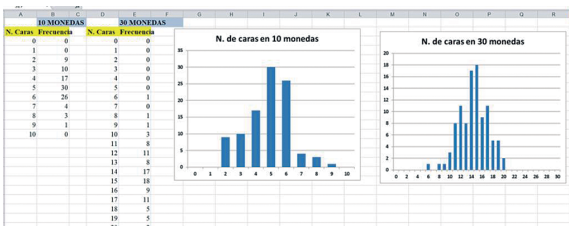


Figura 2. Representación del número de caras en muestras grandes y pequeñas en Excel

Para finalizar

Los diseños curriculares actuales permiten comenzar la enseñanza del muestreo desde la etapa secundaria, donde las tareas que proponemos en este trabajo pueden ser implementadas. Todas estas tareas, y otras analizadas en Batanero (2013) y Batanero y Borovcnik (2016), podrían englobarse dentro de lo que hoy se denomina como razonamiento inferencial informal, desde el que se intenta iniciar a los estudiantes en la inferencia estadística, gradualmente y con apoyo en tareas simples, recursos manipulativos o simulación.

El análisis de las ideas fundamentales en el muestreo nos sugiere que no es suficiente enseñar a los estudiantes las reglas y conceptos con el fin de llegar a la comprensión integral del tema. Numerosos applets interactivos proporcionan un entorno dinámico y visual en el que los estudiantes pueden participar en el muestreo, el azar y la construcción de las distribuciones muestrales. En concreto, la disponibilidad actual de software y tecnología hace que sea posible dedicar el tiempo, que previamente se invertía en tareas rutinarias y de cálculo, en trabajar de forma más intuitiva y reforzar el razonamiento y sentido sobre el muestreo.

Por tanto, es importante que los estudiantes logren una comprensión suficiente del muestreo, antes de continuar con el estudio de la inferencia, pues de lo contrario, los errores de comprensión del muestreo van a proyectarse en los contenidos posteriores.

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2013), «Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico», *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática,* n.º 8(11), 277-291.

Batanero, C., y M. Borovcnik (2016), «Sampling and Inference», en C. Batanero y M. Borvcnik (eds.), *Statistics and Probability in High School*, Sense Publishers, Rotterdam, Sense Publishers, 163-196.

Begué, N. (2016), *Comprensión de elementos básicos de muestreo en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria,* Tesis de Máster, Universidad de Granada.

Ben-Zvi, D., A. Bakker y K. Makar (2015), «Learning to reason from samples», *Educational Studies in Mathematics,* n.º 88(3), 291-303.

Burrill, G., y R. Biehler (2011), «Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers», en C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study*, Springer, Dordrecht, 57- 69.

Chernoff, E. J., y G. L. Russell (2012), «The fallacy of composition: Prospective mathematics teachers? Use of logical fallacies», *Canadian Journal for Science, Mathematics and Technology Education,* n.º 12(3), 259-271.

Common Core State Standards Initiative (2010), *Common Core State Standards for Mathematics,* National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers, Washington, DC, disponible en: <www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf>.

Di Martino, P., y R. Zan (2015), «The construct of attitude in mathematics education», en B. Pepin y B. Roesken-Winter (eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education: Exploring a mosaic of relationships and interactions*, Springer, Nueva York, 51-72.

Franklin, C., G. Kader, D. Mewborn, J. Moreno, R. Peck, M. Perry y R. Scheaffer (2007), *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A preK-12 curriculum framework,* American Statistical Association, Alexandria, disponible en <www.amstat.org/education/gaise/>.

Gal, I. (2002), «Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities», *International Statistical Review*, n.º 70(1), 1-25.

Harradine, A., C. Batanero y A. Rossman (2011), «Students and teachers' knowledge of sampling and inference», en C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education*, Springer, Dordrecht, 235-246.

Heitele, D. (1975), «An epistemological view on fundamental stochastic ideas», *Educational Studies in Mathematics,* n.º 6(2), 187-205.

Kahneman, D., P. Slovic y A. Tversky (1982), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases,* Cambridge University Press, Nueva York.

Langer, E. J. (1975), «The illusion of control», *Journal of personality and social psychology,* n.º 32(2), 311.

Lecoutre, M. P. (1992), «Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations», *Educational Studies in Mathematics,* n.º 23(6), 557-568.

Meletiou-Mavrotheris, M., y E. Paparistodemou (2015), «Developing students' reasoning about samples and sampling in the context of informal inferences», *Educational Studies in Mathematics,* n.º 88(3), 385-404.

Nisbett, R., y L. Ross (1980), *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgments*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Reading, C., y J. M. Shaughnessy (2004), «Reasoning about variation», en D. Ben-Zvi y J. B. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, Springer, Dordrecht, 201-226.

Real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato (2015), Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Madrid.

Saldanha. L., y P. Thompson (2002), «Conceptions of sample and their relationship to statistical inference», *Educational Studies in Mathematics,* n.º 51(2), 257-270.

Senior Secondary Board of South Australia (2002), *Mathematical studies curriculum statement*, Adelaida.

Shaughnessy, J. M., M. Ciancetta y D. Canada, (2004), «Types of student reasoning on sampling tasks», en M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4), International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, 177-184.

Tversky, A., y D. Kahneman (1982), Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*, Cambridge University Press, Nueva York, 117-128.

Watson, J. M. (2004), «Developing reasoning about samples», en D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking*), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 277–294.

Watson, J. M., y J. B. Moritz (2000), «Developing concepts of sampling», *Journal for Research in Mathematics Education,* n.º 31(1), 44-70.

Carmen Batanero
<cbatanero@ugr.es>

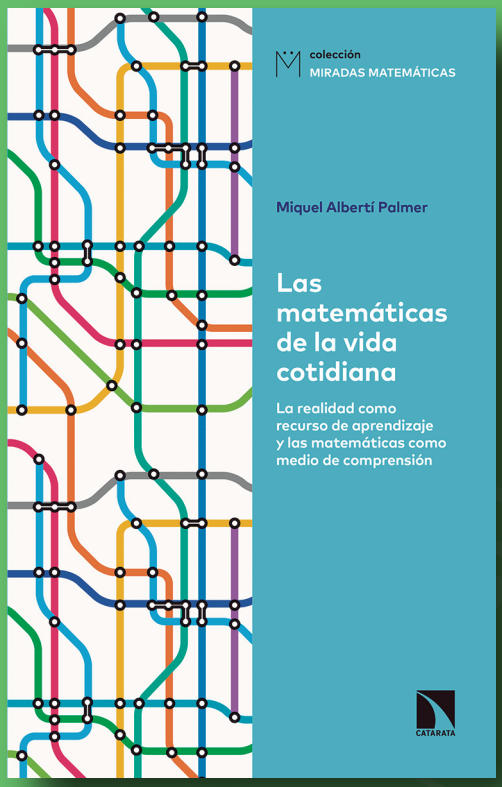
Nuria Begué
<nbegue@correo.ugr.es>

María M. Gea
<mmgea@ugr.es>

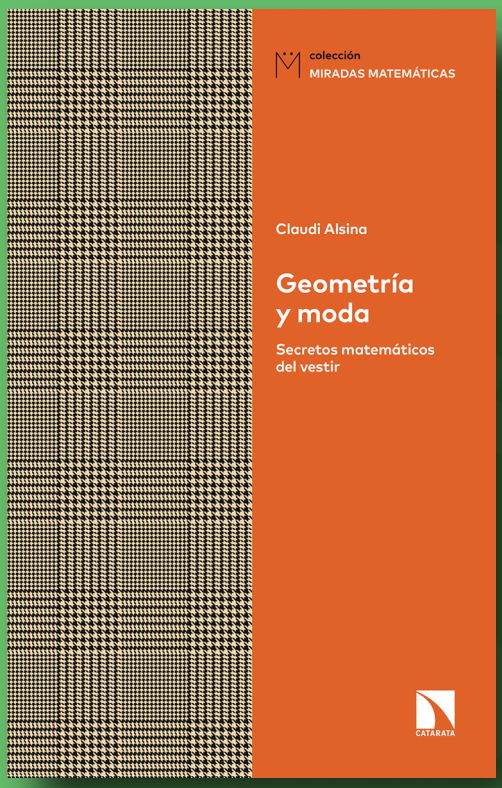
Rafael Roa
<rroa@ugr.es>

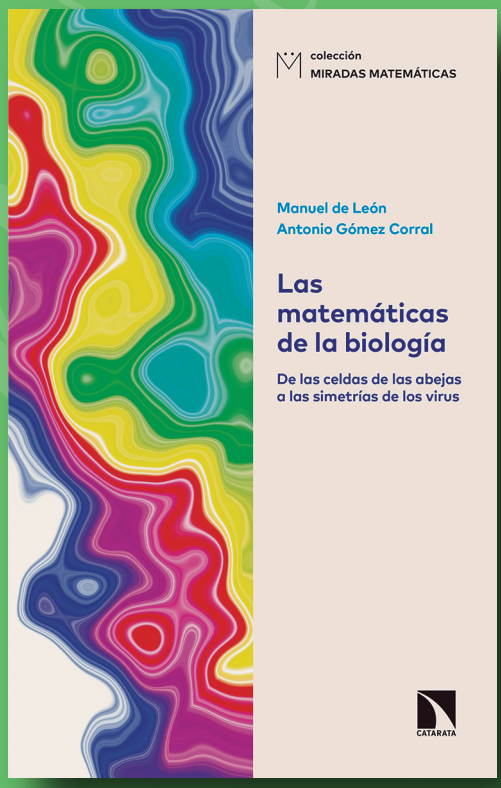
Universidad de Granada

* Proyecto EDU2016-74848-P y grupo FQM126 (Junta de Andalucía)



Servicio de Publicaciones de la FESPM





secciones



suma+ 90
Secciones
Marzo 2019
pp. 51-56

Es hora de jugar en serio

Diego Lieban
Fabián Vitabar Vaz

A todos nos gusta jugar. Nos entretiene, nos desafía, nos interpela. Pone a prueba nuestra capacidad estratégica, de anticipación, de análisis de posibilidades y estimación de probabilidades. Nos impulsa a la creatividad, al pensamiento exhaustivo, pero también a la persuasión, al autocontrol, al hábil manejo de la comunicación con el oponente.

Todo esto es muy interesante, sin duda; pero, sobre todo, ¡jugar es divertido! Y uno, casi sin darse cuenta, pone en acción todas estas habilidades y muchas otras. En definitiva, jugar nos hace bien, especialmente cuando seleccionamos el juego adecuado.

¿Es posible jugar con GeoGebra? ¡Por supuesto! Vamos a compartir diversas experiencias de juegos relacionadas con GeoGebra. Veremos que hay de distintas variedades, más o menos parecidas a los juegos tradicionales, y en todos los casos reflexionaremos acerca de lo que estas experiencias pueden aportar a la educación matemática. Sin duda esto nos resultará interesante, pero además entraremos por una nueva puerta que se abre en este mundo: el diseño de juegos con GeoGebra. ¿Qué aprendizajes serán necesarios para lograr que GeoGebra simule un juego? En principio puede resultar atemorizante, pero ya veremos que es menos monstruoso de lo que parece.

CreoGebra

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2018 y aceptado en enero de 2019

Comencemos el recorrido, divirtámonos, pasémoslo bien, dejemos que el juego nos lleve a otro mundo y vayamos siendo sensibles a la riqueza didáctica que, tanto desde los actos de jugar como del de diseñar un juego con GeoGebra, se irá manifestando. Con GeoGebra de por medio, ha llegado la hora de jugar en serio.

Imitación de juegos físicos

Una posibilidad muy sencilla que GeoGebra nos pone a la mano es la imitación de juegos y puzles físicos, simulados a través del programa. Quizás no parezca muy atractivo, especialmente si uno puede disponer del juego palpable y jugar con él. Pero el desafío de simularlo puede llegar a ser lo que nos cautive para intentarlo.

En la plataforma de Recursos de GeoGebra podemos encontrar muchísimos juegos, que otros usuarios se han tomado el trabajo de preparar. Y, para tener en cuenta de aquí en más, recuerda que una búsqueda en inglés u otro idioma te puede ofrecer muchas más posibilidades.

Este libro, creado por Rafael Losada Liste (figura 1), tiene varios juegos clásicos a disposición, tales como el ahorcado, las damas o el ajedrez:

https://www.geogebra.org/m/u8gFwdZP.

Se trata de juegos cuyas bondades son conocidas y no hay ningún beneficio adicional en el hecho de que estén programados con GeoGebra.



Figura 1

Resta 1

También podemos dar con otros juegos más desafiantes, como el caso de este *Juego resta uno*, programado por Guilherme Francisco Ferreira (figura 2).

Las reglas son muy simples. Se puede mover una ficha en una línea horizontal o vertical, siempre y cuando salte por encima de otra ficha que esté en un espacio contiguo y caiga en el siguiente espacio, que debe estar vacío (como en las damas). Con este movimiento, la ficha sobre la cual se saltó es eliminada del tablero. El objetivo del juego es dejar una sola ficha.

Se trata de un juego que puede favorecer el aprendizaje de la planificación de estrategias, de organización de los ensayos, de buscar regularidades, de anticipar consecuencias. Puede resultar tan complejo como adictivo.

Observa que la aplicación preparada en GeoGebra tiene en cuenta las reglas y solo permite la realización de los movimientos autorizados. Hay muchísimos conceptos matemáticos que deben aplicarse para poder crear esta construcción. Ya analizaremos algunos ejemplos —un poco más simples—, pero por lo pronto mencionemos que la lógica formal y la geometría analítica han tenido mucho que ver con el éxito de esta propuesta.

Ciertamente, tanto en jugar como en programar, hay grandes oportunidades de

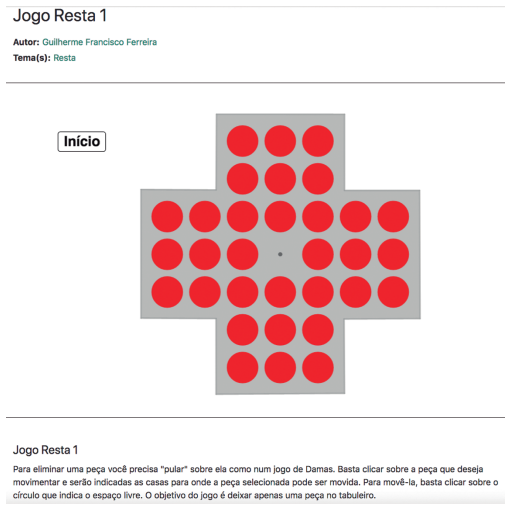


Figura 2

aprendizaje matemático. Es muy interesante que los conceptos a poner en juego sean tan diferentes en cada caso, de modo que quien es capaz de programar y también jugar un juego, realmente puede hacer gala de su dominio de las matemáticas.

Chomp

Este juego se puede realizar muy simplemente con GeoGebra, ya que solamente consiste en cambiar los colores de algunas figuras. Sin embargo, el efecto es muy atractivo. Esta es la aplicación creada por Steve Phelps (figura 3):

https://www.geogebra.org/m/HSwgnXjn.

En turnos alternados, dos jugadores seleccionan una de las casillas. Al hacer clic sobre una de ellas, esta y todas las que estén por arriba y a su derecha desaparecerán. El jugador que se vea forzado a escoger la celda roja será el perdedor.

Puede haber muchas actividades que, desarrolladas a partir de este juego, favorezcan el aprendizaje matemático. Algunas de ellas tienen que ver con diseñar estrategias ganadoras, analizar variantes del juego con otras dimensiones de tableros o pequeñas variaciones del reglamento.

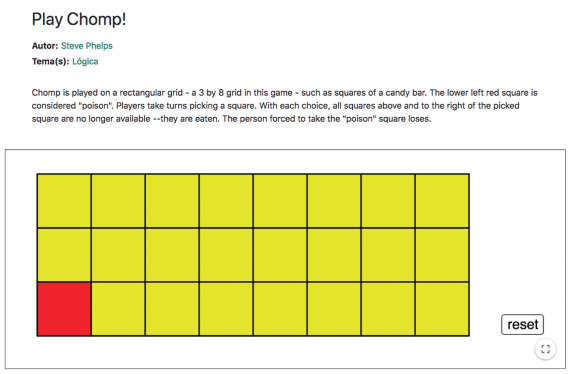


Figura 3

Quarto

Como ejemplo del aprovechamiento que podemos hacer de otras funciones de GeoGebra, tenemos esta version de Quarto creada por Diego Lieban (figura 4):

https://www.geogebra.org/m/UAnA84xv.

El reglamento indica que, tomando turnos, dos jugadores colocan una de las piezas en cualquier casilla libre del tablero. El objetivo es lograr alinear (en cualquier dirección) cuatro piezas que coincidan en una característica (grande/pequeña, verde/azul, prisma/cilindro, con/sin orificio). Por ejemplo, si un jugador logra alinear cuatro fichas cilíndricas, habrá ganado. Pero… ¡cuidado! La pieza que debe colocarse en el tablero es elegida por el contrincante, de manera que no es tan sencillo planear una estrategia exitosa.

Nuevamente, la capacidad de anticipación, el análisis de posibilidades, la visualización espacial y la consideración de múltiples variables se combinan aquí para poder generar una estrategia ganadora.

Y en cuanto al uso de GeoGebra, el aprovechamiento de la vista en tres dimensiones le aporta un encanto particular. Más aún, esta construcción dio lugar al diseño de impresiones 3D de estas mismas piezas por parte de un grupo de estudiantes. Las fotos se pueden apreciar en el mismo material. Se pone en evidencia la riqueza que puede desencadenarse a través de un proyecto de este tipo.

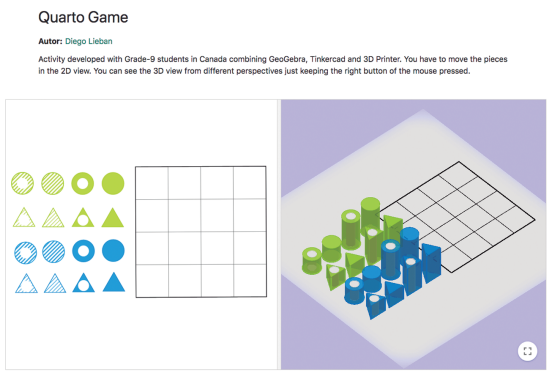


Figura 4

Superficie resbaladiza

Te presentamos un juego preparado por Fabián Vitabar:

https://www.geogebra.org/m/XZGY5cP2.

Debes utilizar los controles (flechas rojas) para llevar al punto verde a cruzar la línea de meta (azul). Hay que tener presente que la instrucción de movimiento dada por la flecha roja se suma al movimiento anterior, de modo que a veces es difícil «desacelerar» a tiempo. ¿Cuál es el menor número de movimientos con los que es posible resolver cada nivel?

Una novedad de esta construcción es que, además de sus nueve niveles, también incluye la posibilidad de crear un nuevo nivel personalizado. Esto llama nuestra atención porque, precisamente, nos introduce en el camino de crear este tipo de juegos con GeoGebra y no simplemente utilizarlos. ¿Cuál es la matemática que se esconde detrás de la creación de estos juegos? ¿Cuáles son las funciones secretas de GeoGebra que debemos aprovechar? Trataremos de comenzar a descubrirlo.



Figura 5

Quiero crear un juego

No hay límite en las herramientas de GeoGebra que pueden ser provechosas para crear juegos. Pero hay algunas de ellas que solucionan problemas que se presentan con frecuencia, así que intentaremos presentarlas.

El proceso de creación de un juego tiene un gran parecido con la composición de una obra de arte. Si bien siempre hay un plan inicial, a medida que transcurre la creación van surgiendo nuevas ideas para mejorarlo. Incluso cuando ya está listo, se nos ocurre qué agregarle o cómo perfeccionarlo. Se trata de un proceso muy valioso desde el punto de vista de la creatividad, ya que la descomposición en pequeños desafíos facilita el abordaje de los problemas, y la renovación de las metas reaviva el entusiasmo.

Abordaremos un ejemplo con esta misma dinámica: comenzando por la versión más sencilla, y mejorándolo poco a poco, conociendo nuevas herramientas en cada paso.

Tres en raya, versión 1

Vamos a programar el popular juego de *Tres en raya*. La primera versión será la más simple: imitar con GeoGebra la misma dinámica que hacemos en papel.

Basta con trazar el esquema con cuatro segmentos, conseguir una imagen para la cruz y otra para el cero, e insertar cada una de ellas cinco veces, como si fueran fichas disponibles para colocar sobre un tablero.

Es posible que aparezcan puntos que no nos interese mostrar. En ese caso, simplemente desactivamos su visibilidad y no nos molestarán.

Así de sencillo, ya podemos jugar. Basta con arrastrar las fichas para colocar cada una en su lugar (figura 6).

https://www.geogebra.org/m/e7n3cxzq

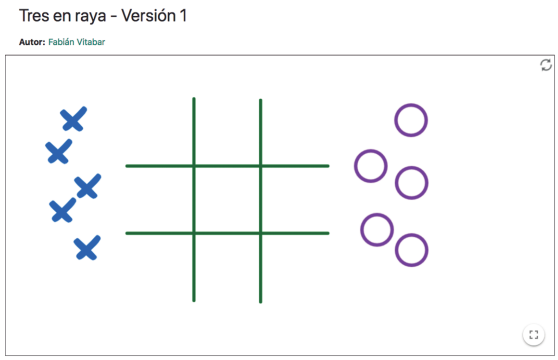


Figura 6

Tres en raya, versión 2

Estaremos de acuerdo que la primera versión resultó poco desafiante. Demos un paso y

hagamos que las fichas aparezcan en su casilla correspondiente al hacer clic sobre cada una de ellas. No debemos olvidar que habrá que alternar turnos, una vez para cada jugador.

Hay muchísimas maneras de lograr este efecto con GeoGebra, elijamos una que nos pueda inspirar para otras construcciones más adelante.

En primer lugar, definiremos una variable lógica, que se encargará de saber de quién es el próximo turno (de la cruz o del cero). Es bueno asignar nombres elocuentes a las variables, para no marearnos cuando tengamos que manejar muchos de ellos. En la línea de entrada escribimos turnocruz=true y está listo. Análogamente definiremos la variable turnocero que será la negación de la anterior, de este modo: turnocero=¬turnocruz.

Ahora, en cada casilla tendremos que colocar un cuadrado (la celda completa en la que haremos clic), una cruz y un cero. En principio estarán todos allí, pero luego iremos jugando con hacerlos visibles o no, dando así el efecto de que aparecen mágicamente. Comencemos con la casilla superior izquierda (será la número 1 para nosotros), dibujemos un cuadrado que la ocupe totalmente (lo llamamos zona1), colocamos una cruz (cruz1) y un cero (cero1).

Para lograr que un clic en el cuadrado deje visible solamente la imagen que corresponde, debemos trabajar en sus propiedades, en la pestaña Programa de guion. Usaremos el comando Visibilidad. Escribamos lo siguiente:

```
Visibilidad(cruz1,1,turnocruz)
Visibilidad(cero1,1,turnocero)
Visibilidad(zona1,1,false)
Valor(turnocruz,turnocero)
```

La primera línea asigna a la cruz la misma visibilidad que se indique en la variable lógica turnocruz. Si esta variable es verdadera, la cruz será visible; de lo contrario será invisible. El número 1 que aparece como segundo argumento indica que trabajamos en la primera vista gráfica, no nos preocupemos por él de momento.

La segunda línea hace lo propio con la imagen del cero, de acuerdo con la variable turnocero.

La tercera línea hace desaparecer el cuadrado. Es una estrategia útil para evitar que se vuelva a hacer clic sobre él.

La cuarta línea utiliza el comando Valor, que sirve para asignarle cierto valor a una variable. En este caso, le asigna a turnocruz el valor de turnocero. ¿Qué estamos haciendo? Esencialmente, estamos invirtiendo los turnos, de modo que para la siguiente jugada esté todo listo para el contrincante.

Con un poco de paciencia, tendremos que hacer el mismo procedimiento en cada una de las nueve casillas.

Será muy útil tener un botón que oculte todas las imágenes y muestre todos los cuadrados. Es muy sencillo: basta con colocar un botón Reiniciar y escribir en su guion todos los comandos Visibilidad necesarios (¡27!).

Mira el ejemplo y explora la configuración de los objetos, puede ayudarte (figura 7).

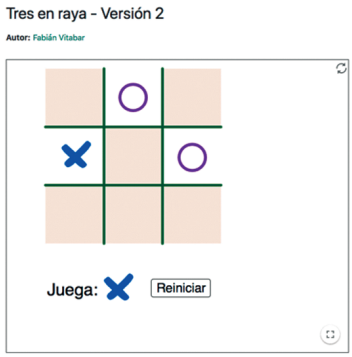


Figura 7

Tres en raya, versión 3

Parece ser que la versión 2 funciona bastante bien, ¿pero qué tal si GeoGebra pudiera indicarnos cuándo ha habido un ganador? Será necesario lograr que esté atento a los movimientos, y reaccionar cuando se detecte una línea. Quizás quieras detener aquí tu lectura e intentar resolverlo por tu cuenta, y luego volver cuando tengas un plan. ¿No? Como lo desees. A continuación ya vamos a develar una forma de resolverlo.

Aprovecharemos la hoja de cálculo para hacer una matriz (similar al tablero), desde la celda A1

hasta la C3, por el momento repleta de ceros. Además calcularemos la suma de cada fila, de cada columna y de cada diagonal. A medida que se vaya completando el tablero, asignaremos el valor 1 a las celdas en que se coloque una cruz, y un –1 en las que se coloque un cero. De este modo, la suma será 3 o –3 solamente en la línea ganadora.

Pues ahora solo resta dibujar ocho segmentos que se superpongan al tablero, y a cada uno de ellos ponerle una condición para se exponga. Por ejemplo, supongamos que la suma de los elementos de la primera fila de la matriz está en la celda D1. Entonces, en el segmento correspondiente, en la Condición para mostrar objeto de la pestaña Avanzado de sus propiedades, pondremos abs(D1)==3. Esta proposición será verdadera para los valores 3 o –3, de modo que el segmento será visible cuando esa línea esté completa.

Este proceso que hacemos en la hoja de cálculo puede hacerse también con variables, pero puede resultar confuso si no se guarda el orden y se nombran las variables adecuadamente.

Aún nos falta programar el modo en que la matriz se va completando. Debemos iniciar con ceros en todas las celdas. De manera que, en el guion del botón de reinicio, agreguemos Valor(A1,0) y Valor(A2,0).

Y así sucesivamente, con las nueve celdas. A continuación, ingresemos en la línea de entrada: valor=Si(turnocruz,-1,1).

A partir de ahora, la variable valor tomará el valor –1 cuando sea el turno de las cruces, y valdrá 1 cuando corresponda a los ceros. La usaremos para cargarla en la celda correspondiente.

Ahora, en el guion del cuadrado zona1, agreguemos Valor(A1,valor), suponiendo, claro está, que la celda A1 corresponde a zona1. Repetimos lo mismo en las demás casillas.

Esto debería haber sido suficiente para que la aplicación funcione como en el ejemplo (figura 8).

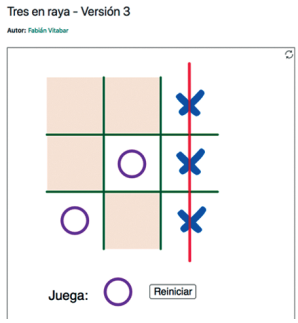


Figura 8

Si ha sido un tanto agobiante, puedes explorar la construcción del ejemplo y detenerte en los detalles.

Tres en raya, versiones 4, 5, etc.

Probablemente se te estén ocurriendo nuevas funciones para agregar a este juego. Se podría incorporar un contador de puntos, que registre las partidas ganadas por cada jugador. O, incluso más desafiante, programarlo para que el contrincante sea el ordenador. ¿Qué otras funciones se te ocurren? Asígnate el desafío e intenta resolverlo, verás cuánto te entusiasmas.

Hablando en serio

Esperamos que estos ejemplos te hayan animado para jugar más y más con GeoGebra. La cantidad de conexiones entre los conocimientos matemáticos, lógicos, geométricos, algorítmicos, etc., es inagotable, y el desafío de composición de juegos hace que el gran trabajo conceptual de fondo se haga muy llevadero gracias a que la motivación se fortalece notoriamente. Juega, pero también crea nuevos juegos y compártelos con la comunidad de GeoGebra. Todos podremos divertirnos más (y aprender más) gracias a ti.

Diego Lieban

Fabián Vitabar Vaz

suma+ 90
Secciones
Marzo 2019
pp. 57-64

Katherine Johnson, una matemática estelar con la que construir problemas

Ignacio López Mendive
Juan Miguel Ribera Puchades

En matemáticas, o estás en lo cierto o estás equivocado.
Eso es lo que más me gusta.
Katherine Johnson



Katherine Coleman Johnson (1966) en su puesto de trabajo de la NASA realizando cálculos simplemente con la ayuda de un lápiz, un papel y una calculadora manual
Fuente: Wikimedia Commons

Mujeres matemáticas: rompiendo moldes

La noche del lunes 20 de julio del año 1969 una nación, un continente, el planeta entero, tenía su atención posada en la Luna. Y es que millones de personas fueron testigos de cómo, tras cuatro días de misión espacial a bordo del Apolo 11, Neil Armstrong acababa de posar su pie en el satélite natural de la Tierra. En concreto, frente a una pequeña televisión en blanco y negro, en un complejo vacacional en las montañas de Pocono al noreste de Pensilvania (EE. UU.), un grupo de mujeres afroamericanas celebraban dicho triunfo como si suyo se tratase. Entre ellas, sentada en una esquina del sofá, se encontraba una mujer callada, aparentemente nerviosa, y en cuyos pensamientos se decía a sí misma: «Tranquila, has hecho los cálculos y sabes que son correctos, pero puede pasar cualquier cosa». Ella era la matemática y científica, Katherine Johnson.

Esta eminencia, apodada cariñosamente por la NASA[1] como «la chica que todo lo contaba», ha cumplido, el pasado 26 de agosto de 2018, nada más y nada menos que 100 años. Un siglo de lucha y superación debido a su condición de mujer negra, en una sociedad arraigada por el segregacionismo y el machismo. Gracias, en gran parte, a sus conocimientos en matemáticas y física, y debido a su carisma y curiosidad, logró hacerse un hueco entre las altas esferas de una agencia tan importante

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2018 y aceptado en enero de 2019

como es la NASA, llegando a participar en proyectos de gran envergadura como es el *Proyecto Mercury* y el vuelo del Apolo 11 a la Luna.

Toda una calculadora humana

Nacida en White Sulphur Springs (estado de Virginia, EE. UU.), hija de un padre leñador y una madre profesora, fue la más joven de cuatro hermanos. Desde bien pequeña mostró un gran interés por las matemáticas. Así describe Margot Lee Shetterly, en su libro *Hidden Figures* (2016) los orígenes de la inquietud de la joven Katherine, por los números:

> Contaba todo. Contaba los pasos hasta la calle, los pasos hasta la iglesia, el número de platos que lavaba... Cualquier cosa que se pudiera contar, la contaba.

Debido a las leyes de segregación racial, toda la familia tuvo que mudarse al condado vecino de Kanawha (estado de Virginia Occidental, EE. UU.) para que ella y sus hermanos pudieran continuar con sus estudios en el Instituto Estatal de Virginia Occidental para estudiantes negros. Su precoz talento por las matemáticas se desarrolló hasta tal punto que consiguió graduarse en la enseñanza secundaria de manera prematura, accediendo a la Universidad Estatal de Virginia Occidental[2] a la edad de 15 años. En 1937 Katherine se graduó con una licenciatura *summa cum laude*, especializada en matemáticas y francés.



Figura 2. Katherine Johnson adolescente

Katherine recuerda con muchísimo cariño a varios de sus profesores. Entre ellos destaca, la química y matemática, Angie Turner King como «una maestra maravillosa, brillante, cariñosa y muy rigurosa» (Warren, 1999). Esta ejerció una tremenda influencia sobre Katherine, inculcándole el amor por las matemáticas, el cual ha demostrado durante todos los días de su vida. Por otro lado, el matemático W. W. Schieffelin Clayton pronto detectaría el talento de Katherine, incluso llegó a crear cursos de geometría analítica especialmente para ella.

> Muchos profesores te dicen que serías buena en esto o en lo otro, pero no siempre te ayudan durante el proceso. El profesor Clayton se aseguró de que estuviera preparada para ser una buena investigadora matemática.

Tras finalizar sus estudios, Katherine se mudó a Marion (estado de Virginia, EE. UU.), donde comenzó a trabajar como profesora de matemáticas, francés y música. Fue entonces cuando encarnó en primera persona las consecuencias de la segregación racial y el racismo de la época. Según sus propias palabras (2015):

> El racismo en Virginia Occidental era menos flagrante que en Virginia. Como tal, me sorprendí cuando al viajar a Virginia desde Virginia Occidental, el autobús se detuvo y nos pidió a todos los negros que nos moviéramos hacia atrás... me negué a moverme hasta que finalmente me lo pidió de manera cortés.

De hecho, Katherine nunca se ha quedado callada frente a las desigualdades sociales, optando por tomar una postura negativa ante la idea de ser considerada inferior. Jamás se le olvidarán las palabras que su padre le enseñó de joven:

> Eres tan buena como cualquiera en esta ciudad, pero no eres mejor.

En 1939, tras casarse, abandonó la enseñanza para formar una familia. De hecho, sus tres hijas siguieron el ejemplo de su madre convirtiéndose en excelentes profesoras de matemáticas. En 1940 fue la única mujer, de los tres estudiantes afroamericanos seleccionados, para realizar estudios de postgrado en la Universidad Estatal de Virginia Occidental. Sin embargo, debido a causas familiares tuvo que rechazar la plaza, renunciando a su sueño de formar parte en el campo de la investigación matemática.



Figura 3. Katherine Johnson y sus hijas Constance (fallecida en 2010), Katherine y Joylette (foto tomada en 1950)

Una mujer especial y «espacial»

Trece años después (1952), en el salón de una pequeña casa en Newport News, Virginia (EE.UU.), se celebraba una de las habituales reuniones familiares a las que solía acudir Katherine Johnson junto a su familia. Durante la hora del té, uno de sus familiares más cercanos le informó sobre algo que cambiaría su vida para siempre: «La NACA[3] está buscando mujeres matemáticas afroamericanas para trabajar en sus instalaciones». Katherine sintió que esta era una oportunidad que debía aprovechar para demostrar su talento, por lo que motivada se decidió a solicitar un puesto.

Pese a poder optar a una plaza de trabajo fijo como docente, decidió cambiar el rumbo de su vida laboral. En 1953 Katherine comenzó a trabajar como «calculadora»[4] en la sección *Colored Computers* —que literalmente quiere decir «calculadoras de color»— dentro del Departamento de Navegación y Guiado. Y es que los temas de astronomía y aeronáutica no eran desconocidos para ella, ya que durante su paso por la escuela secundaria ya comenzó a interesarse por dichos asuntos. Este interés surgió debido a que caminaba de vuelta a casa todas las noches con el director de la escuela, el cual le señalaba estrellas y constelaciones.

Durante cinco años desempeñó de manera sobresaliente su labor en la realización de cálculos. En 1958 la NACA pasó a llamarse la NASA. No solo cambió el nombre de la agencia espacial más importante del mundo, sino que se produjeron varias reformas en cuanto a su funcionamiento interno. Hasta entonces la segregación racial dentro de dicha institución estaba a la orden del día, hasta tal punto de que había una abismal separación entre blancos y negros. Por aquel entonces, las personas negras trabajaban y comían en espacios separados, incluso hasta debían usar aseos distintos a las personas blancas. Katherine Johnson sabía que la discriminación racial existía dentro de la NACA, aun así, aseguraba que «no tenía tiempo para eso». Ella no daba importancia, entre otras cosas, a que sus compañeros blancos le hicieran utilizar otra cafetera, su principal objetivo era realizar cálculos lo más precisos posible.

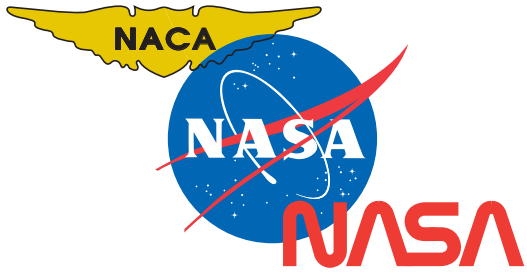


Figura 4. Tri-Logo NACA-NASA (Fuente: NASA)

Tras la transición de la NACA a la NASA, la segregación racial acabó, sin embargo, todavía existía discriminación hacia las mujeres. Por ello, el machismo fue uno de los aspectos claves con el que Katherine tuvo que luchar. Y se puede afirmar con seguridad que luchó y además venció. Puede que sus avanzados conocimientos matemáticos en geometría hicieran de ella una figura imprescindible para la NASA; pero su curiosidad, su constancia en el trabajo y su afán de superación personal, fueron claves para sobrepasar las barreras de género establecidas en la agencia espacial, fuertemente condicionada por la sociedad falocrática de la época.

[...] la segregación racial acabó, sin embargo, todavía existía discriminación hacia las mujeres. Por ello, el machismo fue uno de los aspectos claves con el que Katherine tuvo que luchar.

Uno de los aspectos discriminatorios contra la mujer, que Katherine fue capaz de vencer, fue el no poder acudir a reuniones informativas a las que solo asistían ingenieros varones. En

una entrevista (2013), Katherine se refería a esta situación de la siguiente manera:

> Las mujeres hacían lo que les decían [...] No preguntaban o iban más allá. Yo preguntaba; quería saber por qué. Se acostumbraron a que hiciera preguntas y que fuera la única mujer allí.

Tuvo que lidiar con malas caras y comentarios ofensivos por parte de sus compañeros varones blancos. Ante las críticas, Katherine, con la cabeza bien alta, alegaba:

> Yo he hecho el trabajo que me han pedido y tengo derecho a estar presente.

Otro de los aspectos discriminatorios contra la mujer era la incapacidad de firmar informes científicos, fuera cual fuera su grado de implicación. Ella cuenta que «en los primeros días de la NASA, a las mujeres no se les permitía poner sus nombres en los informes. Y que ninguna mujer de su división tenía su nombre en un informe». En este punto, nuestra protagonista jugó un papel de vital importancia, ya que fue la primera mujer en poner nombre y apellidos a un informe científico en la NASA,—el primero de un total de 21 documentos—.

> Terminé el informe y puse mi nombre. Esa fue la primera vez que una mujer en nuestra división tuvo su nombre en algo.

Dicho informe trataba sobre *la determinación del ángulo de azimut en el agotamiento para colocar un satélite sobre una posición concreta de la Tierra*. Este contenía la información necesaria que permitió calcular la trayectoria espacial, utilizada en el vuelo de Alan Shepard en mayo de 1961 —el primer estadounidense en llegar al espacio— y el vuelo de John Glenn en febrero de 1962. Era tal la fama de Katherine dentro de la NASA, que el propio Glenn pidió que los cálculos realizados por las computadoras fueran comprobados por Katherine, negándose a volar en caso contrario. «Si ella dice que los números son buenos, estoy listo», dijo Glenn según Margot Lee Shetterly, haciendo alusión a Katherine.

Cabe destacar dos de los proyectos más ambiciosos en los que la NASA se ha embarcado a lo largo de su historia, y en los que Katherine Johnson, debido a su talento matemático, ha participado de manera activa. El primero de ellos fue calcular la trayectoria del Apolo 11 (1969), el cohete que llevaría al primer hombre a la Luna. Y el segundo fue la misión del Apolo 13 (1970), que tras un inesperado giro de los acontecimientos fue abortada, siendo la ayuda de Katherine fundamental para que la tripulación volviera sana y salva a la Tierra, a través de la implementación de procedimientos y cartas de navegación. Por ello se puede afirmar que Katherine Johnson es toda una heroína.



Figura 5. Katherine Johnson en el Centro de Investigación Langley de la NASA en 1980 (Fuente: NASA)

Durante los años siguientes trabajó en el programa *Space Shuttle* y en planes de misión a Marte hasta su jubilación en 1986. Katherine, fiel defensora del trabajo duro, pero sobre todo de disfrutar y poner pasión en lo que uno hace, recuerda nostálgica, orgullosa y casi emocionada:

> Yo fui a trabajar contenta cada día durante 33 años. Nunca me levanté un día y dije: no quiero ir a trabajar.

La figura oculta que salió a la luz

Durante sus últimos años en la NASA, Katherine fue premiada con seis Premios Especiales al Logro y el premio al equipo *Lunar Orbiter*. Un homenaje efímero en comparación con el talento, el trabajo y las aportaciones realizadas por esta excepcional mujer.

Su listado de méritos y reconocimientos a una vida de completa dedicación no había hecho más que empezar. En 1997 fue nombrada matemática

del año por la National Technical Association. A su vez fue honrada con dos títulos honorarios de doctora en Ciencias, uno por la Universidad Capitol de Maryland (EE. UU.) y otro por la Universidad Old Dominion de Virginia (EE. UU.). El 4 de junio de 1998 recibió el título honorario de doctora en Derecho por la Universidad Estatal de Nueva York (EE. UU.), y se le dedicaron las siguientes palabras:

> Has elevado nuestros corazones y mentes a las estrellas. Tu genio en matemáticas y física ayudó a eliminar las barreras físicas y contribuyó enormemente a colocar al primer astronauta estadounidense en el espacio. Te has enfrentado a los obstáculos impuestos por las fuerzas de la naturaleza y has ayudado a lanzar a nuestro país hacia la frontera espacial. Por tu contribución como pionera en la tecnología aeroespacial y tu búsqueda continua de la excelencia en la educación, la Universidad Estatal de Nueva York en Farmingdale le confiere orgullosamente a usted, Katherine Johnson, el prestigioso grado de doctora en Derecho, honoris causa.

En 1999 Katherine fue nombrada como una de las exalumnas más destacadas del lugar donde estudió, la Universidad Estatal de Virginia Occidental, a la cual siempre estará muy agradecida. No será hasta el 16 de noviembre de 2015, cuando fue condecorada con la Medalla Presidencial a la Libertad [5] —siendo hoy en día, la única mujer de la NASA que la ha recibido—, concedida por el entonces presidente de los Estados Unidos, Barack Obama. Este ha sido el premio más importante que ha recibido a lo largo de su carrera.



Figura 6. Katherine Johnson recibiendo la Medalla de la Libertad de manos del presidente Barack Obama

Hoy en día, Katherine, además de practicar actividades de ocio como jugar a las cartas, realizar algún rompecabezas y ver los deportes en la tele, se dedica a dar charlas entre jóvenes, especialmente mujeres, sobre la importancia de luchar por los sueños por encima de todo, animándolas a que estudien ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, ya que fielmente defiende que:

> Algunas cosas desaparecerán de nuestra vista, pero siempre habrá ciencia, ingeniería y tecnología. Y siempre, siempre, habrá matemáticas.

Del papel a la gran pantalla

El 6 de septiembre de 2016 se publicó, en las librerías de medio mundo, un libro en cuya portada aparecía escrito *Hidden Figures* —cuya traducción al español es *Figuras Ocultas*—, junto a una imagen de tres mujeres negras, aparentemente desconocidas. En él, Margot Lee Shetterly, nos relata la historia de tres «calculadoras» que cambiaron el rumbo de la NASA y de un país entero. De hecho, estas mujeres son las matemáticas afroamericanas Dorothy Vaughan, Mary Jackson y nuestra querida protagonista, Katherine Johnson. Dos meses más tarde, se estrenó la película, del mismo nombre, dirigida por Theodore Melfi, la cual ha sido muy aclamada por la audiencia. El director comentó en una entrevista (2017) que «para él no es una película negra ni blanca, simplemente es una película que muestra la vida de tres mujeres increíbles».

Una experiencia docente de película

Uno de los factores que más nos ha sorprendido en la formación para la docencia ha sido el desconocimiento de mujeres matemáticas por parte del alumnado, reconociendo únicamente a figuras masculinas como Pitágoras y Descartes. Motivados por la preocupación hacia la situación de la figura de la mujer en la sociedad actual y por los diferentes movimientos feministas [6], decidimos aportar nuestro pequeño granito de arena a la causa. Para ello, a través de recursos existentes que pretenden visibilizar el papel de la mujer a lo largo de la historia de las matemáticas, es posible trabajar contenidos matemáticos que puedan ser aplicados en la enseñanza con el interés aña-

dido de sensibilizar y concienciar al alumnado sobre la igualdad de género. Asimismo, de manera global, pretendemos orientar la educación y enseñanza de cualquier materia a través de la empatía, la tolerancia y el respeto, dotando a los alumnos y alumnas de un sentimiento crítico que les permita detectar, juzgar y rechazar cualquier tipo de discriminación hacia la mujer.

La visualización de la película *Hidden Figures* nos inspiró y emocionó de tal manera que, la gran Katherine Johnson, pasó de ser una «figura oculta» para convertirse en un referente. Es por ello que nos sentimos en la obligación de dar a conocer al alumnado en particular, y la comunidad matemática en general, la figura de Katherine.

Otro factor que nos motivó a tomar parte en la educación en la igualdad fue la existencia de numerosos problemas en colecciones y libros de matemáticas que escondían micromachismos.

Otro factor que nos motivó a tomar parte en la educación en la igualdad fue la existencia de numerosos problemas en colecciones y libros de matemáticas que escondían micromachismos. En la literatura nos podemos encontrar problemas en los que siempre es una mujer la que hace la compra, la que más gasta de toda la familia o la que se ocupa de las tareas del hogar. La mujer también suele aparecer reflejada en menor proporción respecto al hombre en problemas estadísticos relacionados con la educación, las oportunidades o el empleo. Estos contextos presentes en los problemas de matemáticas facilitan la normalización social de situaciones en las que la mujer no está representada en las mismas condiciones que el hombre. Es por ello por lo que se crea la necesidad de plantear nuevos contextos que remarquen el papel de la mujer en los avances científicos.

Por todo ello, planteamos la necesidad de crear nuestros propios problemas contextualizados en las figuras matemáticas que siguen ocultas para nuestro alumnado pero que también deben ser visibilizadas. Una de las protagonistas de la propuesta que planteamos es Katherine Johnson.

Preparando el contexto

Para la implementación de nuestra propuesta, no solo es importante la creación de problemas contextualizados en la vida de Katherine, sino la contextualización de esos problemas dentro de la unidad didáctica.

La manera de llevarlo a cabo en el aula es bastante intuitiva. Comenzamos con una breve introducción de la situación histórica en la que nació y vivió Katherine Johnson, seguido de una explicación biográfica, la cual nos permite presentar a nuestra protagonista. En tercer lugar, procedemos a la realización del problema contextualizado, contando en todo momento con la participación del alumnado. Finalmente contamos curiosidades, logros y otros datos de interés sobre Katherine, lo que permitirá que nuestra protagonista permanezca grabada en las mentes de nuestros alumnos, al menos por una larga temporada.

La propuesta que hemos planteado basada en Katherine puede ser adaptada a otros contenidos, cursos y personajes históricos femeninos. Asimismo, la estructura de la propuesta que presentamos permite atender a la diversidad del aula y el trabajo en las diferentes competencias LOMCE[7].

Las derivadas, el camino hacia la Luna

Una vez en el aula, presentamos a nuestra protagonista contando algunos datos sobre su vida que pudieran llamar la atención del alumnado. Resultan muy interesantes para ellos, pero sobre todo para ellas, algunas de las anécdotas sobre su vida y estancia en la NASA, como por ejemplo que fuese considerada toda una «calculadora humana», o las veces que tenía que caminar para acudir al aseo para personas negras, el cual se encontraba a más de un kilómetro del ala donde trabajaba.

Posteriormente, les proponemos el siguiente problema titulado: *Las derivadas, el camino hacia la Luna*. Esta actividad en concreto, la dirigimos a alumnos de 1.º de Bachillerato Científico/Tecnológico. Con ella pretendemos trabajar la unidad didáctica Cálculo de derivadas y sus aplicaciones. Estructuramos el problema en dos partes, una primera en forma de problema de optimización; y una segunda basada en el cálculo de la recta tangente a una cónica —en concreto una elipse— mediante el uso de derivación implícita.

Las derivadas, el camino hacia la Luna (Primera parte)

La NASA ha encomendado a Katherine Johnson una tarea muy importante que va a ser crucial para la misión de enviar el primer hombre a la Luna.
En la construcción del Saturno V, el cohete usado en la misión Apolo 11, la nave con la cual Neil Armstrong logrará alcanzar el satélite, son necesarios costosos materiales y arduos cálculos matemáticos. En particular la parte más cara del proyecto es el tanque de combustible de la nave que es un recipiente cilíndrico cuya capacidad es de 160 millones de litros de hidrógeno líquido como el que aparece en la figura 7. La tarea encomendada a esta gran matemática es calcular las dimensiones del tanque de combustible para que los materiales utilizados en su construcción sean mínimos. ¿Cuál debe ser el área del tanque?

Las derivadas, el camino hacia la Luna (Segunda parte)

Tras el exitoso despegue del Apolo 11, toda la NASA está de celebración, incluida Katherine Johnson, ya que sin ella esta misión no hubiera sido posible. ¡Un momento! Parece que algo va mal. Durante el despegue la nave ha perdido combustible, debido a una fuga en el depósito. La única manera de que la expedición lunar continúe su rumbo es haciendo que la nave de una vuelta completa a la órbita alrededor de la Tierra y así, gracias a las fuerzas gravitacionales del planeta, coja el impulso necesario para llegar hasta la Luna.
De inmediato, el jefe de la NASA se acerca a Katherine y le pide que realice las tareas de cálculo necesarias para recalcular la nueva trayectoria de la nave. Esta sin perder un instante de tiempo, saca un mapa de coordenadas de un cajón y se pone a recopilar algunos datos.
La órbita alrededor de la Tierra tiene la forma de una elipse. Sabemos que la Tierra está centrada en el punto de coordenadas espaciales $C(5, 1)$ y los focos se corresponden con dos observatorios espaciales que la NASA dispone en el ecuador terrestre. Uno situado en el punto más al este $E(3, 1)$ y el otro en el punto más al oeste $O(7, 1)$ del globo terráqueo. Sabemos que actualmente la nave se encuentra en órbita, ya que manda señales de alerta a ambos observatorios. Tras analizar las señales, se sabe que la distancia del punto de la órbita, donde se encuentra la nave, al foco del este es de 2 unidades, y la distancia al foco del oeste es de 6 unidades.

- Calcula la ecuación de la órbita elíptica en la que se encuentra la nave. Indica todos los elementos de la elipse. Haz un dibujo aproximado.
- ¿En qué punto de la órbita elíptica se encuentra la nave?
- Para que la nave llegue a la Luna siguiendo una trayectoria recta y tangente, esta debe desengancharse de la órbita elíptica en el punto de abscisas $x = 3$. ¿Es única la recta tangente? Calcula la ecuación de las posibles rectas tangentes.
- Katherine sabe que a esta hora del día y en esta época del año, la Luna se encuentra sobre el eje de abscisas. Si sabemos que la nave orbita alrededor de La Tierra en sentido positivo, y se desengancha de la órbita en el punto de abscisas $x = 3$, calcula las coordenadas espaciales de la Luna.

Tras restablecer todos los datos y las trayectorias, la misión espacial concluyó de manera exitosa. Los astronautas consiguieron llegar a su destino y volver a la Tierra sanos y salvos. El astronauta Neil Armstrong dedicó a Katherine unas palabras desde la Luna: «¡Es un pequeño paso para las matemáticas, pero un gran paso para la figura de la mujer en la ciencia!».

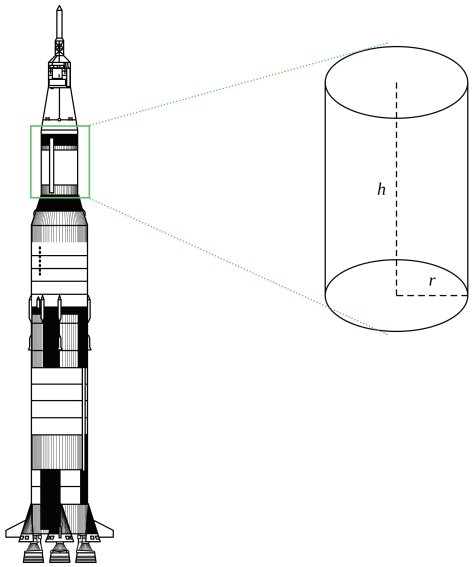


Figura 7. El cohete Saturno V utilizado durante la misión Apollo 1 (Fuente: Wikimedia Commons)

Katherine Johnson es una mujer que dedicó gran parte de su vida al estudio de las matemáticas, en concreto aquel relacionado con el cálculo y la astronomía. Por tanto, puede ser la protagonista de problemas contextualizados de diversas unidades didácticas dentro de los distintos cursos de ESO y Bachillerato, por ejemplo referidas a los contenidos sobre gráficas y funciones, movimientos en el espacio, ecuaciones, sucesiones y límites, etc. Principalmente aquellas unidades didácticas pertenecientes al bloque de Geometría analítica y Análisis.

Matemáticas para un mundo mejor

Con una inconmensurable pasión por las matemáticas, gracias a las cuales logró acabar con las barreras raciales y de género, Katherine Johnson es considerada una leyenda de los viajes espaciales. Fue capaz de «tocar la Luna», simplemente con la ayuda de un lápiz, un papel y una calculadora.

Hemos tenido la suerte de conocer y dar a conocer a esta mujer, trabajar contenidos matemáticos, y de manera indirecta, transmitir al alumnado, todo aquello que no está escrito en los libros, con el objetivo de acabar con los estereotipos que siguen condenando a la mujer a la sombra del hombre.

Cabe destacar que los resultados conseguidos durante la aplicación de la propuesta fueron más que satisfactorios. Por este motivo, pretendemos animar y motivar a todos los docentes a divulgar el papel de las mujeres matemáticas en el aula, ya que, contribuyendo en la difusión de estos valores, y promoviendo la visibilidad de estas personalidades, finalmente lograremos sacar a la luz sus contribuciones y aportaciones a la ciencia, analizar su influencia y desarrollo en la historia de las matemáticas y, por supuesto, conseguir que la lucha por la igualdad de género deje de ser una batalla y pase a ser historia.

Referencias bibliográficas

Deiss, H. S. (2015), «Katherine Johnson: A Lifetime of STEM», NASA Educational Technology Services, EE.UU.,
<https://www.nasa.gov/audience/foreducators/a-lifetime-of-stem.html>.

Hughes, J. (2015), «Katherine Johnson: Space scientist», The Heroine Collective, United Kingdom.
<http://www.theheroinecollective.com/katherine-johnson-space-scientist/>.

López, A. (2016). «Katherine Johnson: La calculadora humana», Mujeres con Ciencia, País Vasco, España.
<https://mujeresconciencia.com/2016/12/12/katherine-johnson-la-calculadora-humana/>.

O'Connor, J. J., y E. F. Robertson (2016), «Katherine Coleman Goble Johnson», *MacTutor History of Mathematics*, octubre University of St Andrews.
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Johnson_Katherine.html>.

Pereda, C. F. (2016), «El arma secreta de Estados Unidos en la carrera espacial», *El País,* 10 de septiembre de 2016.
<https://elpais.com/elpais/2016/09/09/ciencia/1473440241_066243.html>.

Pérez-Torres, M. A. (2018), «Katherine Johnson y las figuras ocultas de la NASA», *Información y Actualidad Astronómica*, n.º 54, 9-10.

Shetterly, M. L. (2016), *Hidden figures: The American Dream and the Untold Story of the Black Women Mathematicians Who Helped Win the Space Race* (first edition), William Morrow, an imprint of HarperCollins Publishers, Nueva York.

Warren, W. (1999), «Katherine Coleman Goble Johnson», en *Black Women Scientists in the United States*, Indiana University Press, 140-147.

Ignacio López Mendive
Universidad de La Rioja
<iglopem@gmail.com>

Juan Miguel Ribera Puchades
Universidad de La Rioja
<juan-miguel.ribera@unirioja.es>

1 NASA: National Aeronautics and Space Administration (Administración Nacional de la Aeronáutica y el Espacio, EE. UU.)

2 Tanto el Instituto Estatal de Virginia Occidental como la Universidad Estatal de Virginia Occidental pertenecían al mismo distrito.

3 NACA: 1915-1958. Comité Consultivo Nacional para la Aeronáutica (EE. UU.), fue el antecesor de la NASA.

4 Las Calculadoras de la NASA: Eran mujeres de color que se dedicaban a realizar arduas y tediosas operaciones matemáticas simplemente con lápiz, papel y calculadoras mecánicas, ya que los ordenadores en aquel entonces brillaban por su ausencia.

5 La Medalla Presidencial a la Libertad es la condecoración más valiosa que un civil puede recibir en EE. UU.

6 Día de la Mujer, 8 de marzo. Día Internacional de la Mujer y la Niña en la Ciencia, 11 de febrero.

7 LOMCE: Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa.

suma+ 90
Secciones
Marzo 2019
pp. 65-72

De lo que dejan los eventos

MMACA

Desde la última entrega a *Suma*, dos eventos importantes han sucedido alrededor del MMACA:

Encuentro Mates 0-8 años, organizado con el Cesire-CREAMat y eXplorium.

Conferencia MATRIX, encuentro internacional bianual entre Museos y divulgadores de matemáticas.

Mates 0-8

Invitamos a unas cuarenta expertas que en Cataluña están llevando experiencias interesantes (el uso del colectivo femenino responde al hecho que la presencia masculina representaba menos del 10 % mínimo previsto por la Ley de Usurpación de Género).

Extendimos la invitación a amigas de fuera de Cataluña, pero finalmente, por razones de calendario o personales, no vinieron.

Desde el MMACA queríamos someter a un análisis crítico tres materiales:

—Una exposición pensada para un público de 3 a 8 años en el ámbito del proyecto Erasmus+ «MathSpaces».

— Nuestra exposición y taller dirigidos al alumnado de 6 a 8 años.

Del MMACA al aula

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2018 y aceptado en enero de 2019

— Los módulos de la maleta didáctica para niños de 5 a 9 años que estaremos pilotando este año escolar.

Sabíamos que el debate en torno de la educación matemática para los niños más pequeños es muy vivo e interesante, de manera que decidimos abrir el encuentro a estas realidades, tanto a nivel teórico como ofreciendo la posibilidad de presentar proyectos que se están realizando.[1]

La intención era empezar a razonar conjuntamente y mirar, cada uno desde su punto de vista, el trabajo de los otros, intentando superar



Figura 3. Parte de los materiales del proyecto «MiniMons», de la Escuela EBM Can Caralleu

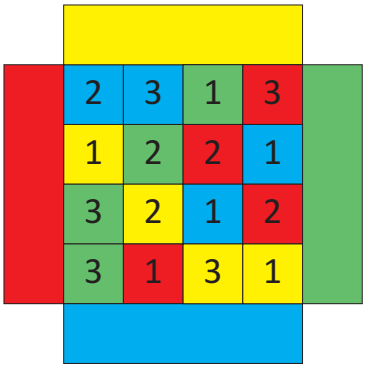


Figura 1. El diseño del laberinto pensado para la Exposición 3-8 del proyecto «MathSpaces»

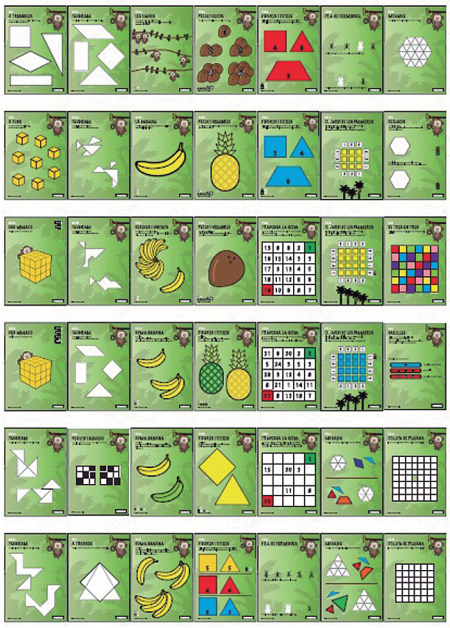


Figura 2. 42 tableros previstos para la maleta didáctica del MMACA para el alumnado de 5 a 9 años

las barreras que a menudo encontramos entre las diferentes etapas de la educación formal.

Tampoco se puede afirmar que el desconocimiento recíproco sea el principal problema y que, una vez reunidos en torno de un material y a discutir buenas prácticas, de golpe se abran horizontes despejados y caminos cubiertos de pétalos de rosa. En todo caso, un momento de encuentro es fundamental para empezar a reconocer límites y dificultades, pero también establecer unos paradigmas compartidos que nos permitan identificar las características peculiares de cada fase evolutiva del aprendizaje y remover falsos obstáculos.

¿Podía ser el museo el lugar de este encuentro? De todas maneras, merecía la pena probarlo.

Lógicamente, nuestros usuarios abarcan todas las edades y nos permiten ver cómo se desarrollan, muchas veces de forma espontánea e imprevista, intereses y habilidades, pero, especialmente de cara al público escolar, se impone determinar contenidos y modalidades idóneas.

La gestión del tiempo y del espacio, de las intervenciones de la educadora, de los estímulos y las emociones, de la autonomía y del diálogo, entre usuarios y con los materiales (dimensiones, consistencia, estética, instrucciones…), de las dinámicas (¿libre exploración o taller guiado?) siguen representando núcleos de discusión que necesitan de un proyecto de largo plazo y de experimentación.

De hecho, se propuso la creación de una Comunidad de Práctica, pero es necesario que se forme un pequeño grupo impulsor.

En las próximas semanas, una vez cerradas las urgencias del MATRIX, será necesaria una reunión estratégica, para decidir si hay camino y, más aún, si hay caminantes.

Conferencia MATRIX (Mathematics Awareness, Training, Resource & Information eXchange)

Hemos aprovechado el encuentro de julio para proponer en uno de los Grupos de Conversación el tema de cómo contribuir al desarrollo de las matemáticas en niños menores de 8 años. Existen experiencias que muestran cómo, creando contextos ricos y motivadores, adecuados a la edad, los niños pueden hacer grandes progresos. Reconocer en situaciones cotidianas y de juego, dónde y cuándo se dan pasos en la construcción del primer conocimiento matemático y mantener una intervención por parte del adulto que promueva y acompañe las actuaciones del niño sin interferir en sus indagaciones es clave para potenciar sus posibilidades.



Figura 4. Materiales del MMACA presentados a MATRIX



Figura 5. Algunas de las sorprendentes creaciones de R. Roelofs

Esta es una etapa que merece más atención y reconocimiento y representa un desafío muy interesante para las comunidades que se dedican a la educación, tanto reglada como no reglada. Son desafíos que no se limitan a aspectos de forma o de método, sino que cuestionan la propia manera de aprender.

Deseamos que el debate continúe, tanto en las siguientes ediciones de la Conferencia MATRIX, como en el ámbito local (JAEM, C^{2}EM, CdP…).

Pero, este solo era uno de los dieciséis Grupos de Conversación que el encuentro ofrecía. Organizados en el formato PechaKucha, con intervenciones breves y mucha conversación, intentaban profundizar unos temas candentes para los museos (Big Data y evaluación del impacto social) propuestos por las Conferencias Plenarias Inspiradoras. Las Conferencias Plenarias Abiertas al público en general trataban de la relación de las matemáticas con el arte y su uso para determinar patrones y procesos automáticos, su formulación y corrección.

Además, una sección de póster y 22 mesas con materiales, tangibles y virtuales, permitían hacerse una idea de los proyectos que se están desarrollando en algunos de los 15 países representados en el MATRIX.

Acabo este breve resumen de lo ocurrido, señalando unas iniciativas que pueden ser útiles para los lectores de *Suma*.

1. Hay un gran interés por parte de los museos de ciencias y tecnología para realizar exposiciones de matemáticas, tanto a nivel internacional como en el estado español. Valladolid acaba de inaugurar una sala de matemáticas en su Museo de la Ciencia[2]. Algo se mueve en Madrid, a raíz del éxito de Matemáticas en la Calle y hay fermento en A Coruña, que las inminentes JAEM

podrían ayudar a que se traduzca en algo más concreto.

Basándonos en la experiencia del MMACA, la realización de un espacio expositivo permanente significa un incremento determinante en el impacto social y un impulso decisivo para el desarrollo de otras actividades: talleres, exposiciones temporales, colaboraciones con otras entidades y las vocaciones científicas.

2. Es esencial trabajar en redes, locales e internacionales. Existen ya proyectos muy interesantes, como el DIMA[3], red de divulgadores de matemáticas del Estado español; la página de Imaginary[4], que ofrece un panorama exhaustivo de todo lo que pasa en el mundo alrededor de las matemáticas; iniciativas para involucrar en torno de las matemáticas las escuelas de todo un país, como la Math Week de Irlanda[5], o de todo el mundo, como es el caso de la Global Math Week, cuyos materiales, Exploding Dots[6] están disponibles también en español.

   La idea es incluir en un gran proyecto estructurado estas iniciativas y las que se desarrollan en cada estado, diferentes por duración y modalidades, algunos ya con fecha y carácter internacional (día Pi, Martin Gardner Day), otros en ocasión de efemérides locales. Esto nos permitiría realizar intercambios de materiales, actividades y educadores, obtener otra visibilidad y suscitar el interés de las entidades políticas y económicas.

   Es necesario entonces ayudar al desarrollo de estos proyectos que representan puentes entre cultura y educación, formal y no-formal, y son semillas de un proyecto de educación permanente, de una comunidad educadora.

3. Haber contado con una ayuda profesional en el campo de la comunicación nos ha permitido un acceso extraordinario a los medios. Es una realidad que tenemos que tomar en consideración cuando organizamos nuestros eventos, como las JAEM o el C^{2}EM. Sin mínimamente desestimar el impacto que produce el carácter internacional del MATRIX, al final éramos 120 personas, cuando las JAEM reúnen a 800-900 docentes y el C2EM registró, en fechas difíciles (11-13 de julio) 600 docentes catalanes, valencianos y de Baleares.

4. Finalmente, todo lo contado hasta ahora es posible porque existe la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y en cada territorio del estado una Sociedad que sigue organizando, difundiendo, publicando actividades y materiales. Es una realidad de un valor inmenso, que no tiene comparación, por tamaño y arraigo, con ningún otro Estado. Tenemos que cuidarla y defenderla, darle la savia de la gente joven para que crezca aún más.

Para no dejar a nuestro único, pero fiel lector solo harto de palabras y falto de actividades, vamos a presentar unos pocos materiales que tienen alguna relación con los proyectos que hemos contado.

Laberintos

En la primera imagen de esta sesión aparecía un proyecto de laberinto que, desde el MMACA, diseñamos y realizamos para la exposición europea que nunca haremos.

Esto no quiere decir que no lo vayamos a disfrutar nosotros, a partir de la exposición que se ha inaugurado en Gerona en diciembre, acompañando de otros módulos de gran tamaño (un par de metros cuadros —o más— cada uno).

Pero, para entender cómo funciona, se puede perfectamente simular la actividad sobre las páginas de la revista.

Se puede empezar entrando en el laberinto por cualquiera de las celdas, tanto del contorno como del centro. Al final, y después de haber pasado por cada una de las celdas, acabaremos para volver a la celda por donde empezamos. Los números te dicen cuántos pasos debes dar y el color indica la dirección (fijaos en el color de los bordes).

La construcción es bastante más simple de lo que a primera vista parecería (otra cosa es hacerlo bonito, que necesita algún intento más).

Se empieza con un tablero vacío y se va rellenando de números en orden y sabiendo que podrás pasar al sucesivo solo con movimientos horizontales o verticales (nada de diagonal). Después se establece el color de los bordes. Y finalmente se substituye el número ordinal por el número de pasos necesario para llegar a la posición sucesiva y se colorea la celda del color oportuno (figura 6).

Permítenos insistir una vez más en la extrema utilidad de construir el material con nuestros alumnos. Todas sus competencias resultarán incrementadas notablemente, tanto como su autoestima e interés por la materia.

Diferente sería la construcción de un laberinto clásico, en el que se debe encontrar un camino para ir del centro a la salida (y se puede salir solo si llegas exactamente sobre la celda, y no si estás de paso).

Se empieza por un tablero vacío, decidiendo la celda de inicio, I (normalmente en el centro) y la de salida, F. Después se escoge un recorrido que nos permita resolver el reto y se marcan los pasos necesarios para pasar a la celda sucesiva. Y finalmente se ponen los otros valores, intentando no marcar demasiados caminos alternativos y ganadores, y procurando crear bucles o caminos sin salida (figura 7).

Si lo intentáis, comprobaréis que no es nada fácil, aun enfrentándonos a un laberinto de los más pequeños. Nosotros hemos realizado labe-

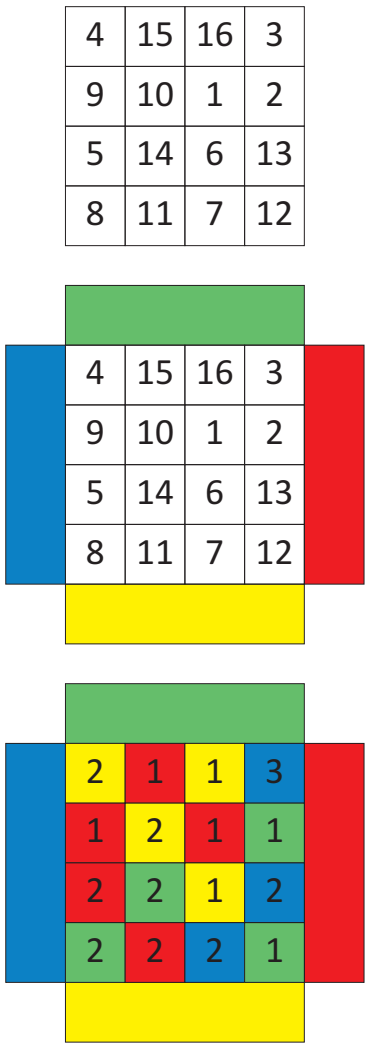


Figura 6. Fases de la construcción de un laberinto (fácil)

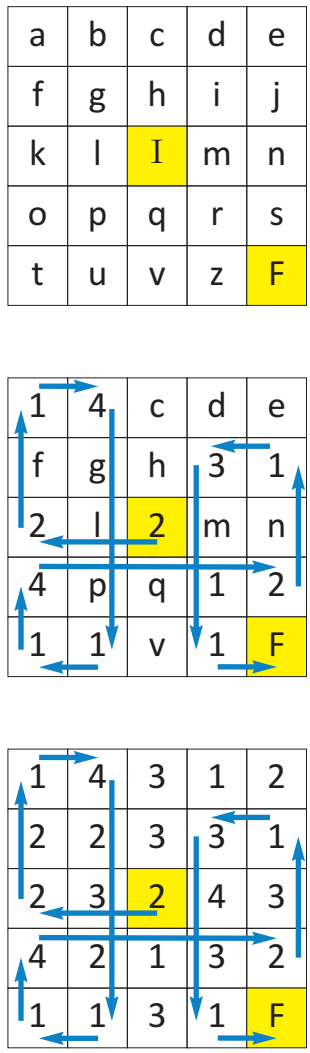


Figura 7. Fases de la construcción de un laberinto (difícil)

rintos de 7 × 7 y hasta de 10 × 10, ya que cuando empiezas es complicado parar y te vas poniendo retos cada vez más difíciles. De hecho, tenemos un proyecto preparado para una «Exposición Horizontal», o sea, basada en lonas y piezas en *foamy*. Si prosperan, como esperamos, las conversaciones con los compañeros gallegos que organizan las próximas JAEM, es muy posible que se pueda ver allí por lo menos una parte de este material.

Finalmente, se pueden introducir otras variaciones (de diseño, de código, de dimensiones…) para aumentar o disminuir la dificultad del reto.

Mosaicos

La construcción de mosaicos es otra actividad que se presta a ser transformada en módulo para la «Exposición Horizontal».

Empezó en forma de propuesta para el taller destinado a alumnos de 1.º y 2.º de Educación Primaria.

Después de unas pruebas para escoger el grado de dificultad, el diseño y la carga motivacional adecuados a la edad de nuestro usuarios, escogimos un tablero en forma de hexágono dividido en 24 triángulos equiláteros.

Los alumnos tienen a su disposición muchas piezas de madera de diferente color, forma y tamaño y el objetivo es llenar el hexágono (figura 8).[7]

Las variantes del puzle son muchas y lo interesante es justamente que se comparen y se discutan. Todo tipo de regla añadida puede ser interesante (número máximo de piezas que se pueden repetir, valor estético del puzle, simetría, solución con el menor número de piezas, retos: ¿Se pueden poner 4 hexágonos?…).

Y es una actividad que se puede adaptar a diferentes etapas escolares:

— Reconocer y asignar un valor a los polígonos (figura 9).
— Reconocer la relación entre las áreas de estos polígonos (figura 10).
— Construir números con figuras, buscando soluciones alternativas (figura 11).
— Construir formas (figura 12).
— Construir triángulos (figura 13).
— Reconocer la equivalencia de dos triángulos.

Es interesante comparar los distintos sistemas que se pueden utilizar para demostrar esta equivalencia:

— Analítico: comparando los 2 triángulos se puede ver que tienen la misma base y la misma altura (reconocer la altura en el

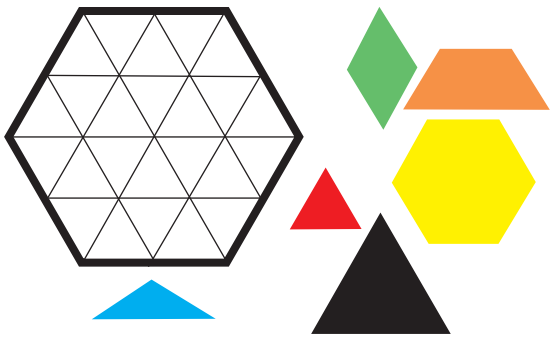


Figura 8. El diseño de una de las actividades de mosaicos del taller del MMACA para el alumnado de 6-9 años

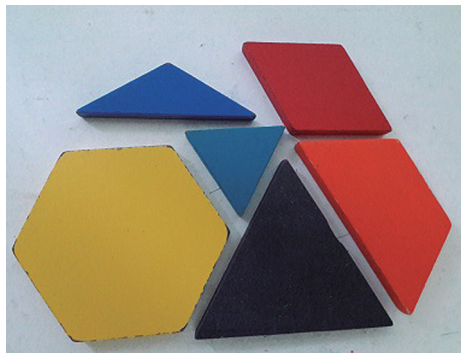


Figura 9. Las formas que usamos en nuestra propuesta

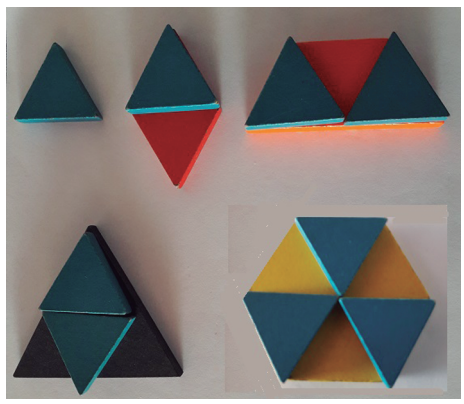


Figura 10. Área relativa a la del triángulo equilátero pequeño

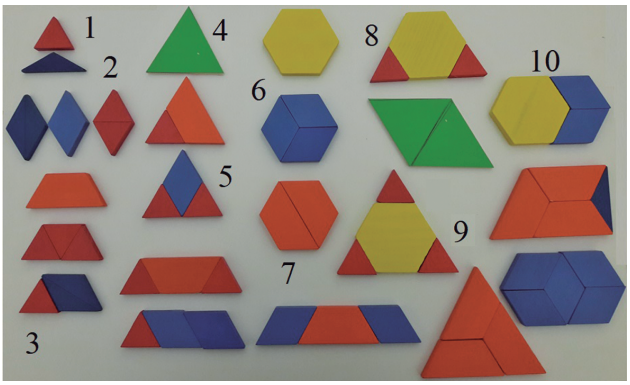


Figura 11. Construyendo números: la relación entre números y formas

triángulo isósceles obtusángulo tiene un gran valor) (figura 14).

— Analógico: el rombo se puede construir con 2 triángulos equiláteros o con dos triángulos isósceles obtusángulos.
— Jugar libremente con las formas y dejar que la fantasía sea el único horizonte (figura 15).
— Hacer composiciones de polígonos muy grandes (figura 16).

Puede ser una actividad colaborativa muy divertida y gratificante, ya que las posibilidades de

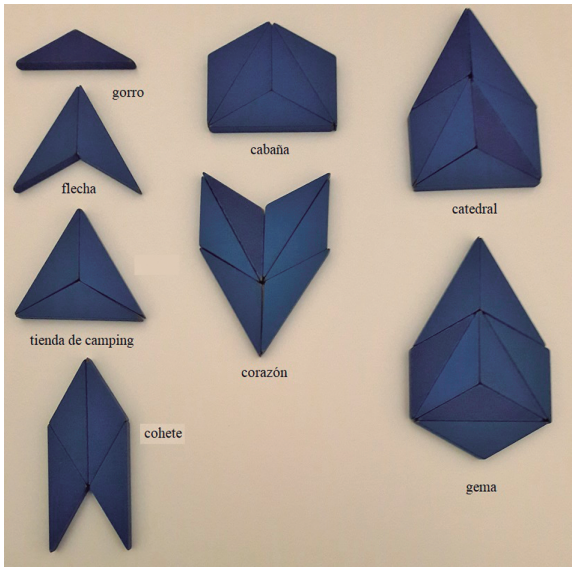


Figura 12. Construyendo formas crecientes basadas en un triángulo unitario

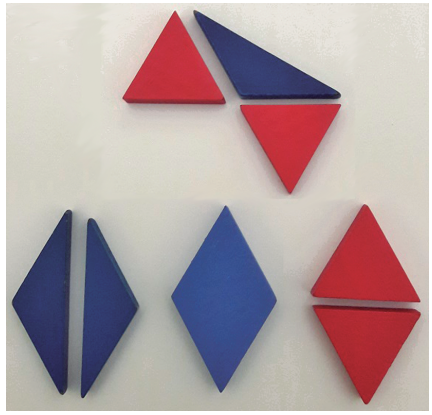


Figura 14. Triángulos equivalentes

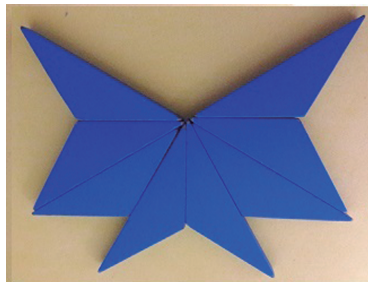


Figura 15. Mariposa

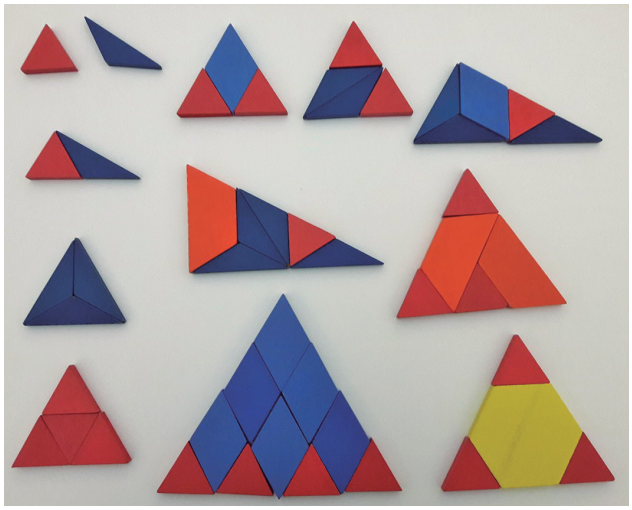


Figura 13. Construyendo triángulos

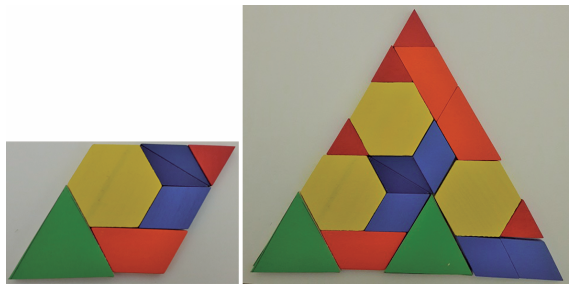


Figura 16. Composiciones

construir piezas, cada vez más grandes, son prácticamente infinitas.

Viendo el éxito que tenía la actividad del taller con estos materiales, decidimos diseñar unos módulos para la maleta de los pequeños (figura 17).

Por otro lado, esta actividad nos recordaba el taller que presentamos en las JAEM de Cartagena, basada en combinaciones de piezas que se inspiraban en los rombos que Penrose usaba para sus mosaicos no-periódicos (figura 18).

Sin añadir el reto de hacer coincidir los dibujos (hecho que provoca la no-periodicidad del mosaico), focalizábamos el objetivo en construir el mayor número de estructuras que llenaran el ángulo giro (las estructuras simétricas no puntuaban).

Aun así, la sorpresa de que existen 53 combinaciones diferentes era mayúscula.

Considerando las últimas entregas del MMACA, alguien habrá pensado que ya solo nos dedicamos al alumnado de primaria.

En parte es verdad que acabamos de empezar el pilotaje de las maletas didácticas para 1.º-3.º (4.º) de Primaria, y que, con el crecimiento del proyecto, se han incorporado personas más jóvenes y hemos tenido bodas y nacimientos (por decir la verdad, también la pérdida dolorosísima de Helena Cusí) y que algunos de la vieja guardia ejercen de abuelos. Sin querer ponernos a la altura de los varios Piaget y compañía, resulta espontáneo observar la adquisición de habilidades en los niños y niñas que tenemos más cerca. Así que es normal, entonces, que estemos muy dispuestos a responder a la demanda que nos llega del profesorado de la escuela primaria para que ofrezcamos desde el MMACA materiales y actividades que permitan conservar en la escuela las dinámicas que su alumnado ha manifestado durante la estancia en el museo.

En la entrega siguiente, nos gustaría explicar un proyecto para jóvenes de 6 a 12 años en situación de riesgo de exclusión social. Con la llegada de cada vez más jóvenes emigrantes sin familia, el tema resulta de una dolorosa actualidad, pero pronto volveremos a proponer materiales y actividades para el alumnado de secundaria.



Figura 17. Algunos tableros de las actividades de la maleta inspiradas en estos mosaicos

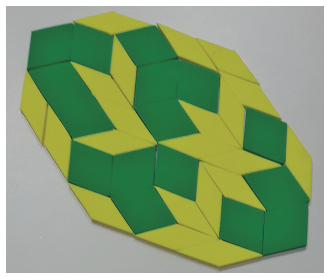


Figura 18. Un mosaico no-periódico de Penrose

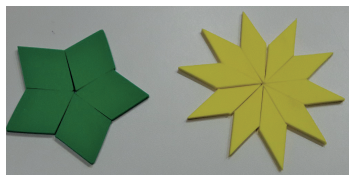


Figura 19. Completar el ángulo con figuras iguales

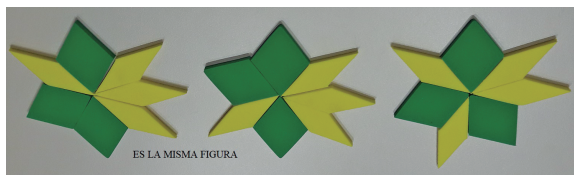


Figura 20. Otras composiciones

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya, Cornellá de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

1 Proyecto «Minimons»: <http://c2em.feemcat.org/wp-content/uploads/TAULES/taula_103_203.pdf>.

2 <http://www.museocienciavalladolid.es/opencms/mcva/QueOfrecemos/ExposicionPermanente/planta_2_informacion.html>.

3 <https://www.icmat.es/outreach/dima>.

4 <https://imaginary.org/>.

5 <http://www.mathsweek.ie/2018/>.

6 <https://www.explodingdots.org/>.

7 Es un material muy sencillo y barato, si estáis pendientes de las ofertas del Lidl o del Tiger. Solo el gran triángulo (4 u^2) no viene en ninguno de los dos productos y está hecho por nosotros, porque nos interesaba que hubiera una pieza de valor 4 unidades (la unidad es el área del triángulo pequeño).

suma+ 90
Secciones
Marzo 2019
pp. 73-80

Los vestigios en pizarras de otras materias como recurso de aprendizaje matemático

Miquel Albertí Palmer

Crónica de una clase no anunciada

Pido a mis alumnos que no borren la pizarra de la clase anterior a la mía. A menudo aprovecho los vestigios que han dejado otros para relacionar sus materias con las matemáticas e incluso basarme en lo trabajado en ellas para incitar el aprendizaje matemático.

A continuación expondré tres ejemplos reales ocurridos en algunas de mis clases de matemáticas que se basaron en los trazos que encontré en las pizarras de materias como Inglés, Catalán, Pensar sobre el pensar y Expresión visual y plástica de primer curso de la ESO.

De entrada puede pensarse que lo trabajado en otras materias no tiene por qué estar relacionado con lo que se trabaja en matemáticas, menos todavía en un momento tan concreto como son un día y una hora de clase concretas: alguna de las previas a la mía. Esto sería así en una educación matemática basada en contenidos en la que lo primordial es el qué. Sin embargo, una educación por competencias basada más en el cómo permite centrarse más en aspectos metodológicos. Esto se pondrá de manifiesto más adelante.

Solo anticiparé que de la pizarra de Inglés mis alumnos aprendieron algo más importante que el algoritmo de la división. Aprendieron a dar significado al resto y al cociente de cualquier división. Y eso es algo que la calculadora no

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2018 y aceptado en enero de 2019

puede hacer. Aproveché la pizarra de Catalán para introducir las coordenadas cartesianas viendo la necesidad de ellas. Y de la pizarra de Pensar sobre el pensar aprendieron qué resulta esencial para reconstruir un rectángulo del que se conoce solo un pequeño fragmento.

Inglés: ejercicios tres y seis

Al entrar en clase vi en la pizarra los deberes de la materia de Inglés que se habían encargado a mis alumnos (figura 1). Eso me inspiró el planteamiento del siguiente problema:

¿Dónde estaría el 2018 en este esquema?

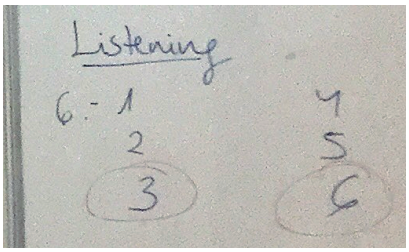


Figura 1. Deberes de Inglés: actividades 3 y 6

Primera solución: inalcanzable

Algunos dijeron que sería muy largo averiguarlo, pues la serie acababa en el número 6 y llegar hasta el 2018 llevaría muchísimo tiempo. Pero una cosa estaba clara, el 2018 caería en la primera, segunda o tercera filas. De eso, no había duda.

Segunda solución: probando

Tras la mención del término «filas» alguien observó que no estaría en la tercera fila, ya que en ella estaban los números «de la tabla del 3». El siguiente sería el 9, luego el 12, etc. Como 2018 no era múltiplo de 3 (la división por tres no era exacta), el 2018 estaría en la primera o en la segunda. Se habían reducido las opciones de tres a dos.

Hubo quien intentó aplicar el mismo razonamiento a la segunda fila. Pero los números que contenía no pertenecían a ninguna tabla multiplicativa: 2, 5, luego vendría el 8… Les invité a ampliar esa tabla para ver si se les ocurría algo más (figura 2).

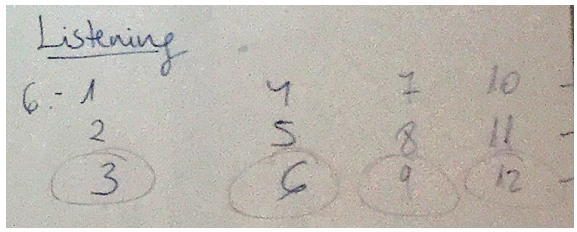


Figura 2. Ampliación de la serie con dos columnas más

No veían pauta reconocible en las dos primeras filas: 1, 4, 7 y 10 no eran parte de ninguna tabla multiplicativa; 2, 5, 8 y 11, tampoco. Además, en ambas filas había pares e impares, por lo que ese criterio tampoco servía para situar el 2018.

Tercera solución: definitiva

Estábamos en punto muerto. Entonces les sugerí reflexionar cómo habían decidido que en la tercera fila estaban los múltiplos de 3:

—Profesor: ¿Cómo sabéis que 3, 6, 9… están en la tabla del 3?

—Ell@s: Porque 3 por 1 es 3, 3 por 2 es 6, 3 por 3 es 9…

—Profesor: De acuerdo, pero ¿cómo sabéis que 2018 no es múltiplo de tres?

—Ell@s: Había una norma: si sumas 2, 0, 1 y 8 tenía que dar…

—Ell@s: Sí, tenía que dar 3 o un número de la tabla del 3.

—Profesor: ¿Y qué da?

—Ell@s: Da 11.

—Profesor: ¿Y cómo sabéis que 11 no es múltiplo de 3, que no está en la tabla del tres?

—Ell@s: Porque la división no es exacta.

—Profesor: ¿Qué da la división de 2018 entre 3?

—Ell@s: 672,6666666…

—Profesor: Lo has hecho con la calculadora, ¿no?

—Ell@s: Sí, no da exacto. 2018 no es múltiplo de 3.

—Profesor: ¿Sabríais hacer la división a mano?

—Ell@s: Claro.

—Profesor: Muy bien, pues dividid a mano 7, 8 y 9 entre 3.

—Ell@s: El 7 da 2 coma…

—Profesor: No saquéis decimales, dejad el resto como quede (figura 3).

—Ell@s: El 7 da 2 y resto 1.

—Ell@s: El 8 da 2 y resto 2.

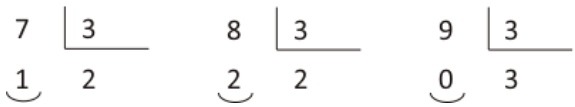


Figura 3. Tres divisiones por tres

—Ell@s: El 9 da 3 y resto 0.
—Profesor: ¿Y en qué fila están el 7, el 8 y el 9?
—Ell@s: En la primera, segunda y…
—Ell@s: Ah, ¡ya lo veo! Si el resto es 1, está en la 1.ª fila; si es 2, está en la 2.ª; y si es 0, en la 3.ª.
—Profesor: Ahí está la cuestión. Y si dividís ahora 2018 entre 3, ¿cuál es el resto? (figura 4).
—Ell@s: Da 672,6666666667.
—Prof.: Pero necesitamos el resto, ¿no?
—Ell@s: Da 672 y el resto es 2. ¡Estará en la 2.ª fila!

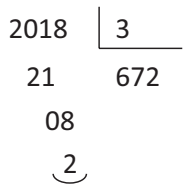


Figura 4. Dos mil dieciocho entre tres

Todos sabían dividir, incluso por números de dos, tres y más cifras. La mayoría habían hecho centenares de divisiones a mano. Pero los restos de esas divisiones no habían servido de nada. Alguien lo expresó en voz alta:

—Ell@s: Por fin sé para qué sirve el resto.
—Profesor: ¿Sabríais averiguar ahora en qué fila estaría un millón?
—Ell@s: Claro: el resto nos lo dice.
—Profesor: ¿Y si en lugar de tres filas hubiese cuatro?
—Ell@s: Entonces habría que dividir por 4.
—Profesor: ¿Y qué significa el 672?
—Ell@s: …
—Profesor: Hemos visto que el resto de la división nos dice en qué fila está el número en cuestión. ¿Qué significa el cociente 672?
—Ell@s: ¡La columna, es la columna!
—Ell@s: Sí.
—Ell@s: No. Si está en la segunda fila, habrá pasado la columna 672. Estará en la 673.
—Ell@s: Como el 8, que da resto 2 y está en la tercera.

Así expresamos la solución definitiva (tabla 1).

	Col. 1	Col. 2	Col. 3	…	Col. 673
Fila 1	1	4	7		2017
Fila 2	2	5	8		2018
Fila 3	3	6	9		2019

Tabla 1. Solución definitiva al problema

Catalán: conectores situacionales

Nada más entrar en el aula observo en la pizarra una tabla con los conectores de localización en catalán (figura 5). Los alumnos me dicen que es lo que acaban de trabajar en la materia de Catalán.

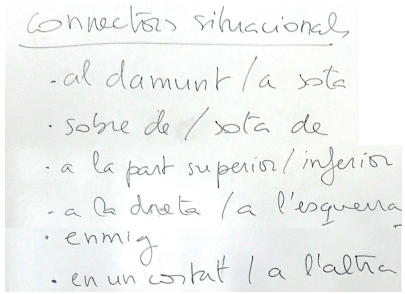


Figura 5. Restos de una pizarra de Catalán

Puesto que tarde o temprano tendremos que utilizar las coordenadas cartesianas se me ocurre que este puede ser un momento fantástico para llegar a construirlas a partir de lo estudiado en catalán. Así que formulo la pregunta siguiente:

> ¿Alguien podría expresar con un dibujo cada uno de esos conectores?

Enseguida levantan la mano dos personas y les invito a que realicen sus propuestas en la pizarra (figura 6).

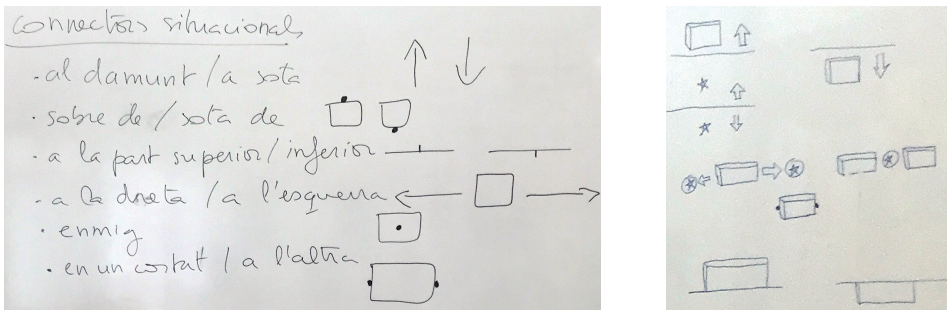


Figura 6. Dos representaciones figurativas de los conectores de localización

La mayoría de la clase se inclina por las representaciones de la izquierda, pues las considera más claras. Pero se observa una primera ambigüedad, pues al hablar de encima de, debajo de, a la izquierda de o a la derecha de, no se distingue si el objeto en cuestión está o no en contacto con el otro que le sirve de referencia.

Por ejemplo, cuando decimos que el borrador está encima de la mesa, se da por entendido que se apoya sobre ella, que está en contacto con ella. Sin embargo, si sostengo el borrador a una altura de un palmo por encima de la mesa, se entiende que el contacto no existe. La única diferencia estriba en esa proposición añadida: «por encima de». En cambio, si decimos que el borrador está debajo de la mesa, nadie pensará que está enganchado a ella como un chicle, sino que se encuentra en el suelo, en la parte del suelo que queda por debajo de la mesa. Algo parecido ocurre con izquierda y derecha, pues si una persona está a la derecha o izquierda de otra, puede estar en contacto o no con ella.

Se llega a la conclusión de que los conectores de localización lingüísticos no distinguen claramente entre cosas adosadas y cosas separadas. Un aspecto que se pone de manifiesto cuando pasamos a determinar las zonas de localización de un punto en un rectángulo. Si arriba y abajo dividen el espacio en dos mitades, una superior y otra inferior separadas por un eje horizontal (en matemáticas, se llama mediatriz); izquierda y derecha hacen lo mismo con un eje vertical (la otra mediatriz).

Para afinar más todavía la localización se fraccionan en mitades y/o tercios esas partes del rectángulo. Al final, llegamos a una fragmentación como la ilustrada en la parte central de la figura 7.

Llegados a este punto el problema está claro. Querer precisar más aun la localización nos conduce a utilizar el término «cuánto». Es decir, si un objeto está a la derecha, izquierda, encima o debajo de otro, el único modo de determinar con exactitud su posición es saber cuánto a la derecha, a la izquierda, encima o debajo. Es decir, conocer la distancia que lo separa del objeto que nos sirve de referencia. Introduciendo la cuantificación hemos convertido los conectores de localización lingüísticos en matemáticos. Pero en matemáticas, las localizaciones precisas no se dan en términos lingüísticos. ¿Cómo hacerlo?

Para ello podemos aprovechar las hojas de papel cuadriculado de los cuadernos con los que trabaja el alumnado. Del mismo modo en que lingüísticamente localizamos una cosa con relación a otra en que establecemos como referente, en matemáticas haremos lo mismo. Por tanto, lo primero es determinar qué utilizaremos de referente.

Por ejemplo, un vértice de la cuadrícula. Ahora se trata de localizar otros vértices que estén a su derecha, izquierda, encima o debajo. Para ello hemos de saber a qué distancia se halla. ¿Cómo cuantificamos o medimos esta distancia? Hay unanimidad: en cuadritos o celdas de la cuadrícula. De este modo localizamos cuatro puntos concretos (figura 8). La pizarra ya no es de Catalán, sino de Matemáticas.

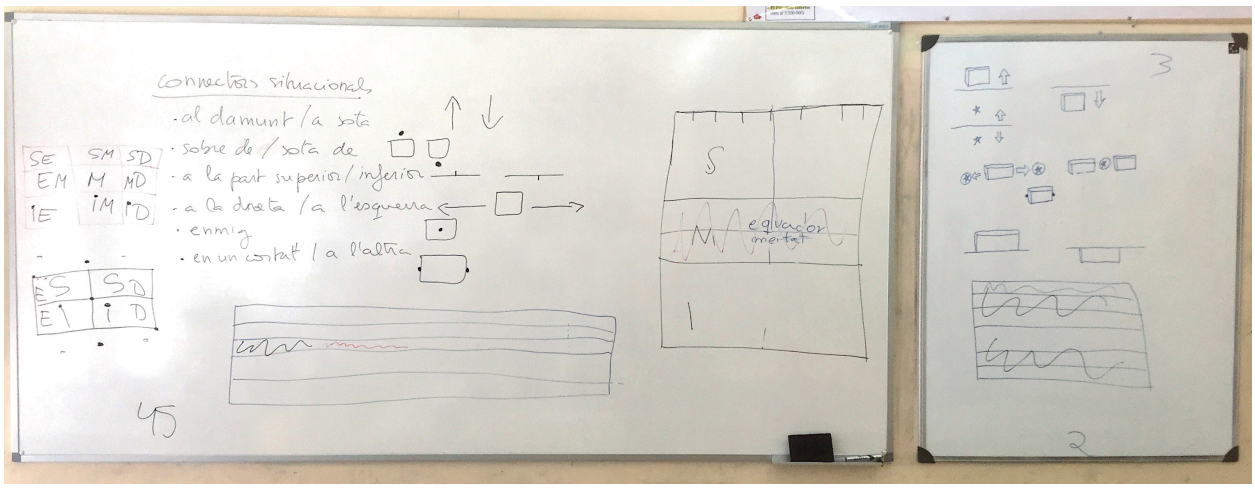


Figura 7. Pizarra de Matemáticas inspirada por los vestigios de una pizarra de Catalán

Acabamos viendo la necesidad de utilizar dos números (cantidades de cuadritos o celdas) para determinar sin ambigüedades las localizaciones. Hemos introducido las coordenadas cartesianas a partir de los conectores de localización lingüísticos. Solo falta introducir la nomenclatura propia de las matemáticas (tabla 2).

Lenguaje corriente	Lenguaje científico matemático
Vértice de la cuadrícula	Punto
Vértice referente	Origen de coordenadas
Celdas a derecha o izquierda del referente	Abscisa (positiva o negativa)
Celdas arriba o abajo del referente	Ordenada (positiva o negativa)
Par de dichas cantidades	Coordenadas del punto
Línea horizontal por el punto de referencia	Eje de abscisas
Línea vertical por el punto de referencia	Eje de ordenadas
Conjunto de conectores de situación geométrica	Sistema de coordenadas cartesiano

Tabla 2. Conectores de localizacion de ámbito lingüístico y geométrico

Pensar sobre el pensar: reconstruir el pasado

Encuentro la pizarra filosófica escrita durante la sesión de Pensar sobre el pensar. En esta ocasión trata sobre el diálogo filosófico sobre la cuestión del pasado. Las conclusiones a las que se ha llegado durante la sesión son que hay diversos tipos de pasado: el pasado inmutable y platónico (el ocurrido y que no podemos cambiar) y el pasado reconstruido día a día por la historia a partir de la investigación científica.

Mucho hemos estudiado los matemáticos el pasado inmutable y platónico de las propias matemáticas. De hecho, podría afirmarse que gran parte de la geometría tradicional y de la modelización geométrica elemental se basa en una aproximación a los elementos platónicos que tan fundamentales han sido en la historia de nuestra materia.

No creí conveniente abordar la cuestión desde ese ámbito en primero de la ESO y opté por plantear una pregunta sobre el pasado que la investigación científica trata de reconstruir a partir de los vestigios del presente. Pregunté:

> Imaginad que esto (tracé un segmento vertical en la pizarra) es lo que nos hemos encontrado de un rectángulo. ¿Sabríais o podríais averiguar cómo era el rectángulo completo, el original?

Varias manos se alzan apuntando el techo del aula. Invito a tres persona a que tracen sus propuestas en la pizarra, una tras otra. La primera, toma el segmento ya trazado como lados verticales del rectángulo. La segunda, extiende dicho rectángulo a izquierda y derecha. La tercera, se sale de ambos límites (figura 9).

Conclusión 1: con un segmento se pueden hacer infinitos rectángulos. Y entonces abro un diálogo:

> —Profesor: ¿Qué necesitamos conocer para poder averiguar el rectángulo sin ninguna duda?
> —Ell@s: Dos lados.
> —Ell@s: No, dos no. Hacen falta tres lados.
> —Profesor: ¿Quién quiere completar el rectángulo (dibujo los tres lados)?

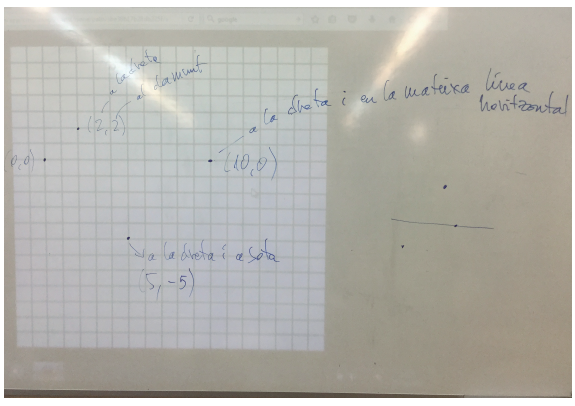


Figura 8. Localización de puntos con relación a otro

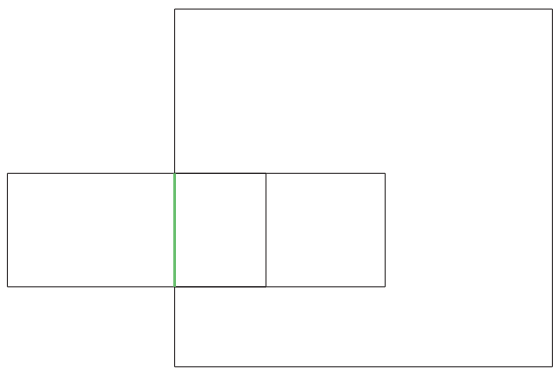


Figura 9. Tres posibles pasados rectangulares de un segmento

Una persona completa el rectángulo (figura 10). Pero enseguida se alzan voces considerando que existen más posibilidades.



Figura 10. Posible pasado rectangular de una poligonal

—Ell@s: Con tres, tampoco. Se puede estirar hacia la derecha.
—Ell@s: También son infinitos.

Conclusión 2: con tres lados de un rectángulo, se pueden hacer infinitos rectángulos.

—Profesor: Entonces, ¿qué necesitamos como para saber cuál es el rectángulo?
—Ell@s: Cuatro lados.
—Ell@s: Toma, claro.
—Profesor: Pero, ¿no puede conocerse el rectángulo con menos?
—Ell@s: Bueno, sí. Recortados.
—Profesor: ¿Qué quieres decir?
—Ell@s: Cuatro lados, pero no enteros.

Y se dibuja en la pizarra (figura 11).



Figura 11. Vestigio de un rectángulo (mucho vestigio)

—Profesor: ¿No se podría con menos que eso?
—Ell@s: Sí, pero con las esquinas.
—Ell@s: Hay que tener las tres esquinas.
—Profesor: Los tres ángulos rectos, ¿no?
—Ell@s: Si los alargas, por fuerza te da.

Y lo hacemos (figura 12). La extensión de los dos lados interrumpidos conduce a un único punto correspondiente al cuarto vértice de la figura: el rectángulo completo.

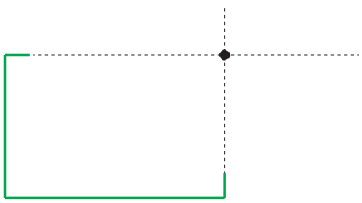


Figura 12. Reconstrucción de un rectángulo conociendo tres de sus cuatro vértices

Conclusión 3: Para reconstruir un rectángulo hacen falta, como mínimo, los tres vértices (tres ángulos rectos).

Expresión visual y plástica: mi cara es asimétrica

En esta ocasión no se trata de una pizarra, sino de una exposición de imágenes en una pared del aula que los alumnos de un grupo habían llenado de parejas de fotos con sus rostros. Cada pareja estaba compuesta por una imagen frontal natural y por otra formada con dos mitades perfectamente simétricas. Pero ninguna cara es perfectamente simétrica. Al entrar en el aula y ver multitud de caras duplicadas del alumnado les pregunté de qué se trataba.

Eran trabajos de EVP consistentes en hacerse un selfi, seccionarlo según el aparente eje de simetría vertical y enganchar una copia simétrica a la mitad original. El resultado eran lo que parecían caras humanas perfectamente simétricas, pero en las que se evidenciaba el aspecto irreal de las reproducciones simétricas.

No pude evitar preguntar a los alumnos cómo sabían cuál de las dos imágenes de una misma persona, la real y la simétrica, era la auténtica. La respuesta fue que bastaba con mirar a la cara a la persona en cuestión y percatarse visualmente de que sus facciones no respondían al patrón geométrico de simetría.

Insistí diciendo que en las familias siempre hay familiares que ven en el semblante de un niño o niña los rasgos de su padre y que otros, en cambio, ven los de su madre. ¿Quién tiene razón? ¿Acaso basta la percepción visual para decidir si una imagen se corresponde con la real o no? ¿Hasta qué punto eso sería científico?

No lo es. Es una conclusión subjetiva. ¿Cómo convertirla en científica? Para ello es necesaria la cuantificación. Al estilo de unos CSI podemos medir detalles de las imágenes y ver si la simétrica se corresponde o no con la real, pero no según el parecer de una persona u otra, sino de forma objetiva en base a las medidas tomadas. Pero para ello también es necesario conocer el signifi-

cado de la simetría axial. ¿Qué reglas debe cumplir un punto del rostro para decir que es homólogo de otro por simetría?

Esto nos llevó a una reflexión sobre un fenómeno que muchos tipos de software reproducen automáticamente. La cuestión estriba en qué relación guardan un punto, el eje de simetría y el homólogo de aquel reflejado por este. Ante la figura 13, todos consideraban que los puntos P y Q sí eran simétricos el uno del otro, pero no tenían la misma opinión de P y R, de P y S ni de P y T. Sin embargo, nadie sabía el motivo. Miraban la figura como el rostro de un conocido.

Llevó tiempo acabar concretando las condiciones con respecto del eje que hace las veces de espejo. A saber: un punto y su homólogo deben estar sobre la perpendicular al eje y a la misma distancia de este. Los puntos P y Q de la figura 13 son los únicos que cumplen estos requisitos.

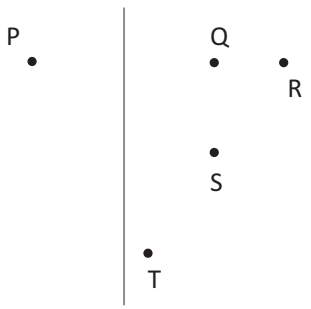


Figura 13. Solo Q es simétrico de P repecto al segmento

Una vez concretado esto, se trataba de averiguar objetivamente las diferencias entre la foto de la cara real y la compuesta con dos mitades simétricas. Bastaba tomar puntos que deberían ser homólogos y ver si lo eran o no con relación a un eje de simetría que, en la mayoría de casos sigue la línea del tabique nasal. Per ejemplo, los ojos, las comisuras de la boca, las orejas, las fosas nasales, las cejas…

La figura 14 muestra el rostro de un gato. De la observación visual concluiríamos que se trata de un animal de rostro simétrico y de que la fotografía ha logrado captar bien dicha simetría, aunque su eje no sea vertical. Sin embargo, esa simetría es tan solo aparente.

La transversalidad definitiva es la del profesorado

La incitación al aprendizaje matemático puede llevarse a cabo de muchas formas. En el proyecto L'INSiTU el principal recurso es el diálogo, pero se complementa con la práctica. Los vestigios que otras materias dejan en la pizarra representan la prueba de que se han realizado una serie de actividades en el aula cuya realidad es incuestionable. Merece la pena aprovechar la oportunidad que esas pizarras nos brindan, no solo para relacionar otras materias con las matemáticas, sino para que el alumnado aprenda y construya matemáticas a partir de ellas dándose cuenta de primera mano de la transversalidad inherente.

La verdadera interdisciplinariedad entre Matemáticas y Catalán, Matemáticas y Pensar sobre el pensar, y Matemáticas y Expresión visual y plástica resultó tan extraordinaria como imprevista. No hubo aspectos transversales ni interdisciplinares entre Matemáticas e Inglés, pues la actividad trataba sobre la organización de los ejercicios del libro de texto referentes al *listening* y en clase de matemáticas no los escuchamos.

Las conexiones de esas pizarras con las matemáticas se fraguaron en la organización de números en una tabla (Inglés), los conectores de localización (Catalán), la reconstrucción científica



Figura 14. La geometría demuestra que la simetría absoluta puede ser solo aparente

del pasado a partir de los vestigios del presente (Pensar sobre el pensar) y la introducción de la cuantificación objetiva (Expresión visual y plástica). ¿Para cuándo otras materias construirán alguna parte de sus competencias a partir de las matemáticas?

Que de esta forma el aprendizaje resultó muy significativo se hace evidente cuando se observan los resultados. De la pizarra de Inglés muchos aprendieron qué significa dividir y que el dominio de un algoritmo no nos hace competentes si no sabemos interpretarlo. Saber dividir es saber interpretar el cociente y el resto de la división.

De la pizarra de Catalán se llevó a cabo una aproximación lingüística y figurativa, más natural para el alumnado que la que realizó el propio Descartes, a las coordenadas cartesianas. A esa edad las personas utilizan conectores situacionales en su lenguaje corriente, aun cuando quizá no sepan su significado ni que forman un grupo de términos llamados así. El enfoque cuantificado de la cuestión ayudó, además, a mejorar la comprensión lingüística de dichos términos ganando precisión. Como consecuencia de ello se vio la necesidad de disponer de un término o un modo más preciso de diferenciar un punto u objeto que esté encima, pero en contacto con una mesa, de otro que esté encima pero no la toque.

De la pizarra de Pensar sobre el pensar aprendieron el enfoque científico para reconstruir el pasado. La reconstrucción del rectángulo sirvió además para profundizar en su conocimiento. Del mismo modo en que muchos no supieron dar significado a la división, también en el caso del rectángulo se obtuvo mayor grado de competencia al analizarlo con mayor profundidad: fijándose en sus ángulos rectos.

En cuanto a las caras asimétricas de Expresión visual y plástica debemos reconocer que la sociedad tolera mucho mejor la incompetencia de una persona para trazar una figura simétrica a otra que el hecho de no saber dividir a mano, aunque la calculadora sea capaz de dividir y la división se haga sin conocer el significado de la división. Gracias a las imágenes de los rostros se reflexionó sobre qué aspectos (de nuevo cuantificados) garantizan la simetría axial: equidistancia del eje que actúa como espejo y la perpendicularidad a él de un punto y su reflejo. Si estas condiciones no se respetan, no existe simetría axial.

¿Cómo no relacionar esas pizarras con las matemáticas? ¿Qué sentido habría tenido que el profesor de matemáticas borrase esas pizarras como si jamás hubiesen existido y comenzar la sesión matemática hablando siguiendo el hilo de su materia? Pretendemos que con los hilos de las materias el alumnado va tejiendo la malla de su aprendizaje. Sin duda, se trata de una labor difícil a la que con clases no anunciadas como esas podemos contribuir, ayudar, guiar.

No es aportando perspectivas diferenciadas y aisladas a la consecución de un trabajo que enfocamos la educación desde una perspectiva verdaderamente interdisciplinar o transversal, sino mostrando al alumnado que nos creemos la transversalidad y la interdisciplinariedad porque siempre han existido. De ahí la necesidad de relacionar las metodologías de otros colegas con las nuestras. Hay, por tanto, necesidad urgente de coordinación entre profesorado de ámbitos diversos, lo cual también resulta harto difícil. La transversalidad pasa por la interdisciplinariedad, pero la transversalidad definitiva no es la de las materias, sino la de su profesorado.

Miquel Albertí Palmer
Institut Vallès (Sabadell)
<alberti.miquel@gmail.com>

suma+ 90
Secciones
Marzo 2019
pp. 81-92

Protagonistas olvidados en geometría

Jesús García Gual
Mercedes Sánchez Benito

El rincón de ESTALMAT

En esta ocasión se presenta una actividad geométrica desarrollada con los estudiantes que ya han realizado los dos cursos del proyecto ESTALMAT- Madrid.

Su contenido se puede aprovechar parcialmente o en su totalidad en las aulas de secundaria en «Ampliación de Matemáticas» de cuarto de ESO o en Matemáticas de Primero de Bachillerato de Ciencias buscando razonamientos geométricos que nos muestren la independencia de los conceptos de perímetro y área de las figuras planas y en qué situaciones con un perímetro determinado se obtiene el área máxima en un polígono convexo. Pensamos que es importante que en las aulas de secundaria, alguna vez, se tome conciencia de la necesidad de plantear la enseñanza de la geometría en términos de investigación por parte de los alumnos para las cuestiones planteadas; es un buen camino para conseguir un verdadero aprendizaje.

El problema isoperimétrico desde su comienzo se muestra sugerente, no solo por la leyenda de Dido, sino por la relación tan inestable entre el perímetro y el área que presentan figuras tan elementales como por ejemplo los triángulos: con igual base todos los triángulos que tengan el otro vértice en una línea paralela a la base tienen igual área pero no el mismo perímetro.

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2018 y aceptado en enero de 2019

A lo largo de la historia ha habido muchos matemáticos que han dedicado esfuerzos a su resolución, desde el griego Zenodoro que vivió en torno al año 200 a.C. hasta bien entrado el siglo XIX en el que quedó definitivamente resuelto por Weierstrass.

Aunque añadimos demostraciones o damos indicaciones para encontrarlas, no es este el objetivo de este artículo, sino el conocimiento argumentado de los resultados.

Fórmula de Herón para el área de un triángulo

Si preguntamos a alguien con el título de bachiller cómo se calcula el área de un triángulo, nos encontraremos casi como única respuesta con la conocida fórmula «base por altura partido por 2». Habrá que toparse con una persona amante de la geometría para que mencione la fórmula de Herón.

No suele ser habitual encontrar la fórmula de Herón en los libros de texto de matemáticas de secundaria; y nos preguntamos: ¿Por qué no se enuncia la fórmula de Herón en nuestra escuela a pesar de ser la indicada para los datos naturales de un triángulo?

Seguramente porque su demostración no es inmediata, o porque…, la razón última quizás sea que la geometría no está de moda.

Nuestra apuesta es que dicha fórmula vuelva a ser conocida (se enuncie) en la Secundaria. ¡Qué sería del mundo si la gente solo hablara de lo que sabe, no ya demostrar, sino al menos razonar! (¡Cuánto silencio!).

Empecemos pues por enunciarla:

En un triángulo de lados a, b y c, si llamamos, s al semiperímetro $(a+b+c)/2$, tenemos que su área es:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Adornamos la fórmula con una demostración geométrica basada en la igualdad de los segmentos tangentes trazados desde un punto a una circunferencia.

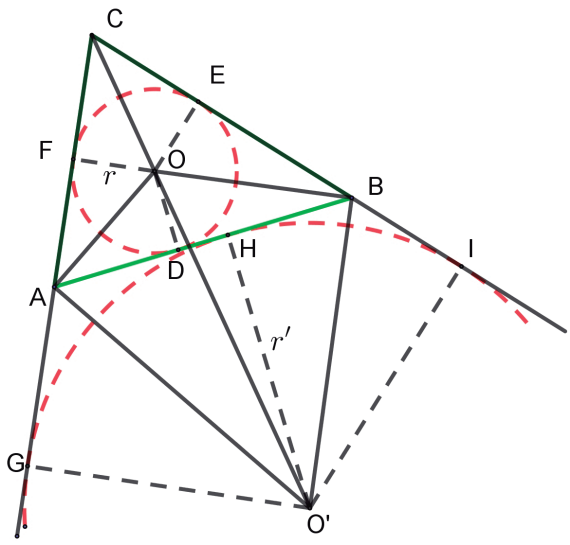


Figura 1

En la figura 1, sea O' el centro de la circunferencia exinscrita al triángulo ABC de radio r' correspondiente al ángulo C; G, H, I son los puntos de contacto de esta circunferencia con los lados del triángulo o sus prolongaciones.

Por tangencia $CI = CG$ y $CE = CF$, luego $EI = FG$.

Como también se cumple que:

$EI = EB + BI = BD + BI = BH + HD + BI = HD + 2BI$

$FG = FA + AG = FA + AD + DH = AD + AD + DH = 2AD + DH$

Resulta que $AD = BI$, y por tanto:

$CI = CE + EB + BI = CE + EB + AD = s$, siendo s el semiperímetro del triángulo ABC, ya que por tangencias, el perímetro es $2CE + 2EB + 2AD$ (Observemos que: $CE = s - c$; $EB = s - b$; $AD = s - a$). Análogamente, $EB = AH$.

Tenemos que $\mathcal{A} = sr$; siendo $\mathcal{A}$ el área del triángulo y r el radio de la circunferencia inscrita y además:

$\mathcal{A} = \text{área de } O'CA + \text{área de } O'BC - \text{área de } O'BA = [(b + a - c)\, r']/2 = (s - c) \cdot r'$

Multiplicando ambas igualdades tenemos que $A^2 = s(s-c) \cdot r \cdot r'$

En la figura 2, el ángulo OAO' es recto pues está formado por las bisectrices del ángulo que forman las rectas CG y AB.

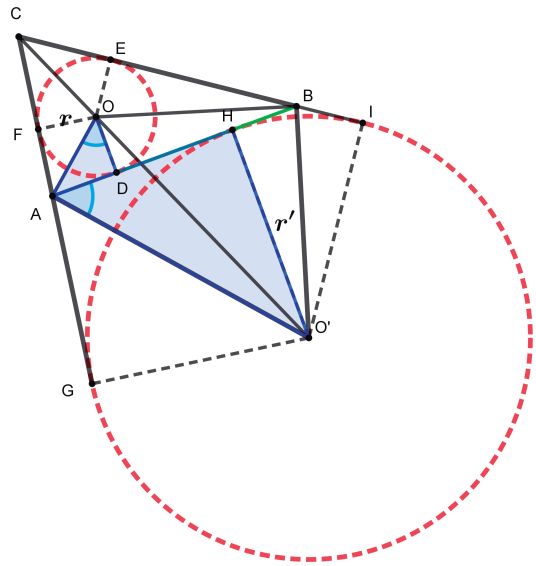


Figura 2

Por tanto los ángulos *OAD* y *HAO'* son complementarios y los triángulos rectángulos *OAD* y *HAO'* semejantes y así:

$$\frac{r}{AD} = \frac{HA}{r'}$$

con lo cual, $r \cdot r' = AD \cdot HA = (s-a) \cdot (s-b)$, llegándose al final a: $\mathcal{A}^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. q.e.d.

El cuadrilátero inscrito (un secundario de lujo a la hora de maximizar áreas)

En la historia de «El problema de Dido» (la curva de perímetro dado que quería ser de área máxima y que dio origen al llamado problema isoperimétrico) aparecen personajes: algunos de amplio recorrido, como el triángulo isósceles que se ofrece como campeón de área entre los triángulos de base y perímetro dados y que propone dentro de los polígonos de perímetro dado a los equiláteros como compromisarios del círculo; y otros circunstanciales, como el casi olvidado lema de Zenodoro que avala como pareja de triángulos isósceles de bases dadas y suma de perímetros dada, a la compuesta por dos triángulos isósceles semejantes. El resultado (cierto, pero no demostrado con generalidad por Zenodoro) es usado con ingenio para argumentar la apuesta por polígonos, que siendo equiláteros, sean además equiangulares.

No aparece en el relato el apuesto cuadrilátero de lados dados inscriptible en una circunferencia (cuadrilátero cíclico) a pesar de ser un auténtico Eneas. Vayamos a los orígenes.

¿Podemos encontrar un cuadrilátero cíclico de lados dados?

La respuesta es sí y aún más general. Se puede construir un polígono cíclico de lados dados siempre que sea posible formar un polígono con esos lados, es decir, que la longitud de cada uno de los lados sea menor que la suma de las restantes longitudes.

Basta colocar los lados en forma de cadena abierta (figura 3). Inscribir esta cadena en una circunferencia suficientemente grande de forma que no se crucen los lados. La circunferencia tendrá su centro en la mediatriz de uno de los la-

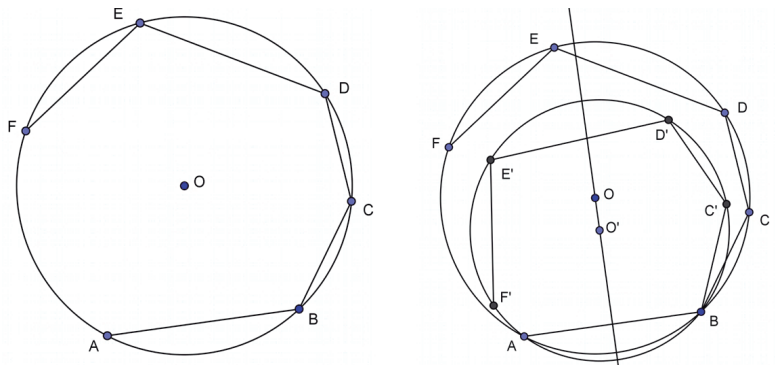


Figura 3

dos, AB. Moviendo este centro por la mediatriz y dibujando la circunferencia de radio OA, vamos a ir inscribiendo la cadena en circunferencias más pequeñas, hasta que por continuidad quede cerrada sobre una de ellas (bonito ejercicio para hacer con Geogebra y la herramienta compás).

Hemos justificado así la existencia de cuadriláteros cíclicos de lados conocidos.

Unimos G con E con un segmento, y trazamos desde F una paralela t que corta a r en H.

Trazamos otra recta auxiliar u que pasa por H, y en ella ponemos el punto I (hacia arriba) de forma que $HI = b$.

En otra recta auxiliar v que pasa por D, colocamos a ambos lados de D los puntos J y K, de forma que $JD = DK = c$.

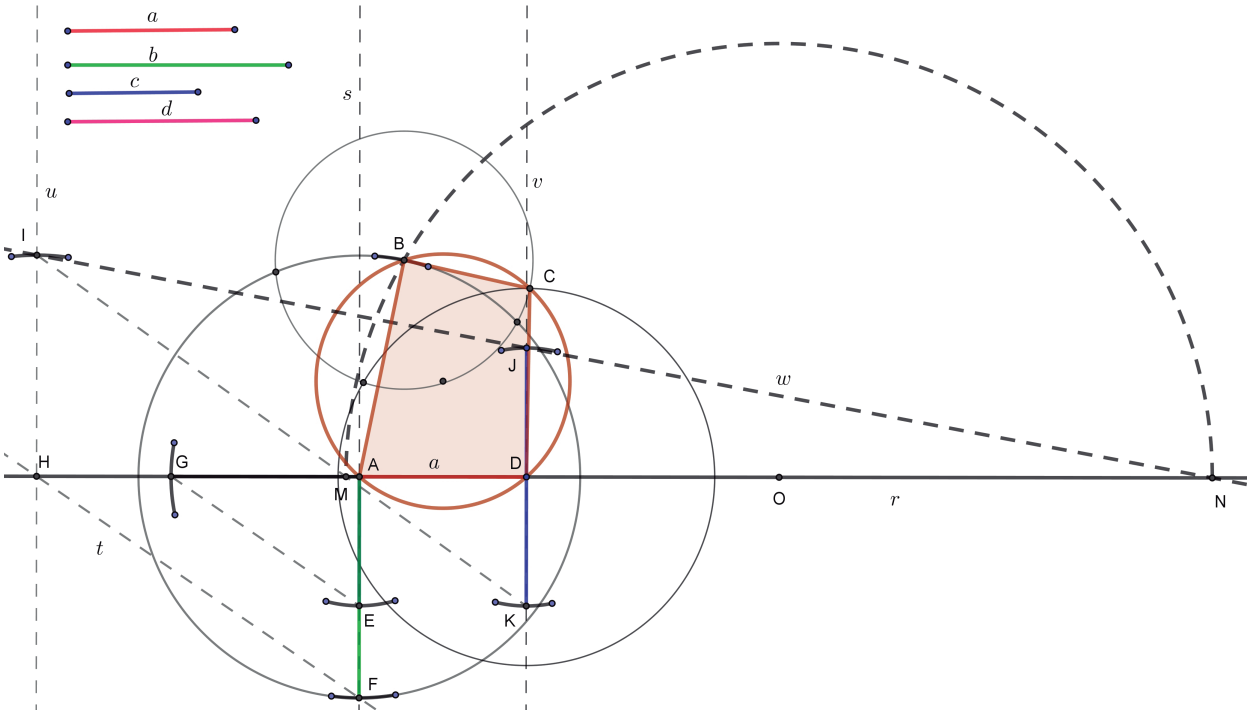


Figura 4

Cuadrilátero cíclico de lados a, b, c y d

En la figura 4 podemos ver una construcción con regla y compás del cuadrilátero cíclico de lados a, b, c, y d.

Sobre una recta horizontal r colocamos el punto A y a su derecha D, siendo $AD = a$.

A la izquierda de A colocamos G de forma que

$$GA = d$$

En una recta auxiliar s que pasa por A colocamos, debajo de A, los puntos E y F, de forma que

$$AE = c \text{ y } AF = b.$$

Unimos mediante recta o segmento I con J y K, de forma que obtengamos las intersecciones M y N de esas líneas con r.

Hallamos el punto medio O de M y N, y trazamos una semicircunferencia (hacia arriba) de radio ON.

Con centro en A y radio b trazamos una circunferencia que corta a la semicircunferencia anterior en un punto que va a ser B (vértice del cuadrilátero buscado).

Teniendo colocados D, A y B, obtenemos C como intersección de circunferencias (la de centro B y radio c, y la de centro D y radio d. Es un placer comprobar que A, B, C y D son cíclicos.

Esta construcción está basada en la construcción de una circunferencia de Apolonio ya que el lugar geométrico de los puntos P del plano que verifican que $d(P,A)=k\ d(P,B)$ es una circunferencia llamada de Apolonio[1].

¿Cuántos cuadriláteros cíclicos tenemos con cuatro lados dados?

Los cuatros lados forman cadenas cerradas inscritas en una circunferencia cuyos eslabones pueden ser colocados en orden diferente. Fijado un eslabón en la circunferencia, los otros tres eslabones pueden colocarse de seis formas, pero las cadenas que tienen las mismas parejas enfrentadas dan lugar a cuadriláteros simétricos, por lo que tenemos tres cuadriláteros inscritos diferentes, en la figura 5:

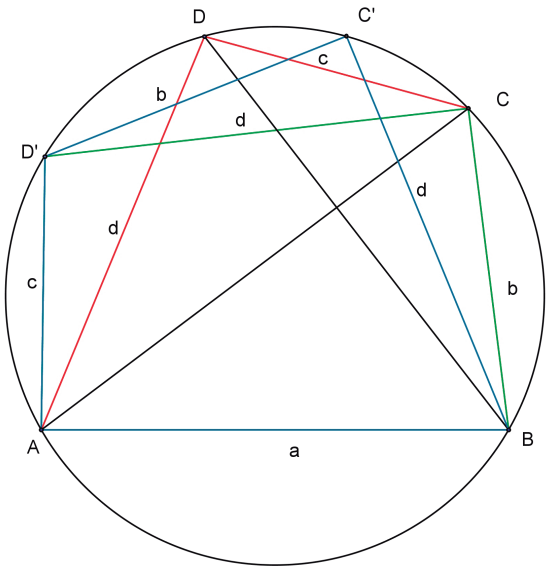


Figura 5

a y d enfrentados: cuadrilátero *ABCD*
a y c enfrentados: cuadrilátero *ABCD'*
a y b enfrentados: cuadrilátero *ABC'D'*

Los cuadriláteros pueden ser relacionados a partir de la división en dos triángulos por una diagonal, cambiando uno de ellos por su simétrico respecto a la mediatriz de la diagonal. (Es inmediato deducir que sus áreas son iguales).

De igual forma polígonos cíclicos con lados dados no hay muchos. Lo único que podemos hacer es ensamblar sus lados en diferente orden en la circunferencia hasta cerrar la cadena.

Si no hay lados iguales, el número es $\frac{(n-1)!}{2}$ (ordenaciones cíclicas de n vértices partido por 2).

Cuadriláteros y área máxima

Se suele olvidar que este cuadrilátero inscrito (que puede tener tres formas diferentes) es el de mayor área entre los cuadriláteros que tienen sus lados dados (lo probaremos más tarde, pero ello no es óbice para que hagamos ya uso de ello).

Manejemos este resultado en otros problemas de áreas máximas.

De entre todos los paralelogramos de lados dados el de mayor área es el rectángulo

Es un resultado inmediato de razonar a partir de la fórmula de área del romboide, pero es curioso observar que cambiando el enunciado por «el cuadrilátero con mayor área entre los que tienen lados dados e iguales dos a dos», nos encontramos con dos soluciones (figura 6):

— el rectángulo (porque es el único romboide que puede ser inscrito en una circunferencia);
— la figura en forma de cometa con dos ángulos opuestos de 90º.

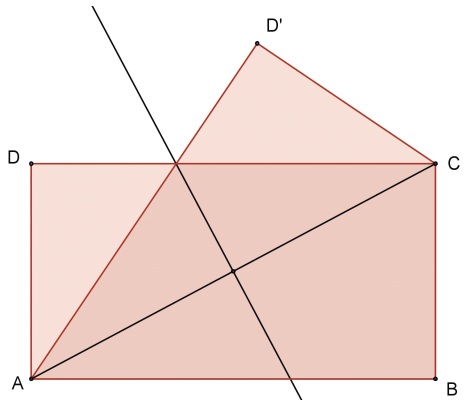


Figura 6

De entre todos los cuadriláteros con lados dados y dos iguales, el de mayor área es el trapecio isósceles y…

Este problema ya no es tan inmediato, pero es que los trapecios isósceles se pueden inscribir en una circunferencia, lo que les hace merecedores de título, aunque compartido: *ABCD y ABCD'*.

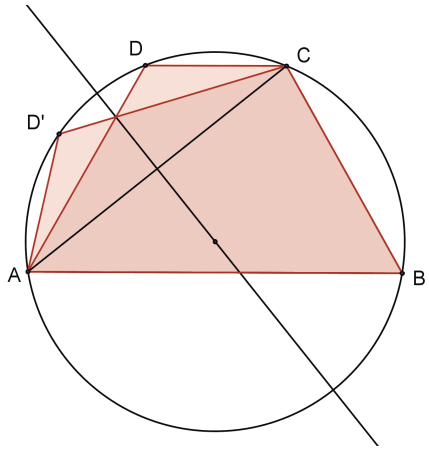


Figura 7

De entre todos los cuadriláteros con lados dados y tres iguales, el de mayor área es el trapecio isósceles (aquí sin competencia)

Este es el resultado que justificaría la nominación como candidato a mejor secundario en «El problema de Dido», cuando queremos llegar a los polígonos regulares con el mayor número de lados posibles como porteadores de la antorcha hacia el pebetero en forma de círculo.

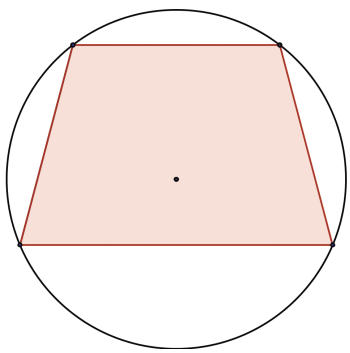


Figura 8

Polígonos de perímetro dado y área máxima

El candidato debe ser equilátero

Partimos de un polígono convexo (los no convexos no optan al premio) de n lados y formamos un triángulo ABC con tres vértices consecutivos. Luego cambiamos los dos lados del triángulo que ya eran del polígono por dos lados iguales (de longitud la semisuma de los que se quitan, para no modificar el perímetro) obteniendo un triángulo $AB'C$ isósceles (de igual base y mayor altura) y a su vez un polígono de n lados con un área mayor.

Así pues, si existe un polígono de n lados de perímetro dado y área máxima, debe ser equilátero, para que no pueda ser estrictamente mejorado por el procedimiento anterior.

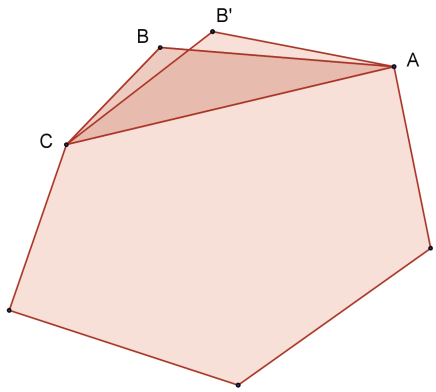


Figura 9

El candidato debe ser además equiangular

Sea un polígono convexo de n lados iguales con $n > 5$. Consideramos el cuadrilátero definido por cuatro vértices consecutivos $ABCD$, que tiene tres lados iguales. Podemos cambiarlo por un trapecio isósceles $AB'C'D$ con esos mismos lados y con mayor área, mejorando nuestro polígono con otro, cuyos ángulos en B' y C' son iguales (recordemos que en el caso de tres lados iguales el cuadrilátero óptimo era único).

Así pues, si existe un polígono equilátero de n lados de perímetro dado y área máxima, debe ser equiangular, para que no pueda ser estrictamente mejorado por el procedimiento anterior.

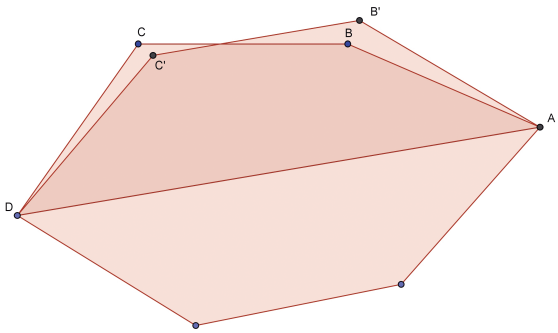


Figura 10

Tenemos pues que si existe un polígono de *n* lados con perímetro dado y área máxima (insistimos un poco en esto porque en los razonamientos usamos que no pueden ser mejorados por las transformaciones aplicadas, pero podrían serlo por otras y para negarlo necesitaríamos argumentos adicionales como por ejemplo, la continuidad) debe ser el regular.

Si el polígono regular de n lados es el polígono regular de perímetro dado y mayor área, entonces el polígono regular de *n* +1 lados e igual perímetro tiene más área

Basta con considerar que un polígono regular de *n* lados, puede ser considerado como uno no regular de *n*+1 vértices, colocando un vértice nuevo en uno de sus lados.

El polígono de *n* lados dados y área máxima es cíclico

Razonémoslo para un pentágono convexo *ABCDE*. Si el cuadrilátero *ABCD* no es cíclico, lo podemos cambiar por otro cíclico *ABC'D'*, con lados de igual longitud y mayor área. Como los segmentos *AD* y *AD'* miden lo mismo, podemos girar el triángulo *ADE* desde *A* y convertirlo en *AD'E'*. Los lados del polígono *ABC'D'E'* son iguales a los de *ABCDE* y aquel tiene mayor área.

De igual forma, si un polígono tiene cuatro vértices consecutivos, *A, B, C y D* que no son cíclicos, el cuadrilátero *ABCD* puede ser cambiado por uno cíclico *ABC'D'*, al que, como *AD* = = *AD'*, con un giro de centro *A* y radio *AD* se puede adosar el resto del polígono primitivo, obteniendo un polígono de lados iguales y mayor área. Luego si hay solución de área máxima, esta se corresponde con el cíclico.

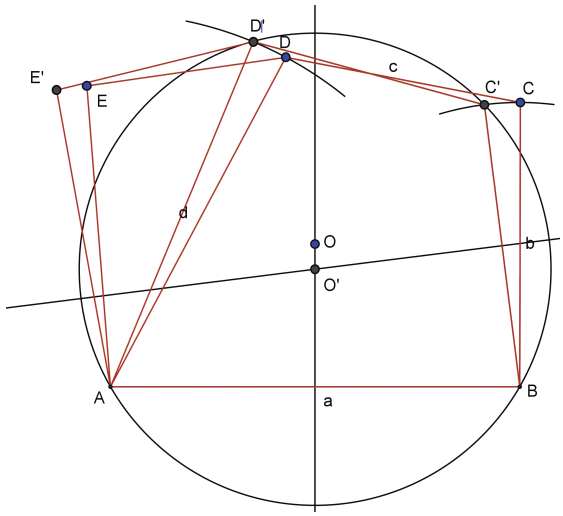


Figura 11

El cuadrilátero inscrito (actor protagonista)

Condición necesaria y suficiente

Un cuadrilátero convexo tiene circunferencia circunscrita si y solo si la suma de los ángulos opuestos es 180º.

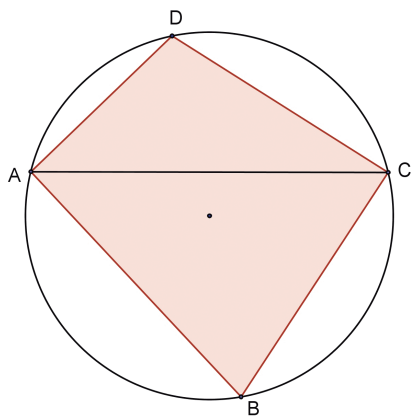


Figura 12

La condición es necesaria ya que al estar inscrito, los arcos de dos ángulos opuestos completan una circunferencia, y los ángulos inscritos miden la mitad de su arco.

La condición es suficiente.

Sean α, $180^\circ - \alpha$ los ángulos en B y D.

Las construcciones de los arcos capaces de los ángulos α, $180^\circ - \alpha$ sobre el segmento AC dan lugar a arcos complementarios de una misma circunferencia.

Su área

Se conoce como fórmula de Brahmagupta la generalización de la fórmula de Herón del área del triángulo al área del cuadrilátero cíclico. El matemático indio no dejó ninguna indicación de la demostración e incluso no señaló la necesidad de que el cuadrilátero fuera inscribible.

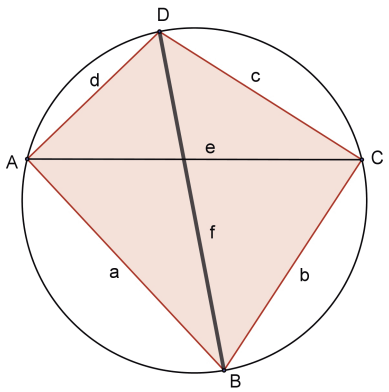


Figura 13

El área del cuadrilátero cíclico es:

$$K = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}$$

siendo, s el semiperímetro.

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

La fórmula ya está al alcance de cualquiera para su uso (la fórmula es práctica, fácil de recordar y está avalada por grandes firmas).

Basta hacer $d=0$ considerar el triángulo como un cuadrilátero con dos vértices iguales) y se obtiene la fórmula de Herón.

Como además de llamar la atención sobre la fórmula otros intereses nos animan, vamos a demostrar una fórmula más general: el área de un cuadrilátero convexo de lados y una diagonal dados, y así aireamos un poco a una fórmula poco conocida. Tan solo hace falta utilizar el teorema del coseno, un poco de trigonometría y paciencia para hacer «las cuentas».

Fórmula de Bretschneider

Sea el cuadrilátero $ABCD$, de lados a, b, c y d y diagonal e [2].

El área es

$$K = \frac{a\cdot b\cdot \operatorname{sen}\beta + c\cdot d\cdot \operatorname{sen}\alpha}{2},$$

de donde $4K = 2ab\operatorname{sen}\beta + 2cd\operatorname{sen}\alpha$ [1]

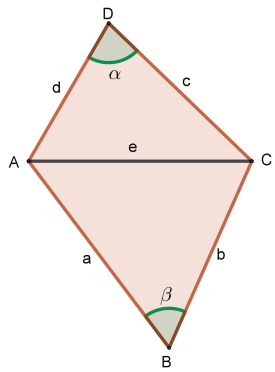


Figura 14

Por otro lado,

$$\left.\begin{aligned} e^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta \\ e^2 &= c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

y así,

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\beta - 2cd\cos\alpha \text{ [2]}$$

Elevamos al cuadrado las expresiones [1] y [2] y las sumamos,

$$\begin{aligned} &16K^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = \\ &= 4a^2b^2\operatorname{sen}^2\beta + 4c^2d^2\operatorname{sen}^2\alpha + 8abcd\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha + \\ &+ 4a^2b^2\cos^2\beta + 4c^2d^2\cos^2\alpha - 8abcd\cos\beta\cos\alpha = \\ &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\alpha+\beta) = \\ &= (2ab+2cd)^2 - 8abcd(1+\cos(\alpha+\beta)) = \\ &= (2ab+2cd)^2 - 16abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} \end{aligned}$$

Luego

$$16K^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2-$$
$$-16abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\ [3]$$

La diferencia de cuadrados del segundo miembro la expresamos como suma por diferencia, siendo igual a:

$$(a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2)\cdot$$
$$\cdot(-a^2+2ab-b^2+c^2+2cd+d^2)=$$
$$=((a+b)^2-(c-d)^2)\cdot((c+d)^2-(a-b)^2)=$$
$$=(a+b+c-d)\cdot(a+b-c+d)\cdot$$
$$\cdot(c+d+a-b)\cdot(c+d-a+b)=$$
$$=(p-2d)\cdot(p-2c)\cdot(p-2b)\cdot(p-2a)$$

siendo p el perímetro del cuadrilátero. Y acabamos dividiendo [3] por 16

$$K^2=(s-d)\cdot(s-c)\cdot(s-b)\cdot(s-a)-abcd\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

donde s es ahora el semiperímetro. Si

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ,\ K=\sqrt{(s-d)\cdot(s-c)\cdot(s-b)\cdot(s-a)}$$

y queda demostrado que:

> El cuadrilátero cíclico es el de mayor área entre los cuadriláteros de lados dados, a, b, c y d [3].

El área en el cuadrilátero genérico depende de una de sus diagonales e pero esta diagonal no aparece en los inscritos, ya que su longitud se calcula en función exclusiva de los lados:

$$e^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

En efecto, si el cuadrilátero es inscrito, de [2], teniendo en cuenta que $\cos\alpha=-\cos\beta$ obtenemos,

$$\cos\beta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

teniéndose que

$$e^2=a^2+b^2-2ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

y con simple manipulación algebraica la fórmula anunciada.

En este punto no podemos evitar mencionar la otra diagonal,

$$f^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$

y multiplicando y extrayendo raíces cuadradas obtener el llamado teorema de Ptolomeo:

> El producto de las diagonales de un cuadrilátero cíclico es igual a la suma de los productos de los lados opuestos: $e\cdot f=ac+bd$

De la fórmula de Brahmagupta (598-670) a la de Carl Anton Bretschneider (1808-1878) doce siglos nos contemplan. Hemos sustituido los razonamientos geométricos clásicos por el cálculo algebraico-trigonométrico.

Hagamos un canto a la belleza de las técnicas geométricas con una demostración al estilo de Ptolomeo de su citado teorema.

Consideremos un cuadrilátero inscrito $ABCD$ (figura 15), cuyas diagonales miden e y f.

Suponemos que

$$x\le\frac{\widehat{ADC}}{2}$$

(si no llamaríamos x a $\widehat{ADB}$).

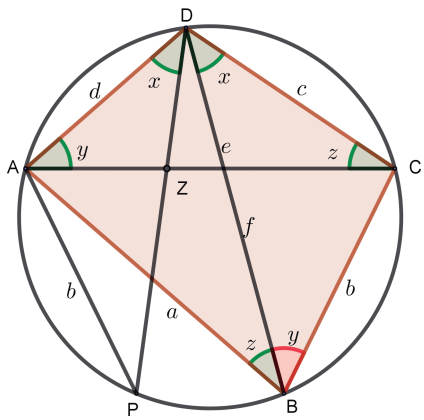


Figura 15

Con centro en A y radio b trazamos un arco que corta a la circunferencia inicial en P. Por abarcar arcos iguales tenemos los dos ángulos x, los dos ángulos y, y los dos z marcados. Los triángulos AZD (siendo Z la intersección de PD y AC) y BCD son semejantes. Así, siendo l la longitud de AZ, tenemos que:

$$\frac{l}{b}=\frac{d}{f}$$

de donde $l\cdot f=b\cdot d$ [4]

También son semejantes ZCD y ABD, obteniéndose:

$$\frac{e-l}{a}=\frac{c}{f}$$

y por tanto, $e\,f\,-\,l\,f=a\,c$ que al combinar con [4] culmina la fórmula buscada.

El resultado de Ptolomeo es una caracterización del cuadrilátero inscrito pero, al intentar desandar la demostración anterior, tenemos problemas a la hora de probar la semejanza de los triángulos, y la solución no es lo armoniosa que nos gustaría.

Así que demos a la geometría la belleza y al álgebra la potencia. Apliquemos la fórmula de Julian Lowell Coolidge.

Fórmula de Coolidge (1940)(4)

El área K de un cuadrilátero convexo cualquiera, de lados, a, b, c y d y diagonales e y f (siendo s el semiperímetro) (figura 16) es:

$$K=\frac{1}{4}\sqrt{4e^2\cdot f^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}=$$
$$=\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)-\frac{1}{4}(ac+bd+ef)\cdot(ac+bd-ef)}$$

No pensamos demostrarla (es un farragoso pero no muy complicado ejercicio de cálculo algebraico-geométrico a partir de la Fórmula de Bretschneider) pero sí queremos usarla para nuestros propósitos actuales.

Comparando esta fórmula con la del área del cuadrilátero inscrito se *colige* que, si y solo si $e\cdot f=ac+bd$ el cuadrilátero es cíclico.

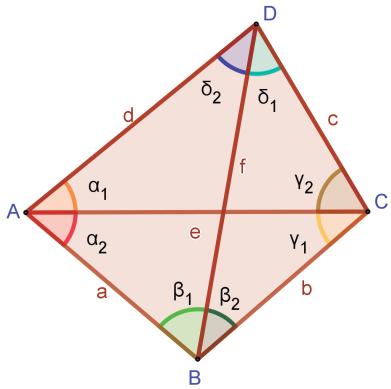


Figura 16

La geometría no se rinde tan fácilmente y responde al reto con una bonita demostración visual (5) (aunque no tan sencilla como para tildarla de «sin palabras»).

A los triángulos, ACD, BCD y ABD, se les aplican homotecias de razones f, d y c respectivamente (figura 17).

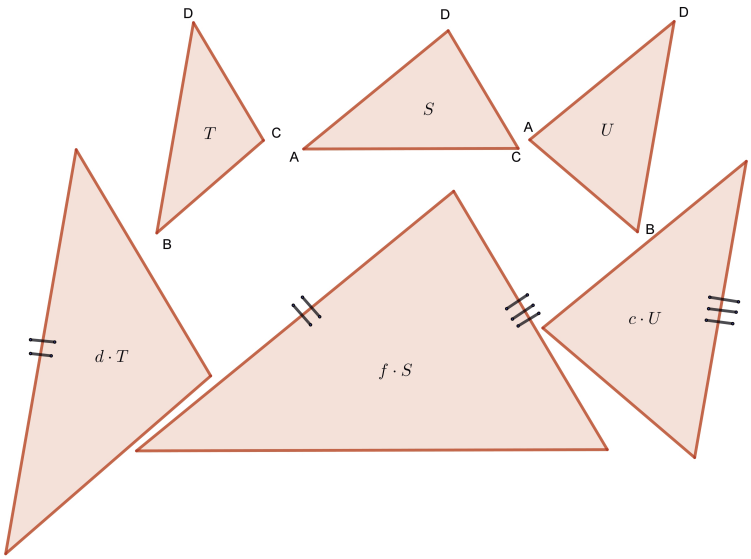


Figura 17

Los triángulos resultantes pueden ser pegados, formando un pentágono con dos lados iguales, $c \cdot d$ (figura 18).

Por otro lado, si $d \cdot b + c \cdot a = e \cdot f$, construimos el paralelogramo $QRNM$, de lados $c \cdot d$ y $e \cdot f$, siendo $MP = d \cdot b$, y $PN = a \cdot c$.

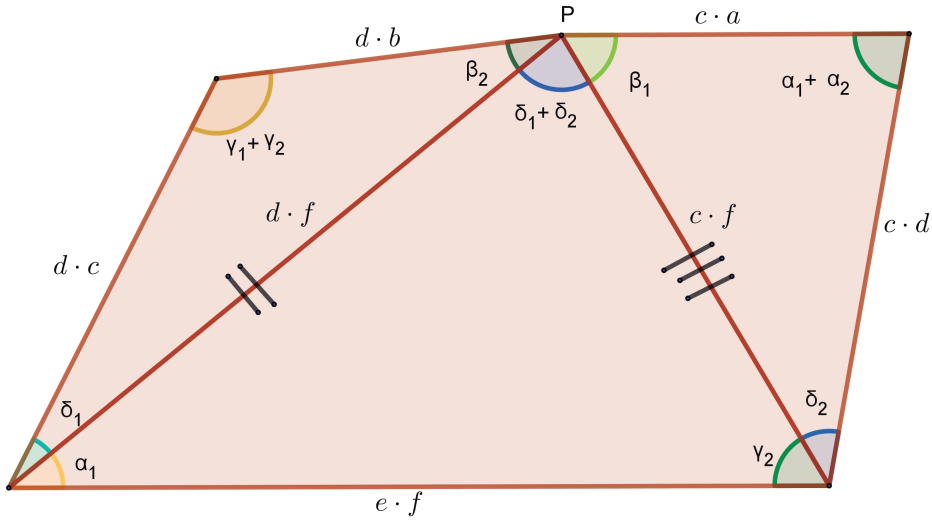


Figura 18

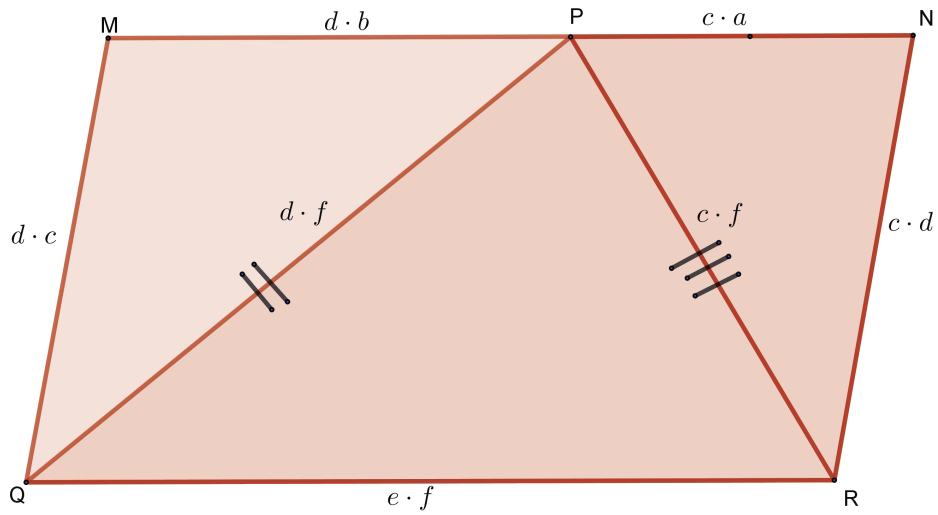


Figura 19

Si el cuadrilátero de partida es cíclico,

$$\beta_2 + (\delta_1 + \delta_2) + \beta_1 = 180^\circ$$

y el pentágono es un cuadrilátero, pero también,

$$(\gamma_1 + \gamma_2) + (\alpha_1 + \alpha_2) = 180^\circ$$

y por ello el cuadrilátero es un paralelogramo, teniéndose que: $d \cdot b + c \cdot a = e \cdot f$.

Los lados de los triángulos que aparecen son los de nuestra construcción inicial, luego lo es el dibujo completo, con lo que resulta que se cumple la condición:

$$\beta_2 + (\delta_1 + \delta_2) + \beta_1 = 180^\circ$$

y el cuadrilátero es cíclico.

Referencias bibliografícas

Boyer, C. (2003), *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid, 283-286.

Coolidge, J. L. (1939), «A historically interesting formula for the area of a quadrilateral», *American Mathematical Monthly,* n.º 46, 345–347.

Dunham, W. (1992), *Viaje a través de los genios*, Ediciones Pirámide, 154-176.

Herrero, J. (2012), *La Gaceta*, vol 15, n.º 2, 335-354. — <webs.um.es/pherrero/prob_iso_1.pdf>.

Jesús García Gual
<jesusgarciagual@gmail.com>

Mercedes Sánchez Benito
Universidad Complutense de Madrid
<merche@mat.ucm.es>

1 Podemos ver una justificación en: <https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Constructions/CyclicQuadrilateral.shtml#construction>.

2 <https://brilliant.org/wiki/bretschneiders-formula/>.

3 Una demostración sencilla con cálculo diferencial <https://www.maa.org/sites/default/files/peter0901311967.pdf> (con la única pega de emplear la letra d tanto para un lado como para el operador derivada).

suma+ 90
Secciones
Marzo 2019
pp. 93-102

Actividades con calculadora en un entorno de resolución de problemas

Ricard Peiró i Estruch
María Teresa Navarro Moncho

Potser hi ha una bellesa purament intelectual: la que pugui tenir un teorema matemàtic o un vers de Paul Valéry.

Jon Fuster, Introdución a *El quadern gris* de Josep Pla[1]

Sí a las calculadoras

En la tercera entrega de esta sección seguimos presentando propuestas de actividades con calculadora diseñadas en el seno del grupo de calculadoras de la FESPM que cuenta con la colaboración de la División Educativa de Casio. En esta ocasión, las actividades se centran en la búsqueda de patrones y modelos en tres tipos de contextos: un contexto geométrico, un contexto real y un contexto astronómico.

El uso de la calculadora, tal como hemos sugerido en las entregas anteriores, permite que el alumnado sea protagonista de su aprendizaje de las matemáticas. Protagonismo que consigue cuando tiene que tomar decisiones, validar modelos y reflexionar sobre los procesos que le han permitido dar respuesta a las cuestiones planteadas. Ahora bien, para que su protagonismo sea posible, el alumnado necesita tiempo y oportunidades. Tiempo y oportunidades para explorar, hacer conjeturas, probarlas o refutarlas, visualizar, analizar, validar los resultados…

Como docentes tenemos la obligación de proporcionar al alumnado el tiempo y las oportunidades para aprender. Para aprender más y mejor, proporcionándole actividades que, en un entorno de resolución de problemas, favorezcan el razonamiento, fomenten la adquisición de nuevos conocimientos a partir de lo que ya saben, inviten

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2018 y aceptado en enero de 2019

a investigar y probar. Pues razonar y comprobar ayudan a entender las matemáticas. Actividades que establezcan conexiones dentro de las matemáticas pero también entre las matemáticas y el mundo que les rodea. Pues las conexiones facilitan el aprendizaje y dotan de significado los conocimientos matemáticos.

El uso de la calculadora en las actividades que presentamos en esta ocasión permite el análisis de los resultados agilizando los procesos de cálculo, ayuda a la visualización de situaciones difíciles de abstraer y propicia diferentes formas de llegar a las soluciones, contribuyendo de esta manera a tejer un pensamiento matemático más rico y significativo.

Descripción de las actividades

En este artículo presentamos tres actividades para el aula con la calculadora científica Casio Classwiz fx-570/991SP X II:

— Rectángulo de área mínima
— Fabricando cazos
— Periodo orbital

La segunda, se propuso a alumnado de 2.º de Bachillerato de Ciencias. Se trata de un problema de optimización en un contexto real cuya función objetivo es una función irracional.

La última actividad se realizó con alumnado de 1.º de Bachillerato de Ciencias Sociales. Obtener la función que modeliza el periodo orbital es una tarea cuyo propósito es ofrecer un contexto en el que la calculadora se convierte en una herramienta esencial en la toma de decisiones, la argumentación y el análisis y validación de los resultados.

Rectángulo de área mínima

Uno de los propósitos de las actividades que diseñamos en el grupo de calculadores consiste en transformar ejercicios clásicos, de aplicación de conocimientos previamente adquiridos, en actividades que establezcan conexiones entre los diferentes bloques de contenidos.

Con rectángulos de área mínima queremos mostrar una actividad de este estilo. A partir de un ejercicio clásico de geometría de secundaria, concretamente de un ejercicio de aplicación del

Rectángulo de área mínima

Los lados del rectángulo PQRS miden:
PQ = 10, PS = 6
Los puntos A, B, C, D del rectángulo se han elegido de manera que:
PA = QB = RC = SD = x
a) ¿Cuál es el área del cuadrilátero ABCD si x = 1?
b) ¿Qué función modeliza el área del cuadrilátero ABCD? Describe sus características y representa gráficamente la función.
c) ¿Qué valores puede tomar x?
d) ¿Para qué valor de x el área del cuadrilátero ABCD es mínima? ¿Cuál es el área mínima?
e) ¿Para qué valor de x el área del cuadrilátero ABCD vale 40 cm^2?
f) ¿Para qué valores de x el área del cuadrilátero ABCD es menor o igual que 30 cm^2?

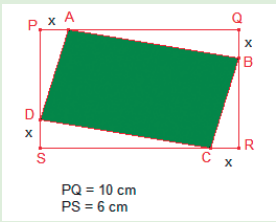


Figura 1

Dichas actividades se han implementado en diferentes niveles del IES Abastos de Valencia en el curso 2017-2018. En todos los casos se agrupó al alumnado por parejas con el fin de facilitar la cooperación.

La primera actividad se realizó con alumnado de 4.º de la ESO en la que se pretende que el alumnado busque patrones y modelice una situación en un contexto geométrico.

teorema de Pitágoras y de cálculo de áreas de figuras planas, proponemos una actividad en la que, además del ejercicio clásico, se establecen conexiones entre la geometría y el álgebra más allá de poner un problema en ecuaciones. El alumnado investiga y reflexiona, utilizando diferentes menús de los que dispone la calculadora, las relaciones entre las soluciones de una ecuación y la gráfica de su función asociada; entre las so-

luciones de una inecuación y su significado gráfico; y aborda de manera natural problemas de optimización sin la necesidad de tener conocimientos de análisis.

Esta actividad guiada permitió al alumnado de 4.º de secundaria abordar un problema de modelización desde un caso particular. Las preguntas finales les hicieron contrastar los cálculos algebraicos con las representaciones gráficas para dotar de significado conceptos como dominio, recorrido y mínimo de una función.

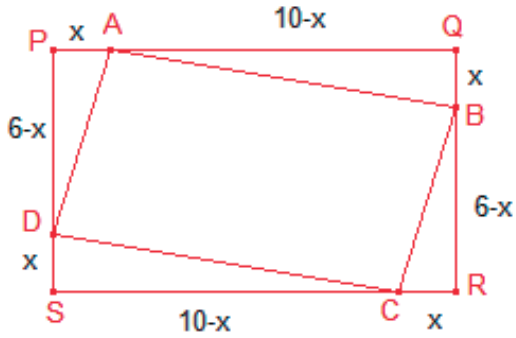


Figura 2

Del cálculo del área en el caso particular obtuvieron la generalización del área del rectángulo *ABCD* como el área del rectángulo *PQRS* menos la suma de las áreas de los triángulos rectángulos:

$$S_{ABCD}(x) = 10 \cdot 6 - (x \cdot (6-x) + x \cdot (10-x))$$
$$S(x) = 2x^2 - 16x + 60$$

Dado que se trata de una función polinómica de segundo grado cuyo coeficiente principal es positivo, su representación gráfica es una parábola cóncava. Para obtener dicha representación, el alumnado utilizó el menú Tabla y la función Código QR de la calculadora. Para elegir el rango de la tabla, el alumnado acudió a las dimensiones del rectángulo *PQRS*, con lo que obtuvieron el dominio de la función:

$$x \in [0,6]$$



Figura 3

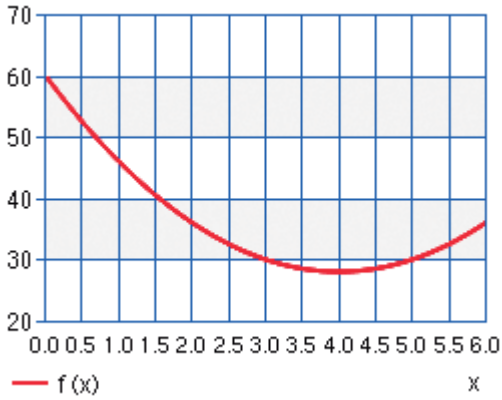


Figura 4

De la gráfica observaron que el mínimo se alcanza en $x = 4$. Algunos estudiantes utilizaron la tabla para contrastar dicho resultado y obtener el valor del área mínima:

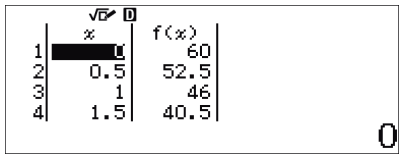


Figura 5a

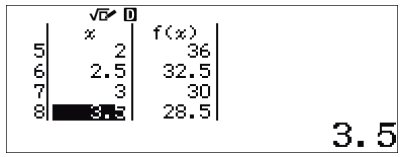


Figura 5b

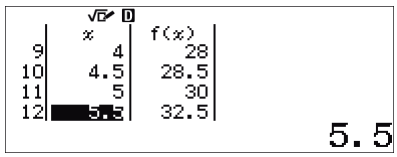


Figura 5c

Otros, en cambio, observaron que el mínimo se alcanza en el vértice de la parábola y utilizaron el menú Ecuaciones para obtener el valor del área mínima resolviendo la ecuación $S(x) = 0$:

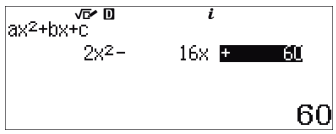


Figura 6a

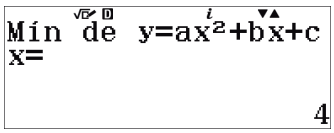


Figura 6b

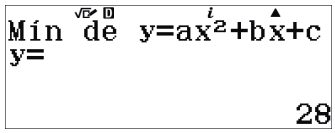


Figura 6c

El mínimo se alcanza en $x = 4$ cm y el área mínima 28 cm^2. Para determinar los valores de x para los que el área del cuadrilátero $ABCD$ es de 40 cm^2, resolvieron la ecuación utilizando el menú Ecuaciones, tras expresar la ecuación en la forma adecuada:

$$2x^2 - 16x + 60 = 40$$

$$2x^2 - 16x + 60 = 0$$

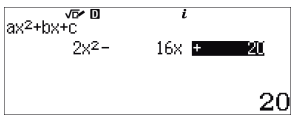


Figura 7a

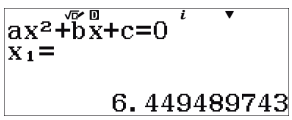


Figura 7b

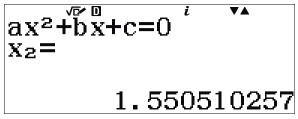


Figura 7c

El alumnado tuvo que relacionar los resultados que proporciona la calculadora con el dominio de la función. Observaron que la primera solución no pertenece al dominio y por tanto el área del cuadrilátero es 40 cm^2 cuando

$$x = 4 - \sqrt{6} \approx 1{,}55\,\text{cm}$$

Para determinar los valores para los que el área del cuadrilátero $ABCD$ es menor o igual que 30 cm^2 resolvieron la inecuación en el menú Inecuaciones:

$$S(x) \leq 30$$

$$2x^2 - 16x + 60 \leq 30$$

$$2x^2 - 16x + 30 \leq 0$$

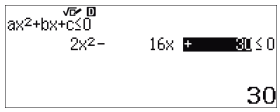


Figura 8a

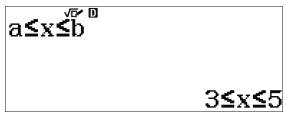


Figura 8b

Confrontaron los resultados obtenidos con la calculadora con el dominio y la representación gráfica para concluir que el área del cuadrilátero $ABCD$ es menor o igual que 30 cm^2 cuando

$$x \in [3,5]$$

Fabricando cazos

Otro de nuestros propósitos es el de generar problemas que permitan establecer conexiones entre las matemáticas y el mundo real. Problemas, lo más reales posibles, en los que el uso de la tecnología aporte aspectos que mejoren la comprensión de los conceptos y los enriquezcan. Que permitan llevar al aula situaciones que sin el uso de la tecnología estarían fuera del alcance de la mayoría del alumnado de secundaria y bachillerato.

Fabricando cazos

En una fábrica de utensilios de cocina se proponen fabricar cazos de forma cilíndrica de un litro de capacidad. Disponen de planchas de 0,5 mm de grosor y quieren minimizar los costes de fabricación.



Figura 9

¿Cuáles son las dimensiones del cazo para que el coste de fabricación sea mínimo? ¿Cuál es el área mínima del cazo?

Compara la altura del cazo con el radio de la base, ¿qué observas?

Fabricando cazos es un problema de optimización que se modela con una función irracional. Para obtener su mínimo se debe resolver una ecuación transcendente de difícil analítica. Ahora bien, con la calculadora el alumnado puede obtener el mínimo por métodos iterativos, a partir de la tabla de valores; valor que puede comparar con la representación gráfica. Además, con la ayuda de la calculadora y las indicaciones necesarias del profesorado, puede resolver la ecuación $f'(x) = 0$ y comparar el resultado con los valores que ellos han obtenido del mínimo de la función. Fabricando cazos es una oportunidad para que el alumnado comprenda que en la vida real la mayoría de los problemas generan ecuaciones que solamente se pueden resolver por métodos numéricos.

En primer lugar, el alumnado de 2.º de Bachillerato del IES Abastos tuvo que relacionar las medidas de volumen y capacidad.

A partir de la expresión de la altura de un cilindro de radio r y 1000 cm^3 de volumen:

$$\pi r^2 h = 1000 \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

y la del área total del cazo, formada por un círculo de radio r y un rectángulo de base y altura h:

$$S(r,h) = \pi r^2 + 2\pi r h$$

obtuvieron la función para optimizar:

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2},\ r \geq 0$$

$$S(r) = \pi r^2 + \frac{1000}{r},\ r \geq 0$$

En la gráfica observaron que el mínimo se alcanza para un radio entre *6,5* y *7 cm*. A partir de la tabla de valores obtuvieron con mayor precisión el radio que minimiza el área del cazo como se muestra en las siguientes imágenes:

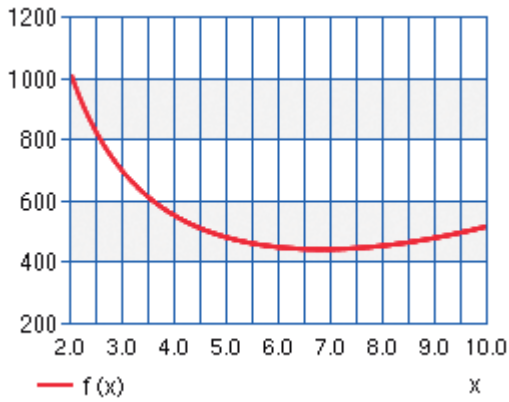


Figura 10a

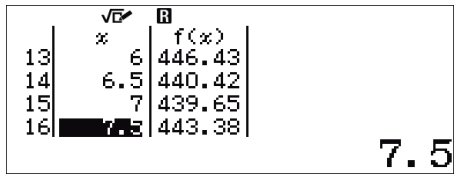


Figura 10b

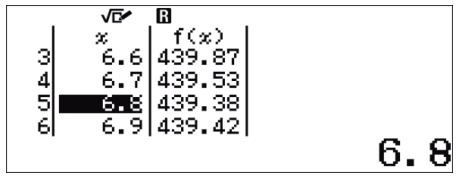


Figura 10c

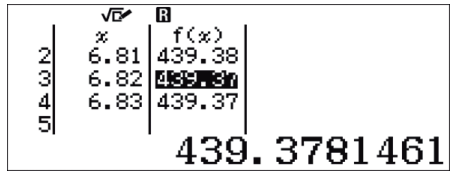


Figura 10d

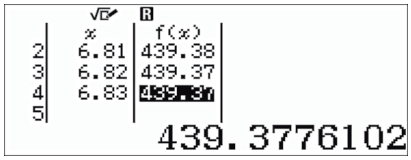


Figura 10e

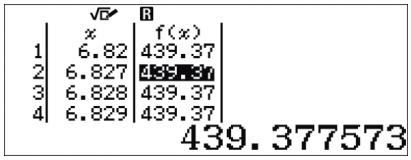


Figura 10f

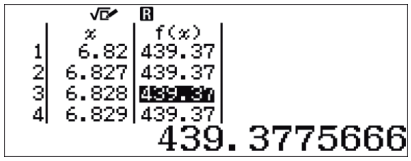


Figura 10g

Para comprobar que el mínimo se alcanza en un valor aproximado del radio de 6,83 cm y que el área mínima es aproximadamente 439,38 cm^2 resolvieron la ecuación *S'(r) = 0*. Para ello utilizaron la función SOLVE del menú Calcular. Esta función necesita elegir una semilla para realizar los cálculos. El alumnado eligió el *6* como semilla:

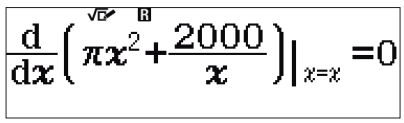


Figura 11a

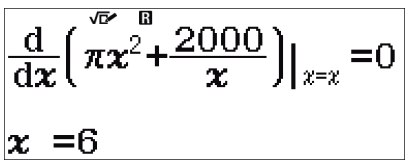


Figura 11b

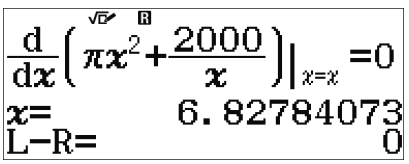


Figura 11c

Con la opción de almacenar el valor del radio en la calculadora corroboraron el valor mínimo del área:

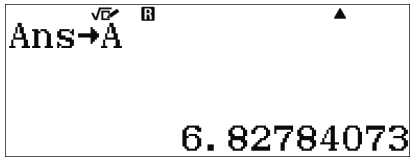


Figura 12a

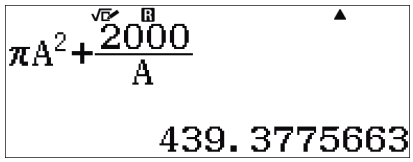


Figura 12b

El valor de la altura, 6,827840438 cm, revela que el coste mínimo de fabricación se consigue con un cazo en el que el radio y la altura con prácticamente iguales.

Periodo orbital

La curiosidad de los seres humanos por el universo es tan antigua como la humanidad. La mayoría de nuestro alumnado comparte esta curiosidad. De manera que conectar las matemáticas con un tema de su interés mejora su predisposición a aprender contenidos que descontextualizados les resulta muy pesados y poco significativos.

Uno de los objetivos que debería ser irrenunciable en la enseñanza es que el alumnado aprenda a ser crítico. Con esta actividad se propone un contexto idóneo para que el estudio de la regresión no sea una rutina más sino un análisis de las diferentes regresiones de que dispone la calculadora para ser capaces de determinar la que mejor se ajusta a la situación planteada.

El alumnado de primero bachillerato de ciencias sociales que realizó esta actividad llevaba tiempo utilizando la calculadora y conocían tanto la regresión lineal como otros tipos de regresiones.

Periodo orbital

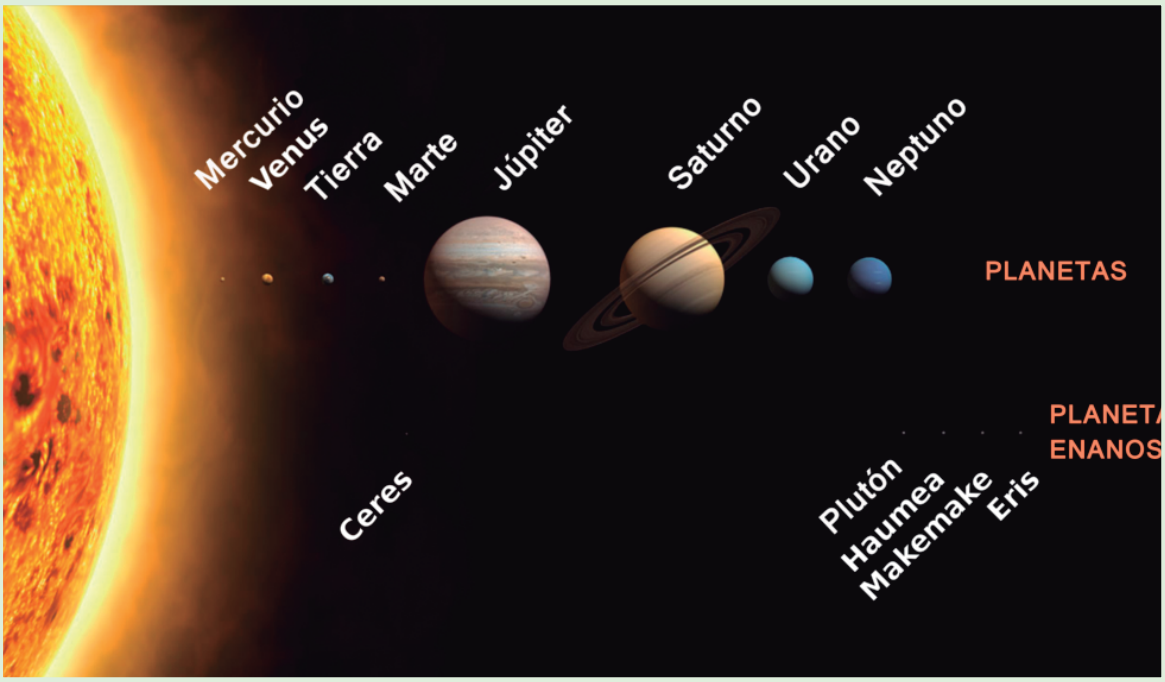


Figura 13. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sistema_Solar_tama%C3%B1o_a_escala.svg>

La tercera Ley de Kepler del movimiento de los planetas afirma que, para cualquier planeta, el cuadrado del periodo orbital (T) o tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol, es directamente proporcional al cubo de la distancia media al Sol (R).

$$T^2 = k \cdot R^3, \quad k \simeq 1 \frac{años^2}{UA^3}$$

En la siguiente tabla se relaciona la distancia media entre el Sol y cada uno de los planetas y el periodo orbital.
1 UA (unidad astronómica) es igual a la distancia media del Sol a la Tierra.
1 año es el periodo orbital de la Tierra

Planeta	Distancia media Sol-Planeta (UA)	Periodo orbital (años)
Mercurio	0,387	0,24
Venus	0,7239	0,62
Tierra	1	1
Marte	1,524	1,88
Jupiter	5,203	11,86
Saturno	9,537	29,45
Urano	19,191	
Neptuno		164,79

Dibuja una gráfica que represente el periodo orbital en función de la distancia media.
Utilizando el menú *Estadística* determina:
a) ¿Qué regresión se ajusta mejor a los datos?
b) Calcula los datos que faltan de la tabla para la mejor regresión

Desde el menú Estadística generaron un código QR para obtener la nube de puntos.

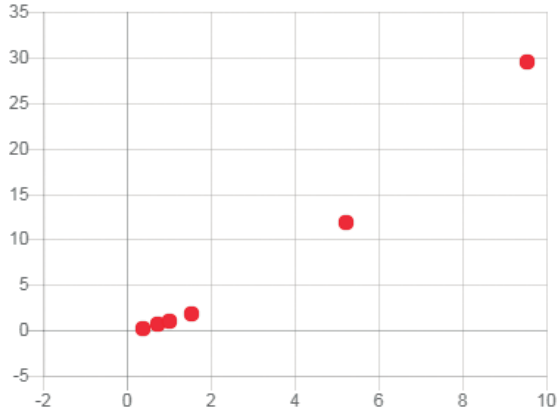


Figura 14. Nube de puntos

La calculadora dispone de 7 tipos de regresiones, lo que permite al alumnado indagar sobre la adecuación de cada tipo de regresión disponible. Desde la aplicación Casio Edu+ probaron diferentes regresiones para visualizar cuáles se ajustan mejor a la nube de puntos.

El alumnado pudo observar que la regresión lineal no es siempre la que mejor se ajusta a una nube de puntos. Para justificar analíticamente que la regresión potencial es la que mejor se ajusta a la nube de puntos, acudieron de nuevo a la calculadora para obtener las ecuaciones de la regresión lineal y la regresión potencial y sus respectivos coeficientes de correlación.

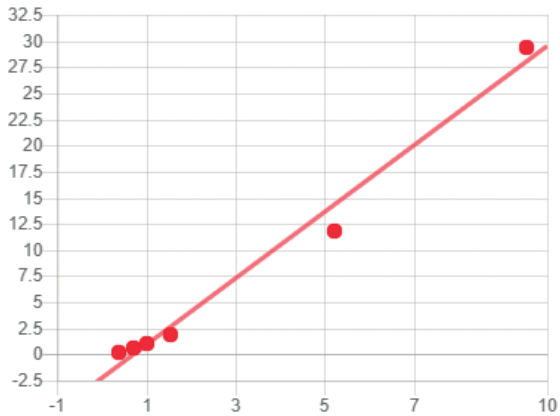


Figura 15a. Regresión lineal

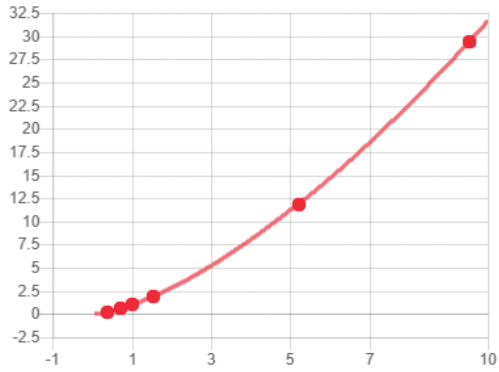


Figura 15b. Regresión potencial

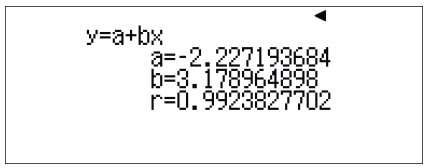


Figura 16a

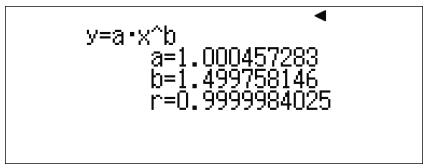


Figura 16b

Aunque el coeficiente de correlación en la regresión lineal es muy aceptable, el de la regresión potencial es prácticamente 1. Pero, además, a la hora de modelizar es necesario tener en cuenta un análisis cualitativo del fenómeno estudiado. Con la regresión potencial se observa que la regresión potencial es aproximadamente

$$y = x^{3/2}$$

función que cumple la tercera ley de Kepler.

Una vez obtenido el modelo, con la ayuda de la calculadora completaron los datos que faltaban en la tabla.

— El periodo orbital de Urano se puede obtener en la calculadora de diferentes formas. Una de ellas es el cálculo de y mediante la función OPTN regresión:

Luego, el periodo orbital de Urano es aproximadamente 84,05 años.

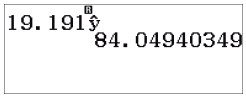


Figura 17

— La distancia de Neptuno al Sol se puede calcular utilizando la función SOLVE de la calculadora o, como el valor anterior, calculando los valores de x con la función OPTN regresión:

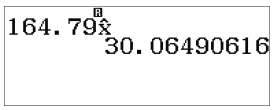


Figura 18

Por consiguiente, la distancia de Neptuno al Sol es aproximadamente *30,06 UA*.

El alumnado comprobó, para terminar la actividad, que si se utiliza la regresión lineal para obtener estos mismos valores, el error que se comete es demasiado grande:

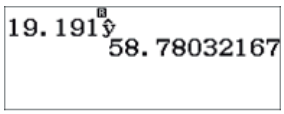


Figura 19a

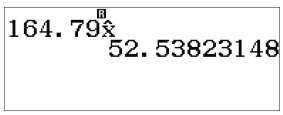


Figura 19b

Reflexión final

Las actividades que se han presentado pretenden, por una parte, compartir con el profesorado experiencias que han motivado al alumnado a aprender en un entorno de resolución de problemas. Por otra parte, mostrar cómo la calculadora contribuye a la adquisición del pensamiento crítico y a la mejora de la competencia matemática del alumnado.

De acuerdo con las conclusiones del debate «Las calculadoras en el aula», coordinado por Mauricio Contreras y Ricard Peiró, que se abrió con motivo de las XIV JAEM celebradas en Girona en el año 2009, las actividades mostradas evidencian la idea de que las calculadoras contribuyen a crear el pensamiento matemático, que las matemáticas no consisten en hacer muchas operaciones, sino en saber qué operaciones son las que hay que hacer.

En las actividades presentadas se ha hecho patente que la calculadora es un elemento investigador y motivador importantísimo, con la que el alumnado puede estar continuamente verificando y desechando hipótesis.



Figura 20. Rectángulo de área mínima

La tecnología en general, y la calculadora, en particular, permite anticipar contenidos o preparar el camino hacia otros contenidos posteriores. A la vez, hace que la visión de las matemáticas y de los contenidos matemáticos cambie de forma radical. Con la implementación de estas actividades en el aula hemos podido comprobar cómo la calculadora favorece en el alumnado la exploración, le facilita la formulación y validación de conjeturas, favoreciendo así el pensamiento inductivo y reflexivo de modo natural.

Las dos últimas actividades muestran que las calculadoras son herramientas válidas para modelizar situaciones reales (o simularlas) y para hacer

predicciones a partir del modelo matemático que mejor se ajuste a los datos reales. A su vez, permiten validar modelos matemáticos previamente construidos a partir de un conjunto de datos.

Con el uso de la calculadora en el aula, el alumnado no tiene que dedicar tanto tiempo al cálculo, tiempo que le permite centrarse en lo realmente importante: la toma de decisiones y la reflexión.

En definitiva, el uso de las calculadoras hace que la enseñanza de las matemáticas se transforme radicalmente. La enseñanza de las matemáticas deja de centrarse en una serie de ejercicios repetitivos y tediosos, y se transforma en una enseñanza cuyo principal objetivo es la resolución de problemas.

La calculadora ayuda a resolver problemas y permite generar nuevos retos, nuevas preguntas, nuevos problemas.

Referencias bibliográficas

AA.VV. (2017), *Actividades para el aula con calculadora científica,* Casio-FESPM. Barcelona. <www.fespm.es/Libro-Actividades-para-el-aula-con>.

Página personal de Ricard Peiró i Estruch. <www.ricardpeiro.es/apunts/apunts.htm>.

Ricard Peiró i Estruch
IES Abastos, Valencia
<ricardpe@gmail.com>

María Teresa Navarro Moncho
CEFIRE – Específico Ámbito Científico, Tecnològico y Matemático, Valencia
<Teresa.Navarro-Moncho@uv.es>

1 «Quizás una belleza puramente intelectual: la que pueda tener un teorema matemático o un verso de Paul Valery».
Joan Fuster.

FESPM & Cía



19 JAEM.
Un Atlántico que *Suma*

Segundo Anuncio
Comité Organizador Local



Figura 1. La Coruña desde el Paseo Marítimo

A falta de algo más de 3 meses para el comienzo de las 19 JAEM, que se celebrarán en La Coruña del 3 al 6 de julio, desde el comité organizador seguimos trabajando casi sin descanso para conseguir que esta nueva edición de las JAEM satisfaga los intereses y las expectativas de todo el profesorado asistente.

En un proyecto de estas dimensiones son muchos los elementos a coordinar, muchas las personas que con su ilusión contribuirán al éxito del mismo; pero debemos tener siempre presente cuál es la razón que da sentido a todo este trabajo: la participación del profesorado.

Las 19 JAEM quieren ser un foro de reflexión sobre la educación matemática desde los primeros niveles, un lugar de intercambio de experiencias, un semillero de colaboraciones entre docentes, de ideas nuevas que más tarde germinarán en las aulas de toda España.

Tal y como recoge nuestro lema, las 19 JAEM nacen con ánimo de sumar, siendo conscientes de la importancia de todas las aportaciones, desde la primera conferencia hasta la última comunicación, sabiendo que, al igual que ediciones anteriores, servirán para mejorar realmente la educación matemática de alumnos y alumnas de todo el estado.

Así, desde el comité organizador os animamos a formar parte de estas 19 JAEM, a estar en La Coruña el próximo mes de julio, vuestra asistencia es imprescindible para que cristalicen el trabajo y la ilusión de estos últimos años.



Figura 2. Ayuntamiento de La Coruña

Fechas y sede de las 19 JAEM

Las 19 JAEM se celebrarán del 3 al 6 de julio de 2019 en la ciudad de La Coruña. La sede de las jornadas será Palexco (figura 3).

Comité científico

La labor del comité científico consiste principalmente en fijar las líneas temáticas sobre las que se estructura todo el programa científico de las JAEM, así como proponer a los conferenciantes y ponentes invitados. Está compuesto por siete miembros, nombrados por la Junta de Gobierno de la FESPM, siguiendo las directrices recogidas en las normas de organización de las jornadas y conjugando la participación de personas del comité local con otras con experiencia en ediciones anteriores.

Las personas que componen el comité científico de estas 19 JAEM son:

— Agustín Carrillo Sánchez de Albornoz. Secretario General de la FESPM y socio de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales».
— Iolanda Guevara Casanova. Codirectora de SUMA y socia de la Federació d'Entitats per a l'Enseyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT).
— Juan Martínez Calvete. Vicepresidente de la FESPM y socio de la Sociedad Madrileña del Profesorado de Matemáticas «Emma Castelnuovo».
— Juani Navas Pleguezuelos. Secretaria de Formación del Profesorado de la FESPM y socia de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales».
— M.ª Cristina Naya Riveiro. Miembro del comité organizador local y socia de la Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA).
— Tomás Queralt i Llopis. Secretario General de la Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi».
— Julio Rodríguez Taboada. Miembro del comité organizador local y presidente de la Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA).

Comité organizador local

Desde los primeros pasos de este complejo proceso de organización de las 19 JAEM, en AGAPEMA constituimos un comité local, encargado de realizar las gestiones y trámites necesarios para que, llegado el momento, todo funcione correctamente. Además de la organización de espacios, infraestructuras, materiales específicos para los días en que se celebran las JAEM, los



Figura 3. La sede de las 19 JAEM: Palexco (Muelle de trasatlánticos)

miembros del comité organizador se encargan de gestionar la web de las jornadas, diseñar e imprimir todos los documentos de las mismas, gestionar las posibles colaboraciones de instituciones públicas y privadas, así como la contabilidad de las 19 JAEM.

Este comité está compuesto por los siguientes miembros:

— José María Barca López. IES de Valga.
— Andrés E. Cabana González. IES de Salvaterra do Miño.
— César Docanto Vázquez. IES David Buján (Cambre).
— Julio Ferro Marra. Profesor jubilado.
— Pilar García Agra. IES Nº 1 de Ordes.
— Marina Germiñas Miguéns. IES Aquis Celenis (Caldas de Reis).
— Isabel Miguélez Pose. Profesora jubilada.
— Luz J. Mouzo Riobóo. IES Maximino Romero de Lema (Baio-Zas).
— M.ª Cristina Naya Riveiro. Universidade da Coruña.
— Miti Peñamaría Ramón. Profesora jubilada.
— Marisol Pérez Blanco. Profesora jubilada.
— Andrea Piñeiro Álvarez. CPI Covaterreña (Baiona).
— Víctor Pollán Fernández. Profesor jubilado.
— Julio Rodríguez Taboada. CPI Dos Dices (Rois).
— Covadonga Rodríguez-Moldes Rey. IES de Mugardos.
— Sandra Sambade Nieto. IES A Pastoriza (Arteixo).
— Enrique de la Torre Fernández. Universidade de A Coruña.
— Manuel Vilariño Freire. IES Leiras Pulpeiro (Lugo).

Además de ellos, otros muchos socios y socias de AGAPEMA se están volcando desde el primer momento, colaborando en distintos aspectos para facilitar o complementar el trabajo del comité local.

Programa científico de las 19 JAEM

La estructura de este programa científico se organiza en torno a los siete núcleos temáticos decididos por el comité científico, que son:



Figura 4. Playa de Riazor



Figura 5. *El pulpo* de Javier M. Padín Martínez, en el Paseo Marítimo

— Educación Infantil
— Educación Primaria
— Didáctica y Formación docente
— Divulgación Matemática
— Materiales y Recursos didácticos
— Metodología y Evaluación
— STEAM. Conexiones y contextos

A pesar de que las aportaciones del profesorado participante constituyen la mayor parte de los trabajos que componen el programa de las 19 JAEM, el comité científico propone a las personas que impartirán las conferencias plenarias y las ponencias.

Conferencias plenarias

El congreso contará con cuatro conferencias plenarias:

Matemáticas y ciencias forenses
Ángel Carracedo Álvarez

El avance más importante en la historia de las ciencias forenses fue el momento en que las evidencias forenses se pasaron a expresar en términos de probabilidad.

Las matemáticas juegan un papel fundamental en las ciencias forenses ya que la valoración de la prueba trasciende a los especialistas y es preciso que las personas del mundo del derecho y la población general tengan un conocimiento básico de probabilidades. Si no es así puede llevar a malinterpetaciones graves del valor de la prueba y errores trascendentes en los veredictos de jueces y jurados.

Los recursos didácticos en la formación continua del profesorado
María Teresa Navarro Moncho

El uso apropiado de recursos didácticos favorece la construcción de modelos sobre los que sustentar el conocimiento y la competencia matemática. En la formación del profesorado, los recursos deben propiciar la reflexión sobre la práctica docente, fundamentalmente en tres aspectos: qué enseñar, cómo hacerlo y con qué medios.

Enseñar matemáticas: un compromiso con el oficio de preguntar
Cecilia Calvo Pesce

Aunque el oficio de preguntar se asocia habitualmente al de periodistas o encuestadores, el nuestro también está ligado a la realización de preguntas: cuándo proponemos problemas,

cuándo planificamos experiencias manipulativas, cuándo intervenimos en una discusión con los alumnos con la intención de que construyan conocimiento matemático. En la conferencia buscaré, a través de situaciones prácticas, reflexionar sobre el compromiso de los docentes de matemáticas en la búsqueda de buenas preguntas para llevar al aula.

Tres
Rafael Ramírez Uclés

Mientras reposamos curricularmente el número tres, desarrollaremos una propuesta para diseñar tareas ricas para el profesor, para los estudiantes con alta capacidad matemática y para todos los demás…

Ponencias

En esta edición de las JAEM están programadas dos ponencias por cada núcleo temático, algunas de las cuales serán complementadas con un taller impartido por los mismos ponentes.

Educación infantil

La modelización en edades tempranas
Pedro Berjas Sepúlveda

Cualquier etapa educativa, pero en especial la educación infantil, debería basar sus estrategias de enseñanza-aprendizaje en la modelización como herramienta para construir mecanismos que permiten, entre otros, operar con números y especialmente para la resolución de problemas.

De la clase de mates a la competencia en educación infantil
María Salgado Somoza

Las directrices curriculares y tendencias metodológicas actuales apuntan a que el pensamiento matemático no se aprende recibiendo información de forma pasiva o aprendiendo unas técni-



Figura 6. Torre de Hércules

cas, sino a través de un proceso activo, y un deseo de hallar una respuesta a contextos y problemas reales. El docente tiene que enseñar a pensar.

Educación primaria

Artefactos, cápsulas, serpientes y embudos, para vivir la matemática
Creu Planells y Marisa Soriano

Caixasum, embutsum, serpientes y cápsulas. Vivir la matemática desde la magia y el juego.

Experiencias de aula bajo el foco de la comunicación
Pepa Pizà

En clase de matemáticas, comunicarse… ¿para qué? ¡Esa es la cuestión! La comunicación puede mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ello..., invirtamos tiempo en pensar, manipular y también ¡en comunicar!

Didáctica y formación docente

Quiero cambiar mi metodología para la enseñanza de las matemáticas...pero no sé cómo hacerlo
Julio Ferro Marra

Hace años que venimos oyendo que la forma de enseñar matemáticas en nuestras escuelas ha quedado obsoleta, y debemos cambiar a otro método que haga las clases más activas, con un aprendizaje significativo, donde el alumnado es el protagonista. Este debe ir creando su propio conocimiento con el empleo adecuado de recursos y materiales que le ayuden a la comprensión de los conceptos, potenciando la autoestima, la creatividad, el espíritu crítico y la autonomía.

El trabajo en red en la formación del profesorado
Mireia López Beltrán

El trabajo en red a partir de intereses y objetivos comunes organizado, por ejemplo, en grupos de trabajo nos brinda una magnífica oportunidad para mejorar el desarrollo profesional y para incidir en la mejora de la calidad educativa a través de la formación entre iguales.

Divulgación matemática

Divulgar las matemáticas: un objetivo, una necesidad
Encarnación Reyes Iglesias

Dar a conocer las grandes ideas impulsoras del desarrollo de la matemática y sus aplicaciones en los distintos campos científicos y disciplinas del saber, contribuye a apreciar la utilidad y la belleza de esta ciencia, a la vez que pone de manifiesto su papel fundamental en la construcción y el progreso de la humanidad.

Matemáticas en la calle: Una actividad para enseñar divulgando
Purificación Montesinos Comino

¿La labor de un profesor de matemáticas se limita al aula?, ¿podemos acercarlas a todo el mundo divulgando? Haremos una reflexión sobre este tema partiendo del evento *Matemáticas en la calle*.

Materiales y recursos didácticos

MIC (Matemáticas de la Información y la Comunicación). Otra forma de cambiar
Sergio Darias Beautell

MIC (Matemáticas de la Información y la Comunicación) es una propuesta de trabajo en la que se hace énfasis en la información matemática y su comunicación por parte del alumnado y el profesorado. Es una propuesta de cambio en 3 aspectos concretos y que parte de la experiencia de 22 años en el aula. Las herramientas tecnológicas nos facilitarán esta transformación y su posterior comunicación. Además, nos permiten llevar al alumnado a nuevos escenarios creativos que nos obligan a redefinir y repensar lo que estamos haciendo en el aula. ¿Tendremos que abordar los problemas propios de la materia de forma

diferente? ¿Encaja todo esto en el currículo? ¿Se puede hacer en grupo? ¿Quién CREA, ellos o nosotros? ¿Debemos hacer algunos cambios en nuestra práctica? En esta ponencia veremos ejemplos de aula que nos obligan a reflexionar sobre estas cuestiones.

Bloque I: un bloque de encuentros
Ricardo Alonso Liarte

Reflexiones y propuestas para desarrollar el bloque I del currículo, «Procesos, métodos y actitudes en matemáticas».

Metodología y evaluación

Cómo elaborar pruebas de evaluación adecuadas
Claudia Lázaro del Pozo

La finalidad de una prueba depende de los objetivos a conseguir y, en función de estos, se diseñan los instrumentos que permiten medir, con la mayor precisión posible, aquello que queremos analizar. La matriz de especificaciones es una herramienta base y una guía para la construcción y la interpretación de pruebas de evaluación.



Figura 7. Ascensor do Monte San Pedro, donde está ubicado el restaurante de la cena del congreso



Figura 8. Estatua de María Pita en la plaza del Ayuntamiento

¿Y si evaluamos cómo evaluamos?
Francisco España Pérez

La evaluación debería ser el núcleo central de los procesos educativos, la que determine qué, cómo, cuándo y para qué se enseña. Sin embargo, en la mayoría de los centros continúa siendo un proceso marginal, que suele aparecer en las últimas páginas de las programaciones dídácticas o de aula y generalmente aparece deformada e irreconocible transformada en calificación. Los objetivos de esta charla son los de provocar en el docente una reflexión sobre cómo evalúa, analizar cómo debería hacerse según la normativa y ofrecer alternativas para hacerlo.

STEAM. Conexiones y contextos

¡Profe no me sigas en Instagram!
Juan Martínez-Tébar Giménez

El tema principal de esta ponencia es cómo sacar provecho del empleo de las redes sociales en el



Figura 9. El cartel de las 19 JAEM
(autora: Nuria Sambade Nieto)

aula de matemáticas, así como en cualquier otro contexto educativo.

Matemáticas en el arte: un recurso más allá de la anécdota

Pilar García Agra y Julio Rodríguez Taboada

La relación de las matemáticas y el arte en sus diferentes manifestaciones es muy conocida. A pesar de ello, el empleo de esta relación en el aula se limita habitualmente a curiosidades, anécdotas, referencias puntuales. En esta ponencia nos preguntamos: ¿es posible ir más allá? (la respuesta, por supuesto, es afirmativa).

Además de estas participaciones, es posible presentar diferentes aportaciones a las 19 JAEM, en forma de comunicaciones, pósteres, talleres, exposiciones o PechaKucha 19×19. El plazo para el envío de cualquiera de estas modalidades termina el 31 de marzo de 2019. En la web de las 19 JAEM se pueden consultar los detalles sobre cada modalidad y el procedimiento de envío de trabajos.

Comunicaciones

Se trata de intervenciones breves, de unos 20 minutos de duración, que deben enmarcarse en uno de los siete núcleos temáticos seleccionados por el comité científico.

Talleres

Dentro del programa científico están programados talleres impartidos por algunas de las personas invitadas como ponentes, así como otros que serán impartidos por cualquier docente o grupo que presente una propuesta y sea aceptada por el comité científico. Los talleres tendrán una duración prevista de 90 minutos, deberán ser eminentemente prácticos y enmarcarse dentro de uno de los 7 núcleos temáticos de las jornadas.

PechaKucha 19x19

La PechaKucha es un formato informal de presentación mediante 19 diapositivas que son mostradas durante 19 segundos cada una (el formato original es de 20×20, pero lo hemos adaptado para esta ocasión). Cualquier participante podrá presentar una o más PechaKucha sobre temas relacionados con los contenidos del congreso. Está previsto un pequeño concurso entre los trabajos recibidos. En la web de las 19 JAEM es posible consultar un sencillo ejemplo de este formato de colaboración.

Además de todas estas actividades, el comité organizador tiene preparadas algunas sorpresas: paseos matemáticos, actividades grupales, juegos...

Programa cultural

Como complemento del programa científico, están programadas una serie de actividades culturales y lúdicas con las que se intentará que las 19 JAEM sean una experiencia global, facilitando a todo el profesorado asistente la posibilidad de

interactuar mientras disfruta de la visita a los lugares más bonitos de la provincia de La Coruña. La mayor parte de estas actividades tendrán lugar en la tarde del viernes día 5 y se requiere inscripción previa en la web de las jornadas, dado que el aforo es limitado.

También habrá una programación específica para las personas acompañantes, para lo cual contamos con la colaboración de los Museos Científicos Coruñeses y del Consorcio de Turismo de A Coruña.

El viernes día 5 está programada la cena del congreso, en el restaurante «Árbore da Veira», establecimiento galardonado en 2018 con una estrella Michelin.

XI Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez»

Uno de los actos más emotivos de las últimas ediciones de las JAEM es la entrega del Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez», con el que la FESPM quiere reconocer la labor docente y los valores humanos. En La Coruña se entregará la XI edición de este premio, siendo galardonados con ella los profesores Claudi Alsina Catalá y Carme Burgués Flamarich, «una referencia para la mejora de la enseñanza de las matemáticas para maestros y profesores de toda España y América latina.»

Información e inscripciones

Todo el proceso de presentación de trabajos e inscripción en las JAEM o en cualquiera de las actividades culturales programadas se realiza a través de la web <https://www.19jaem.org/>.

En esta misma web se podrá encontrar información actualizada sobre las novedades de las 19 JAEM, así como en los perfiles de Twitter (usuario @19jaem19) y Facebook.

En la tabla 1 se recogen las tarifas y plazos para la inscripción en estas jornadas.

El día 20 de junio se cerrarán oficialmente las inscripciones. A partir de entonces será necesario contactar con el comité organizador para que valore la posibilidad de aceptar inscripciones fuera de plazo.

Las personas que presenten propuestas en alguna modalidad de participación podrán esperar a realizar la inscripción hasta el momento de la confirmación de aceptación del trabajo.

Cuotas de las 19 JAEM - La Coruña	Hasta el 31 de mayo	Hasta el 20 de junio
Miembros de sociedades federadas o que han firmado convenio con la FESPM	120,00 €	150,00 €
General	180,00 €	220,00 €

Tabla 1. 19 JAEM. Tarifas

Comité Organizador Local

Ángel Ramírez. Un humanista de frontera

Carlos Usón Villalba

El anhelo

El ser humano es el único ordenador que guarda la información en formato biológico, de tal manera que desaparece con él en el instante mismo de la desconexión y parece que esa sea la señal que utilizamos los supervivientes para emprender una recopilación que siempre hubiera sido mucho más fácil hacerla en vida.

Es verdad que los profesores tenemos la suerte de poder transferir esa información en red. Y no me refiero a los conocimientos, que andan escritos por todas partes, me refiero a la reflexión, al pensamiento, a la creatividad, a las emociones, a la forma en que nos enfrentamos al espejo de la vida, a la pasión, a los sueños… que es lo verdaderamente importante.

Sin embargo, no sé bien por qué, suele ser la muerte la que marca los tiempos de la historia. Suele ser ella quien da sentido a cada frase, selecciona los hechos y decide sobre su valor de verdad y su trascendencia. Y es entonces, cuando no ahoga la ausencia, cuando buscamos formatos menos frágiles y más inequívocos. Esa es, seguramente, la razón que llevó a la FESPM a impulsar la edición de este libro. Esa, y el peso específico que la figura de Ángel tuvo en nuestro quehacer diario y en nuestro horizonte de referencias.

Me resulta curioso protagonizar la reseña de un libro en el que participo como autor, siento además, obviamente, que no hablo en nombre propio, sino en representación del resto de sus autoras y autores, abrigando, además, el deseo de que mis palabras sepan traducir también la intensidad con la que han vivido su preparación, aquellas que lo han impulsado apasionadamente desde un segundo plano. Es por eso por lo que más que ser crítico con su contenido subrayaré las intenciones que alberga.

He parafraseado algunas de las cosas que escribimos en esta misma revista cuando nos sorprendió el deceso de Mariano Hormigón, como allí, hoy, con el nacimiento de este libro, los au-



tores y autoras hemos querido simbolizar el comienzo de algo nuevo.

En estos dos años transcurridos desde que el azar nos robase su presencia, hemos dado tiempo y concedido espacios al sufrimiento, a la angustia, a la rabia, al desconcierto, a la desazón, al dolor, al pesar..., hemos pasado un largo duelo, cada uno como hemos podido. Este libro nació y es el fruto de la rebeldía contra la sinrazón que el destino nos ha impuesto.

Su presentación, aspira a ser un renacer, que sabemos imposible en lo material, pero que deseamos, velas al viento, que sea inapelable. Por eso, desde sus páginas hemos querido negar la sumisión y pretendido ser resistencia activa contra el sometimiento dócil ante los hechos consumados. Así pues, Ángel Ramírez. Un humanista de frontera, pretende ser un revulsivo permanente de la memoria de alguien que nos fue, tan necesario en vida como va a seguir siéndolo en ausencia. A través de sus páginas codiciamos sentir su estela en el atardecer profesional de muchos de nosotros, proyectada en su inmensidad por la luz de la anochecida.

Nos gustaría que el lector (o lectora, según se tercie) sienta en su nuca el impulso de su aliento. Un hálito de vida que deseamos que sea céfiro en los momentos de canícula y horizonte en el amanecer de las profesores y profesores que abren cada día las puertas de un aula respirando compromiso y libertad.

Quien se acerque a las páginas de este libro esperando una glosa de Ángel que sea magnitud de su valía, no lo va a encontrar sino en parte, la que destila su palabra, de esa que nos hacemos eco en la segunda parte. Por eso recomendamos ir a él con la guardia baja, dispuesto a dejarse seducir, a abandonarse a la caricia, pero preparado también a aceptar el reto de permitir que te arañe la conciencia.

La descripción

Abre el libro un poema de Emilio Pedro Gómez que es la única concesión al panegírico que pretendíamos permitirnos. Sin embargo, hemos querido que cada uno de sus versos proyectase luz sobre los diferentes aspectos que desgranamos de su vida.





Como comentamos en el prólogo, el primer capítulo teje una glosa de la figura de Ángel desde diferentes perspectivas. En él somos nosotros los que, al abrigo de su sombra, deconstruimos su figura en un collage tan poliédrico como apasionadamente abstracto, mientras recorremos el devenir de algunos aspectos de la historia de este país de los que fue protagonista. En la segunda parte hemos pretendido que fueran las propias aportaciones de Ángel las que tomasen la palabra. Allí vais a encontrar pinceladas de su quehacer poético, didáctico, investigador, sindical, …

Cierra las disertaciones un breve capítulo de su hija Ana, con un texto profundo y sincero, alejado de la complacencia, que trasmite una necesidad compartida por todos, aunque, evidentemente ella la sintiera de una forma especial: la de tenerlo más tiempo cerca.

La contraportada del libro contiene, pegado en su interior, un regalo de Juan Emilio García Jiménez, quien ha intentado recopilar las aportaciones que Ángel dejó escritas a lo largo de su vida. La tarea, además de ímproba, tenía la incompletitud garantizada de partida. Pese a ello, el fruto que atesora ese Cd es una parte inmensa de lo que las páginas del libro han dejado fuera.



La despedida

La brevedad se impone y me gustaría acabar con dos citas que acompañaban siempre a Ángel en uno de los bolsillos de su cartera, con similar propósito al de aquel texto que cosiera Pascal al forro de su abrigo. Dos citas que creo que reflejan perfectamente lo que ha sido la redacción de este libro y lo que quiso ser el acto de su presentación en Huesca.

En relación al libro, y parafrasenado a Francisco de Asís hay que decir que

> Comenzamos haciendo lo que era necesario, después hicimos lo que nos fue posible y, todo ello, porque aspiramos a que, mañana, de repente, estemos haciendo lo imposible.

Al acto de presentación de Huesca, al que acudieron unas 150 personas desbordando todas nuestras previsiones y la capacidad del salón de actos de IEAA (Intituto de Estudios Altoaragoneses), bien merece dedicarle aquella sentencia de Bhagavad Gita que, como digo, atesoraba Ángel como referencia.

> El mundo está aprisionado en su propia actividad, salvo cuando los actos se cumplen como culto a dios. Debes pues realizar sacramentalmente cada uno de tus actos y quedar libre de todo apego a los resultados.

Una excelente metáfora de ese pretendido nuevo impulso en lo personal que pretendemos que sea el libro y eco profundo de esa espiritualidad laica, que tan bien ha sabido plasmar Miguel Mainar en la portada del libro, y que tantas veces reivindicara Ángel como propia.

Carlos Usón Villalba
y 17 autores/as más

Comisión Ejecutiva de la FESPM
Renovación de cargos

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), en la reunión celebrada en Madrid el día 1 de diciembre de 2018, acordó convocar la renovación de los siguientes cargos:

Secretaría general.
Secretaría de administración y tesorería.
Secretaría general adjunta.
Dirección de *Suma*.

De acuerdo con lo establecido en el artículo 8 del Reglamento de régimen interno de la FESPM:

Podrá ser candidato a las secretarías, cualquier socio de una sociedad federada, con un año de antigüedad al menos. La solicitud, dirigida al presidente de la FESPM, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

1. Certificado en el que conste que es socio activo de una sociedad federada, y su antigüedad.
2. Un proyecto en el que se exponga su línea de trabajo (máximo tres folios). El proyecto de la Dirección de *Suma* deberá tener como objetivo la edición de la revista en papel.

Las candidaturas se podrán presentar hasta el 31 de mayo de 2019, por correo electrónico remitido a:

admin@fespm.es

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá las personas que se harán cargo de las secretarías entre las candidaturas presentadas, en su reunión que tendrá lugar durante la celebración de las XIX JAEM (La Coruña, julio de 2019).

Diciembre, 2018
Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Secretario general FESPM

Seminario federal: Paseos matemáticos

Juana M.ª Navas Pleguezuelos

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas consideró oportuna la organización de un seminario sobre *Paseos matemáticos* que se celebró en Madrid y Córdoba, durante los días 18 y 19 de febrero, y 11, 12 y 13 de noviembre de 2017, respectivamente.

El trabajo de este seminario se organizó en dos fases: un encuentro en Madrid donde se establecieron las pautas para el trabajo a realizar a través de la plataforma Moodle de la FESPM y posteriormente, se celebraron unas jornadas presenciales para exponer los materiales elaborados, debatir las propuestas realizadas en la fase previa y elaborar las conclusiones del trabajo.

Además de analizar el carácter fundamental de la educación matemática como objetivo docente, los participantes en el seminario analizaron recorridos matemáticos por las ciudades, profundizando en el uso didáctico en el aula de los *paseos matemáticos* y reflexionaron sobre el papel de divulgación matemática que tienen los mismos. Otro objetivo de este seminario fue diseñar recursos didácticos basados en los *paseos matemáticos*.

En este documento, además de la visión que tienen los profesionales de la matemática y de la educación matemática, miembros de la FESPM, sobre los distintos aspectos abordados en el seminario sobre *Paseos matemáticos*, se pretende transmitir el análisis realizado y las conclusiones a las que se han llegado, intentando dar orientaciones para la realización de paseos al profesorado interesado.

En este seminario se contó con tres conferencias, a cargo de M.ª Jesús Luelmo, titulado *Cómo preparar un paseo matemático*, de Julio Rodríguez, con su *Paseo matemático por Santiago de Compostela* y Álvaro Martínez que nos presentó el libro *Paseos Matemáticos por Granada,* también Carmen Monzó presentó una recopilación de *Paseos Matemáticos,* y, por último, se realizó la exposición, por parte de los participantes, de los paseos elaborados.

Como no podía ser de otra manera, se realizaron dos paseos matemáticos por las ciudades donde se celebró el seminario, a cargo de José Luis Muñoz (figura 1) en Madrid y Álvaro Martínez en Córdoba (figura 2).

¿Qué es un paseo matemático?

Se podría definir como una actividad con la que mostrar/descubrir elementos y propiedades ma-

temáticas en lugares donde quizás no se esperarían, con el objetivo de ayudar a comprender la belleza que se puede generar con un adecuado uso de formas y propiedades geométricas, y de entrenar nuestra mirada para captar las relaciones matemáticas que, a veces, se esconden en los objetos más inesperados.



Figura 1. José Luis Muñoz Casado en Madrid

Los paseos matemáticos son, por tanto, un gran recurso para la divulgación y visualización de las matemáticas ya que nos permiten verlas en contextos diversos, con aplicaciones a los distintos ámbitos de la actividad humana y reflexionar sobre su importancia en el desarrollo de las sociedades humanas a lo largo de la historia.

También son útiles para hacer matemáticas. Son una oportunidad para trabajar los contenidos del curriculum en un contexto real, mostrando así su utilidad, enriqueciendo de este modo nuestras clases de matemáticas. Además, los paseos matemáticos permiten establecer relaciones entre los distintos contenidos del currículum, no solo de matemáticas, sino también de otras materias. Favorecen las relaciones interdisciplinares en el centro, así como el trabajo en grupo y el aprendizaje entre iguales. Por último, la experiencia ha demostrado que son muy motivadoras para el alumnado. De ahí la importancia de llevarlos a las aulas, de integrarlos como algo habitual y no como algo anecdótico y aislado. Con el ánimo de orientar a los docentes que quieran elaborar rutas matemáticas por sus ciudades, se han analizado los distintos paseos ya existentes en diversas ciudades y pueblos de España e identificado los siguientes elementos que podrían caracterizar un buen paseo matemático, así como una colección de actividades que pueden realizarse en un paseo matemático por cualquier pueblo o ciudad.

Tipos o modalidades de paseos

Dependiendo del tipo de pruebas, de cómo se llevan a cabo, del público al que van dirigidos y del entorno en el que se realizan, se pueden clasificar los paseos en las siguientes categorías, no necesariamente disjuntas:

1. Los paseos de carácter divulgativo.
2. Los paseos de carácter escolar.
3. Las yincanas o concursos.
4. Paseos en entornos urbanos.
5. Paseos en entornos naturales.
6. Paseos diseñados por docentes.
7. Paseos diseñados por alumnos.

Se entiende por paseos de carácter divulgativo aquellos que van dirigidos al público en general. Sus actividades están más enfocadas a mostrar y descubrir. En este tipo de paseos debe tenerse en cuenta que la formación matemática de los participantes es muy heterogénea y son muy adecuados para integrarlos dentro de las rutas turísticas de las ciudades donde se realizan.

Los paseos de carácter escolar van dirigidos a grupos de alumnos y alumnas de un nivel concreto. En este caso se cuenta con una formación matemática de los participantes más homogénea y deberían primar las actividades en las que el alumnado ponga en práctica los contenidos que se trabajan en las aulas.

Las yincanas son paseos escolares en las que el alumnado, agrupado en equipos, va pasando por las distintas estaciones del recorrido resolviendo por sí mismos los problemas planteados y sin ayuda del profesorado, cuyo cometido en este caso es el de resolver las dudas que puedan surgir y controlar que la prueba se desarrolla adecuadamente.

En el estudio de los paseos existentes, se ha encontrado que la inmensa mayoría se desarrollan en entornos urbanos, tanto grandes ciudades como pequeños pueblos. Sin embargo, la naturaleza ofrece infinidad de oportunidades para practicar matemáticas fuera del aula. Los jardines botánicos, las rutas de senderismo y los grandes parques de las ciudades son estupendos lugares en los que desarrollar un paseo.

En cuanto a quién diseña los paseos, además del profesorado, podemos proponer que sean los propios alumnos y alumnas quienes diseñen las actividades, y también que sean los responsables de llevarlo a cabo. Por ejemplo, alumnado de un curso superior que hacen el paseo a sus compañeros de un curso inferior. El grado de implicación del profesorado en el desarrollo de este tipo de rutas es variable pero, como mínimo, su labor será la de tutelar que todo se lleve a cabo adecuadamente.



Figura 2. El grupo en la Alhambra

Aspectos a tener en cuenta en cualquier tipo de paseo matemático

La duración del paseo

Se recomiendan paseos de una duración de alrededor de 2 horas, compuestos de 4 o 5 paradas o puntos de interés. En cada parada se pueden plantear 2 actividades de contenido matemático. Estas actividades deberían combinar las de explicación o presentación con las más prácticas de resolución. El porcentaje de actividades de cada tipo dependerá de la modalidad de paseo que se quiera hacer. A la hora de estimar el tiempo que llevará cada paseo habrá que tener en cuenta el tiempo que se estará en cada parada y el tiempo que llevarán los desplazarnos de una parada a otra. Es recomendable incluir en el diseño de la ruta una estimación del tiempo que se va a dedicar a cada actividad.

Desarrollo del paseo

En los paseos de carácter escolar es muy recomendable dedicar alguna sesión previa a la salida para preparar en el aula lo que se va a hacer posteriormente en la calle:

1. Qué se va a ver y con qué objetivos.
2. Repasar/trabajar contenidos necesarios.
3. Familiarizarse con la guía de observación.
4. Definir el producto final que pretendemos obtener.
5. Cómo se va a evaluar.
6. Organización de grupos (si los hubiera) y normas que van a regir durante el paseo
7. Materiales necesarios. Debe prepararse una maleta con los materiales e instrumentos necesarios para realizar las actividades.

Durante el paseo, en cada parada, el trabajo se puede dividir en tres pasos:

1. Introducir el punto de interés.
2. Comentar/preguntar/motivar la actividad.
3. Realizar la actividad.



Figura 3. Medidas en la calle

También es recomendable dedicar alguna sesión posterior a la salida al análisis de los resultados obtenidos y/o a que el alumnado elabore un informe final de lo hecho. Por tanto, son adecuadas las actividades que permitan continuar el trabajo en clase. Durante el paseo se tomarían las medidas y datos necesarios y se harían algunos cálculos. Posteriormente en el aula se completa, amplía y/o analiza la solución obtenida. GeoGebra es una buena herramienta para estos casos. No todas las actividades planteadas tienen por qué ser de este tipo.

Otros aspectos

a) Es aconsejable, en la medida de lo posible y especialmente en los paseos de carácter divulgativo, integrar el paseo dentro de lo que sería una visita típicamente turística de la ciudad.
b) Debe elaborarse una guía para el profesorado con las instrucciones, los enunciados y las soluciones de las actividades. También un documento para los participantes con instrucciones y enunciados. A partir de una única guía para el profesorado, que podría contener muchas actividades, se pueden elaborar varios documentos para los participantes. Cada uno contendría solo algunas de las actividades, adaptadas al nivel de los que hacen el paseo y teniendo en cuenta las limitaciones de tiempo.
c) La historia y los personajes destacados de la ciudad o pueblo en el que se hace la ruta son excelentes puntos de partida para muchas actividades. También, dentro de nuestros propios centros educativos podemos encontrar elementos que pueden ser usados en un paseo matemático.
d) Google Maps, Google Earth, Eduloc, programas de edición de vídeo y sonido, apps de teodolitos y niveles, códigos QR, Math City Map.
e) Es aconsejable tratar de conseguir el apoyo de instituciones y empresas, como puede ser el ayuntamiento o comercios de la ciudad.
f) Es importante la difusión del trabajo realizado. En este sentido, hacer la ruta con otros profesores y profesoras como participantes, es una buena medida. También grabar un video del paseo o hacer fotografías o trípticos que puedan ser expuestos en el centro y en su página web, en las de las sociedades y en la propia de la FESPM. La aplicación Math City Map permite compartir el paseo diseñado de una forma fácil.

Evaluación

Este tipo de actividades deben estar integradas dentro de la evaluación del alumnado y ellos deben conocer cómo la realización del paseo y su aprovechamiento va a afectar a su evaluación.

También se debe evaluar el propio paseo: el interés suscitado en el alumnado, la adecuación de los materiales, la duración total y el tiempo dedicado a cada actividad, la adecuación del nivel de las actividades con el público al que van dirigidas y la consecución de los objetivos que se pretendían lograr con el paseo.

Ejemplos de actividades

Las actividades relacionadas con la geometría son las que primero vienen a la cabeza en el momento de diseñar un paseo matemático, y son las que tienen más presencia en todas las rutas analizadas. Por tanto, se debe hacer un esfuerzo adicional para tratar de incluir el resto de bloques de contenido en nuestros paseos. A continuación se describen una serie de elementos que se pueden encontrar casi en cualquier lugar y que se pueden usar en el diseño de actividades.

Elementos utilizados

Mobiliario urbano: bancos, maceteros, farolas, fuentes, papeleras, contenedores, kioskos de música, parques infantiles, plazas, estatuas y esculturas,

pavimento, relojes (analógicos y de sol), rosas de los vientos, escudos y banderas, verjas, tapas de alcantarillado y de conducciones de energía y telecomunicaciones, vallas, rejas, señales, anuncios.

Edificios y construcciones: puertas, ventanas, columnas, vidrieras, habitaciones y estancias, escaleras, chimeneas, tejados, faros, puentes, arcos, galerías, forjados.

Historia de la ciudad: años, fechas, datos demográficos y socioeconómicos, personajes célebres (especialmente de las matemáticas y otras ciencias).

Otros: jardines, plantas, árboles, flores, planos y mapas, brújulas, materiales manipulativos.

Acciones a realizar en las actividades

a) Medir y estimar alturas, superficies, volúmenes, tiempos, número de personas, animales, árboles o coches.
b) Localizar e identificar polígonos, poliedros, curvas, superficies, simetrías.
c) Analizar propiedades geométricas y numéricas, patrones y regularidades.
d) Construir y dibujar formas geométricas, mosaicos y frisos.
e) Utilizar el lenguaje algebraico para codificar y transmitir información de carácter numérico.
f) Utilizar fechas para trabajar relaciones y propiedades de los números.

En un parque infantil se pueden hacer gran cantidad de actividades de medida y estimación. Las fuentes y estanques son adecuadas para el cálculo de volúmenes, las plazas para estimar el número de personas que caben dentro, las aceras para el estudio de mosaicos, las verjas y los forjados para el estudio de curvas, simetrías y movimientos.

Dictar y dibujar la fachada de un edificio (una persona, mirando al edificio intenta dirigir, dando instrucciones para que el dibujante pueda plasmar en el papel la fachada, teniendo en cuenta que este último no puede mirar).

Localizar mediante coordenadas puntos en el plano o identificar qué hay en unas ciertas coordenadas. Fotografiar curvas para su posterior análisis con GeoGebra.

Usar unidades de medida tradicionales o alternativas para hacer mediciones. Por ejemplo, medir la superficie de un parque infantil a partir del número de losetas que cubren su suelo.

Buscar los elementos mínimos que generan mosaicos y frisos y los movimientos que permiten generarlos.

Para finalizar, se exponen unos ejemplos concretos de actividades donde se tratan contenidos que pueden resultar más complicados de incluir dentro de una paseo.

Caesaraugusta o Caesar Augusta

Fue el nombre de la ciudad romana de Zaragoza fundada como colonia de Roma sobre la ciudad ibérica de Salduie en la época del Emperador César Augusto del que ostenta su nombre. Averigua el año probable de la fundación de la ciudad sabiendo que:

a) Todas las cifras del año son diferentes
b) El año tiene una cifra en común con 8745, pero no ocupa el mismo lugar.
c) La primera cifra del año es un número que no es primo y tampoco compuesto.
d) Dicho año tiene X cifras, siendo

$$X = \frac{100a^3 - b^3}{c^3 - b^2 + a}$$

donde:
a= Número de torreones de la muralla romana que quedan en pie (figura 4).
b= Número de caras laterales del pedestal de la estatua de Caesar Augusto (figura 5).
c= Número de arcos de ladrillo de la fachada principal del Mercado Central de Zaragoza (figura 6).
e) El año es divisible por 7.
f) Es un número entero no natural.

¡Curiosa la tipografía utilizada en este rótulo!

Vamos a jugar un poco con las letras que aparecen (figura 7). Observad que algunas de estas letras tienen uno o más ejes de simetría. Fijaos también que algunas de estas letras se utilizan en

el sistema de numeración romano. Las preguntas que os planteamos en esta prueba tienen que ver, precisamente, con simetrías y romanos.

a) Señalad las letras que tienen algún eje de simetría y trazad sobre las mismas dichos ejes.
b) ¿Cuáles de las letras del rótulo pertenecen al sistema de numeración romano?
c) Suponed que podemos liberar las letras del rótulo y hacer con ellas otras composiciones, ¿cuántos números romanos distintos se podrían escribir utilizando alguna de estas letras?



Figura 4. La muralla de Zaragoza



Figura 5. La estatua de Caesar Augusto



Figura 6. Mercado Central de Zaragoza



Figura 7. El rótulo

En cualquier mercado

Andrés es uno de los fruteros que vende en el mercado. El pasado domingo vendió la mitad de los melones que llevaba más medio melón. Después compartió con unos amigos el melón que le quedaba sin vender.
¿Cuántos melones llevó al mercado?

Un conjunto escultórico

En este conjunto escultórico (figura 8) podéis observar varios aros formando una espiral, en la que, además, los diámetros de los aros se van haciendo cada vez mayores.

a) Tomad las medidas oportunas para comprobar si los diámetros de los aros van siguiendo alguna secuencia lógica.
b) En caso de que hayáis descubierto esa secuencia, ¿qué diámetro tendría el siguiente aro, siguiendo el orden creciente?



Figura 8. Un conjunto escultórico

c) Si ahora siguiéramos la secuencia en sentido contrario, ¿cuál sería el diámetro del aro que iría antes del primero de los construidos?

En el parque

En un banco del parque pueden sentarse 4 personas. Si os sentáis en él los cuatro componentes del equipo,

a) ¿De cuántas formas distintas podéis sentaros? ¿Y si fuerais 5?

En una de las terrazas próximas al parque tienen mesas redondas alrededor de las cuales sitúan 4 sillas.

b) ¿De cuántas formas distintas podríais sentaros los 4 miembros del equipo alrededor de una de esas mesas?

En la página web de la Federación Española, de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) se puede encontrar más información sobre *Paseos Matemáticos*, así como más ejemplos <http://www.fespm.es/>.

Juana M.ª Navas Pleguezuelos
Inspección de la Delegación de Educación en Jaén
<juaninavas@gmail.com>

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Secretario General: Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Vicepresidente: Juan A. Martínez Calvete
Tesorera: Encarnación Amaro Parrado

Secretarías

Técnica adjunta: Bienvenido Espinar Cepas
Revista *Suma*: Iolanda Guevara Casanova y Daniel Sierra Ruiz
Relaciones internacionales: M.ª Claudia Lázaro del Pozo
Servicio de publicaciones: Juan Martínez-Tébar Giménez
Actividades y formación del profesorado: Juana M.ª Navas Pleguezuelos
Actividades con alumnos: Luisa Almazán Álvarez

Sociedades Federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)
Presidente: Manuel Sol Puig
C/St Ramon 29. 08340 Vilassar de Mar

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas
Presidente: Daniel Sierra Ruiz
Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones
Edificio de Matemáticas, 1.ª planta. Universidad de Zaragoza
C/Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas
Presidente: Juan Agustín Noda Gómez
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa, 38205, La Laguna, S/C de Tenerife

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
IES Universidad Laboral, Avda de la Mancha sn, 02006 Albacete

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»-Matematika Irakasleen Nafar Elkartea
Presidente: J. Javier Jiménez Ibáñez
IES *Alhama,* Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedade de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA)
Presidente: María Inés García Seijo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
IES Villablanca. C/ Villablanca, 79. 28032 Madrid

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Jesús Diego Rodríguez García
IES Enrique Nieto. Departamento de Matemáticas
C/ Avenida de la Juventud, 4. 52005 Melilla

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima»
Presidenta: Elena Ramírez Ezquerro
Facultad de Ciencia y Tecnología Edificio Científico Tecnológico, CCT; C/ Madre de Dios, 53. 26006 Logroño

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX
Presidente: Daniel Ruiz Aguilera
C/ Miquel Capllonch, 30, 3A. 07010 Palma. Illes Balears

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: Rubén Pérez Zamanillo
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán»
Presidentea: M.ª Encarnación Reyes Iglesias
IES Comuneros de Castilla. C/Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia.
Campus de Espinardo. 30100 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Antonio Molano Romero
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Carmen Espeso Ortiz
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. Despacho 3215
C/ Rector Royo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Julio Rodríguez Taboada
CPI Dos Dices
C/ Dos Dices, s/n. 15911 Rois (A Coruña)

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática.
Apdo. 22045. 46071 València

Euskadiko Matematika Irakasleen Elkartea «EMIE 20+11»
Presidenta: Ana Fernández de Betoño Sáenz de Olamendi
Berritzegune de Vitoria-Gasteiz
Avda. Gasteiz, 93. 01009 Vitoria-Gasteiz (Araba)

Seminario federal sobre usos de las redes sociales en el aula de matemáticas

Juan Martínez-Tébar Giménez

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, con la colaboración del CIEM, consideró oportuna la organización de un Seminario sobre *Usos de las redes sociales en el aula de matemáticas* que se celebró en Castro Urdiales durante los días 19, 20 y 21 de octubre de 2018.

El trabajo de este seminario se organizó en torno a tres ejes principales, cada uno de ellos desarrollado por un grupo de trabajo:

1. Análisis del papel de las RRSS en la sociedad y presencia de las matemáticas en las mismas, con Ana de la Fuente como coordinadora.
2. Redes sociales generales y su utilización como recurso didáctico, cuya coordinadora fue Elena Ramírez.
3. Redes sociales educativas, cómo aplicarlas al aula de matemáticas. Redes sociales específicas para matemáticas, que contó como coordinadora con Carmen Espeso.

Antes del comienzo del seminario se utilizó la plataforma Moodle de la FESPM para la distribución de documentos y para el contacto previo entre los miembros de cada grupo. La plataforma continuó abierta después del seminario, hasta la terminación del texto definitivo del documento de conclusiones de cada grupo. Además de aportar información fundamental para el análisis y la reflexión sobre el papel de las redes sociales, los participantes en el seminario analizaron el uso de las RRSS en educación en general, centrándose en su uso para la educación matemática, profundizando en el uso de los recursos que nos pueden ofrecer las RRSS para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este documento, además de la visión que tienen los miembros de la FESPM, profesionales de la matemática y de la educación matemática, sobre los distintos aspectos abordados en el seminario, se pretende transmitir el análisis realizado y las conclusiones a las que se han llegado, intentando dar orientaciones para el buen uso y aprovechamiento de las redes sociales. En este seminario se contó con tres conferencias.

Las redes sociales en la formación de maestros y maestras de Educación Primaria

Impartida por Enrique de la Torre y M.ª Cristina Naya de la Universidade da Coruña. En ella se presentó la experiencia de los autores sobre el

uso de redes sociales desde el curso 2009-2010 en las diferentes materias de Educación Matemática de la titulación de Grado en Educación Primaria. La presentación se dividió en dos partes: por un lado, el trabajo realizado a lo largo de varios cursos en las tres materias de Educación Matemática, desde el uso de las primeras plataformas sociales como NING o SocialGo, hasta fomentar la herramienta del foro dentro de la plataforma Moodle. La participación consiste en que los estudiantes creen diferentes líneas de discusión sobre temas generales relacionados con la educación, buscando desarrollar un pensamiento crítico y tratando de relacionar la educación matemática con el establecimiento de una ciudadanía participativa. Se analizan las relaciones creadas entre los estudiantes y los temas abordados, potenciando la conexión entre las matemáticas y la educación, y la sociedad en general. En una segunda parte, se plantearon los retos a los que nos enfrentamos en los entornos de redes sociales y cómo se podrán usar para trabajar contenidos matemáticos, tanto los relacionados directamente con la materia como los relacionados con los contextos afectivos y de ciudadanía en el aula de matemáticas.

Que la Red te acompañe

Impartida por Juan Francisco Hernández Fernández, profesor en el colegio Hispano Inglés de Tenerife.

La conferencia versó sobre la importancia de tener un blog y mimarlo, cómo generar espacios informales de divulgación de la ciencia y de las matemáticas (El efecto *#recreoNaukas*), el uso de las redes sociales para hacer curación de contenido en matemáticas, el uso de las redes sociales para compartir: Twitter, Telegram, Whatsapp… También mostró estrategias de fomento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde YouTube, y diversas plataformas para hacer *feedback* en matemáticas: Edpuzzle, Socrative.

Hizo especial hincapié en objetivos como valorar la importancia y repercusión de las buenas prácticas educativas, apoyadas en herramientas digitales, para el desarrollo de contenidos curriculares y motivación de los alumnos; reconocer el trabajo de los distintos profesionales de la educación a través del desarrollo de buenas prácticas en el aula; servir de escaparate motivador de una corriente educativa en la red, que ayuda a la generalización de metodologías activas y del uso



Figura 1. Enrique de la Torre

de herramientas digitales en el aula; favorecer cauces de opinión y debate sobre la necesidad de avanzar en el uso de todo tipo de metodologías activas en el entorno educativo sustentadas por el uso de herramientas tecnológicas; y ofrecer una selección de buenas prácticas que animen a iniciar o consolidar el uso de metodologías activas y tecnología en entornos educativos, aprendiendo de experiencias de éxito.

ciones, su entorno. Caminar a su lado para resolver dudas, motivar y fomentar la reflexión y la comprensión de los conceptos y las estrategias de resolución.

Se plantea una forma de aprender juntos, donde el alumnado crea sus propios problemas, desde el enunciado hasta la resolución, poniendo en juego y conectando sus conocimientos. En este proceso, resulta tan importante, o más, la



Figura 2. Juan Francisco Hernández Fernández

Una red social para aprender matemáticas haciendo matemática

Impartida por Benet Andújar, director de Edutac. y *coach* educativo.

Su conferencia nos mostró cómo estamos conectados todos a través de las redes y nos mostró el uso y manejo de una red que nació específicamente para el aula de matemáticas: Sagaku, que hoy en día se desarrolla a través del portal <http://www.lerni.academy./>.

Propone que la tarea principal del docente será sugerir ideas que animen a sus alumnos a aplicar las matemáticas en la resolución de problemas relacionados con sus intereses, sus afi-

pregunta que la respuesta que elegimos, así como las herramientas y el camino que elegimos para llegar a la solución. Además, los alumnos contextualizan los problemas en su entorno, sus intereses y sus aficiones.

Tras la fase de invención, los alumnos resolverán los problemas de sus compañeros y se comentarán las resoluciones. Esta fase da pie a la reflexión, el debate y la discusión entre iguales, permitiendo al creador o creadores modificar el problema si lo consideran necesario, para ofrecer la mejor solución. Una solución consensuada entre todos.

Compartir los problemas inventados como fase posterior a la invención es otra calidad que

mejora el aprendizaje de las matemáticas. El aprendizaje dialógico facilita que el alumno tome conciencia de su proceso de aprendizaje de forma autorreflexiva. Todo esto ocurre en un ambiente en el que se va consolidando el pensamiento argumentativo y crítico.

Esta manera de aprender potencia el pensamiento estratégico, la creatividad y el trabajo colaborativo.



Figura 3. Benet Andújar

¿Qué es una red social?

En general una red social es una estructura social formada por personas o entidades conectadas y unidas entre sí por algún tipo de relación o interés común. En este grupo de trabajo nos centraremos en las redes sociales on-line, cuya conexión es a través de internet y su finalidad es servir de herramienta de comunicación entre diversos usuarios que se unen en un mismo espacio virtual para compartir y difundir información en diversos formatos como texto, vídeos, imágenes, música…, entablando diálogos sobre algún interés o tema común.

Las redes sociales han sido materia de estudio en diferentes campos antropológicos: sociológicos, políticos…, desde el análisis de las relaciones de parentesco en grupos pequeños hasta su influencia en la vida política y en las elecciones democráticas de determinados gobiernos. Dentro del campo de las matemáticas y ciencias de la computación, la teoría de grafos representa las redes sociales mediante nodos conectados por aristas, donde los nodos serían los individuos y las aristas las relaciones que les unen. Todo ello conforma un grafo, una estructura de datos que permite describir las propiedades de una red social.

Algunas teorías sobre redes sociales han sido concebidas y analizadas por diferentes disciplinas, como la popular teoría de los *Seis grados de separación*, un hito de las redes sociales en Internet. Se basa en la idea de que el grupo de conocidos crece exponencialmente con los enlaces en cadena, y harían falta, únicamente, cinco de estos enlaces para cubrir la totalidad de la población mundial.

El uso de las redes sociales transforma los estilos de vida, cambia las prácticas y, también, crea nuevo vocabulario, pero todo esto se produce a un ritmo tan acelerado que genera confusión y desconocimiento de la usabilidad y los derechos en torno a su actividad. Muchos de los estudios que se llevan a cabo hoy en día, tratan temas relacionados con la identidad, la privacidad o el uso en adolescentes. Una de las problemáticas que señalan los defensores de un uso responsable de las redes sociales es que, a través de ellas, estamos expuestos. Nuestros datos se comparten y navegan por la red y, al mismo tiempo, información de todo tipo irrumpe en nuestros ordenadores sin que podamos discriminar su contenido. Esto es especialmente preocupante en el caso de los menores de edad, cuya privacidad se ve comprometida a las prácticas en la red. Ejemplo de ello son los nuevos episodios de acoso escolar que ponen en el punto de mira el uso indebido de las redes sociales por parte de los menores y las políticas de privacidad que ofrecen las compañías. Asimismo, las redes sociales

se convierten en parte de su aprendizaje social, que, si bien es beneficioso utilizado convenientemente, en muchos casos crea modelos alejados de la realidad generando comportamientos y actitudes que suscitan problemas de autoestima y estrés, entre ellos están los relacionados con el cuidado de la imagen, los prototipos de éxito o la reputación digital.



Figura 4. Grupo 1, coordinado por Ana de la Fuente

Otro efecto estudiado es el poder de manifestación que poseen, en el más amplio sentido de la palabra. La inmediatez de la comunicación, y transmisión de opiniones las convierte en un potente instrumento social. Los movimientos ciudadanos se organizan a través de las redes sociales originando hechos históricos como «Movimiento 15-M», o el reciente «#MeToo».

Tipos o modalidades de redes sociales

Redes sociales horizontales

No tienen una temática definida, están dirigidas a un público genérico y se centran en los contactos. Su función principal es la de relacionar personas a través de las herramientas que ofrecen, y todas ellas comparten ciertas características como la creación de un perfil, compartir contenidos y generar listas de contactos.

De entre las más utilizadas podemos citar, entre otras, Facebook, Twitter, Instagram… Aunque los usuarios pueden tener intereses muy diversos, permiten utilizar etiquetas y/o *hashtag* que nos permiten agrupar publicaciones y seguir determinados temas.

Redes sociales verticales

Son aquellas cuyo objetivo se concreta en establecer conversaciones en torno a un interés concreto común a todos sus usuarios. Su clasificación puede hacerse por temáticas, por actividad o por los contenidos que se comparten. Algunos ejemplos son Linkedin, YouTube, Flickr, Spotify, foros temáticos, etc.

¿Para qué usamos las redes sociales?

Exponemos una encuesta reciente de enero del 2018, realizada por GlobalWebindex a 77 814 usuarios de internet con edades comprendidas entre los 16 y los 64 años.

1. Para contactar con los amigos (42%).
2. Para mantenerse al día con noticias y eventos actuales (41%).
3. Para rellenar el tiempo libre (39%).
4. Para encontrar contenido divertido o de entretenido (37%).
5. Para hacer *networking* con otras personas (34%).
6. Porque muchos de mis amigos están en ellas (33%).
7. Para compartir fotos o vídeos con otros (32%).
8. Para compartir mi opinión (30%).
9. Para investigar/encontrar productos para comprar (29%).
10. Para conocer gente nueva (27%).

Las redes sociales han revolucionado los medios de comunicación tradicionales.

Todos tienen su presencia en redes sociales y aparecen nuevos medios cuya presencia es exclusiva en estas redes. Políticos, artistas, famosos…, las utilizan y se preocupan de figurar y contratar a profesionales para gestionarlas.

Aparecen nuevos términos como *Social Media Planner*, o el ya conocido *Community Manager*, cuya traducción al castellano sería «Responsable de comunidad»; su misión es dinamizar las comunidades de usuarios generando contenidos atractivos, estableciendo relaciones y diálogos con clientes, mejorando la imagen de una marca o de una organización.



Figura 5

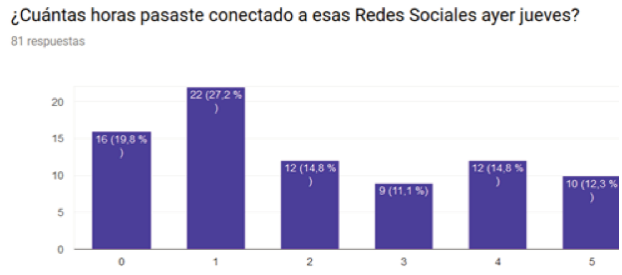


Figura 6

Hoy en día es el medio de comunicación más potente y el más inmediato. En términos profesionales, si no estás en redes sociales no existes. Los profesores y las profesoras de matemáticas no somos ajenos a este fenómeno y poco a poco vamos teniendo una presencia más relevante.

Análisis DAFO del papel de las RRSS en la sociedad

A modo de resumen exponemos en la tabla 1 un análisis DAFO del papel de las redes sociales en la sociedad. En él se identifican, mediante ejemplos, cuatro aspectos o características de las RRSS, las debilidades, las amenazas, las fortalezas y las oportunidades. Una de las oportunidades que nos ofrecen las redes sociales es coincidir con el medio que utilizan los jóvenes para comunicarse. En este sentido, en las figuras 5 y 6 exponemos una encuesta realizada con alumnado de la ESO en mayo del 2018.

Presencia de las matemáticas en redes sociales

Las redes sociales han ayudado, y mucho, en la divulgación de las matemáticas. Los contenidos matemáticos resultan atractivos al público en general y, por ello, muchos medios tradicionales como radio, televisión y prensa añaden apartados relacionados con la ciencia en general y con las matemáticas en particular.

Muchos docentes, cada vez en mayor número, utilizan las redes sociales para compartir recursos con sus alumnos o con otros docentes, a modo de ejemplo exponemos alguno de ellos.

Twitter

Es una red asimétrica en la que podemos decidir qué cuentas nos resultan interesantes seguir y dónde podemos compartir noticias y contenidos interesantes y atrayentes para nuestros seguidores. Permite intercambiar mensajes de manera casi instantánea y la información está abreviada. Es el canal ideal para compartir proyectos y noticias sobre la innovación educativa. Hay que tener en cuenta que la mayoría de los profesores más innovadores poseen cuentas en Twitter y comparten constantemente sus últimas noticias, videos y artículos con sus seguidores. Es una red rápida y dinámica, de gran eficiencia en la que lo importante es el valor de la información más que el valor visual. La red social que más nos gusta, la más abierta y dinámica. Como peligros en esta red anotamos el exhibicionismo, la formación de colmenas que se retroalimenta, o el verter opiniones poco meditadas obviando que son públicas.

Debilidades	Amenazas
Falta de conexión a internet Uso intensivo Exposición incontrolada (Privacidad) Falta/preocupación en el control de publicaciones	*Fake news* (Información no contrastada) Distracción y cambio de focos de atención Falta de seguridad Robo de identidad Tecnoadicciones
Fortalezas	**Oportunidades**
Ubiquidad Fuerte implantación en la sociedad, en especial en los grupos de edades más jóvenes Inmediatez. Comunicación en tiempo real *Feedback* Variedad de RRSS, se puede buscar la que más de adapte a los objetivos que se persigan Difusión Divulgación	Utilización como medio de difusión del conocimiento. Y de búsqueda encadenada Perpetuidad en el tiempo, al menos hasta que la RS se deje de usar o se cierre De llegar a los estudiantes en un medio al que están acostumbrados Escaparate de buenas prácticas Eliminación de barreras espacio-temporales Hacer ameno y accesible el conocimiento/cultura

Tabla 1. Análisis DAFO del papel de las redes sociales en la sociedad

— Usuario que recomendamos: *@juliomulero*. <https://twitter.com/juliomulero>

YouTube

La red social para compartir contenidos en formato vídeo. Es la más extendida y utilizada en el mundo. Facilita el proceso de aprendizaje enriqueciendo los contenidos matemáticos con demostraciones visuales, resolución de problemas o una visión matemática del mundo real que nos rodea. Existen canales específicos de matemáticas y facilidad de buscar contenidos de cualquier contenido/rama de las matemáticas.

— Canal que recomendamos: Derivando. <www.youtube.com/channel/UCHZ8ya93m7_RD02WsCSZYA>

Facebook

Ya forma parte de la cultura social actual y su esencia la conocemos todos, es una red que conecta personas con personas. Por tanto, es una red ideal para contar cosas del centro, dando más importancia al carácter visual (pues las fotos tienen mucho peso en este canal) y acompañándolas de pequeños relatos sobre lo que estamos haciendo. ¿Por qué usarla? Básicamente por ser Facebook la red social más grande del mundo y porque permite estar al tanto de lo que sucede en nuestro centro de una manera muy cómoda.

— Grupo que recomendamos: Matemáticas para la vida cotidiana. <www.facebook.com/groups/1297117050313749>

Instagram

Una de las redes que más ha crecido en los últimos años. Aunque es esencialmente para compartir imágenes, su utilización puede ser muy didáctica. Un buen ejemplo son las fotografías matemáticas de @tocamates

—<www.instagram.com/tocamates/?hl=es>

Google+

La red social de Google no ha tenido el éxito que se esperaba y quizá sea una red que desaparezca en poco tiempo. Aún así, son muchos los usuarios que comparten en grupos específicos sobre matemáticas.

— Un gran ejemplo: Marta Macho. <plus.google.com/u/0/103321482258427184503>

Pinterest

Una red específica para compartir imágenes, que se ha convertido en curación de contenidos y recursos muy utilizada por maestros y profesores.

Su distribución en tableros nos permite compartir y/o buscar todo tipo de recursos sobre un tema específico. Como ejemplo un tablero de nuestro compañero Sergio Darias.

— Proyecto *La Máquina Áreas Raras*. <https://pin.it/lrmgxw5ce5ei6v>

Telegram

Una herramienta de comunicación ideal para teléfonos móviles. Permite crear redes verticales, grupos cerrados en torno a un tema común. Permite el envío de archivos en cualquier formato.

— Educación matemática. <t.co/foE5h4CMd0>



Figura 7

Flickr

Específica para compartir fotografías en gran formato, para profesionales o aficionados a la fotografía.

— Grupo Escher. <www.flickr.com/groups/escher/>

LinkedIn

La red de profesionales más extendida. Permite publicar perfiles profesionales y currículos para la búsqueda activa de empleo. También podemos encontrar grupos, organizaciones, instituciones…

WhatsApp

Tiene el inconveniente que nuestros alumnos conozcan nuestro número de teléfono. Mejor Telegram.

Redes sociales educativas

Debemos distinguir el uso de las redes sociales en los diferentes tramos educativos.

En Educación Primaria, el alumnado no es usuario (ni debe serlo) de las redes sociales habituales, pero como potencial usuario debe aprender su buen uso. Es muy importante implicar a las familias en esta tarea. Existen redes sociales educativas, como Edmodo, que pueden utilizarse como un primer contacto, guiando al alumnado para educar en un buen uso de las redes.

En Educación Secundaria, como docentes, no podemos ni debemos obviar el uso de las redes sociales, ya que constituyen una parte muy importante de la vida de nuestro alumnado, que les afecta de modo directo, tanto a nivel emocional como social y que influye en el proceso de aprendizaje.

Por ello proponemos utilizar las redes sociales más conocidas, de las que nuestro alumnado es usuario; en estas redes, Twitter, Instagram, Facebook nuestro alumnado se siente cómodo, lo que facilita la comunicación, permite continuidad en el uso y no requiere de curva de aprendizaje previa.

Moodle. Edmodo. Classroom

Este tipo de plataformas se usan en los centros para colgar material, compartir vídeos con los alumnos, incluir temas, realizar test y exámenes, así como entregar trabajos. Es un buen inicio a las redes sociales puesto que existen foros.

— Es importante decidir qué red o redes se usarán en el centro para que los alumnos no tengan que usar varias.

— Nos planteamos la posibilidad de que los padres estén dentro de la plataforma pero habría que distinguir entre padres y alumnos. Un padre debería poder ver los contenidos y los mensajes de su hijo pero no los de los demás.
— Classroom tiene la ventaja de poderse usar con el correo corporativo del centro y mediante el código de clase entran al aula correspondiente.

Plataformas educativas de las autonomías o centros privados

Tipo Educa, Racima, Alexia... Classdojo (para infantil y primaria). Tienen el mismo uso que las anteriores, pero incluyen la posibilidad de comunicar las faltas y otras consideraciones entre padres y profesores.

— Fomentar la curiosidad
— Desarrollar las competencias clave
— Servir como oportunidad para educar en un buen uso y poder detectar problemas de convivencia.

Inconvenientes

— Medios físicos insuficientes: mala conectividad a internet en el aula y/o en casa, falta de dispositivos.
— Dificultad del profesorado para controlar el uso correcto.
— Desconocimiento de la normativa legal que rige el uso de datos.
— Vértigo ante los posibles casos de ciberacoso.
— Desconocimiento o rechazo del uso de las redes por parte de muchos docentes.



Figura 8. Grupo 2, coordinado por Elena Ramírez

Ventajas e inconvenientes de las redes sociales educativas

Ventajas

— Permitir la interacción inmediata
— Aumentar la motivación
— Conectar con el mundo exterior
— Compartir experiencias
— No requiere aprendizaje previo
— Fomentar el aprendizaje activo

Propuesta de aplicación en matemáticas

Proponemos la realización de actividades en redes sociales como Twitter, Instagram, Facebook. Consideramos importante insistir al alumnado en unas normas de uso de las redes sociales que se refieren a aspectos como respeto, autoría, comentarios positivos, redacción correcta.

Como ejemplo de actividades proponemos:

— Concurso de fotografía a través de Instagram con una cuenta específica.
— Interacción con un científico y celebración del día de la mujer a través de Twitter con una cuenta específica.
— Concurso de relato corto o haikus en Twitter.
— Vídeos realizados por el alumnado con contenido relacionado con las matemáticas para subir a YouTube.
— Comentar noticias de contenido matemático en páginas web: prensa, museos, portales educativos.
— Denuncia de gazapos matemáticos utilizando redes sociales.
— Publicar en todas las redes sociales del centro lo que ocurre en el instituto.



Figura 9. Grupo 3

De las redes sociales educativas que existen tiene sentido utilizar alguna si hay una metodología concreta a la que se ajusta, como por ejemplo Sangaku, red social de matemáticas que se basa en la cocreación de problemas matemáticos y en su resolución cooperativa.

Recomendaciones

— Implicación de las familias en el uso de dispositivos.
— Utilización de unas normas de uso de las redes sociales que se refieren a aspectos como respeto, autoría, comentarios positivos, redacción correcta. Difundirlas entre el alumnado y familias.
— Compartir medios materiales: compartir dispositivos, realizar actividades en equipo, utilizar recursos externos.
— La implicación de las editoriales para fomentar la interacción.
— Formación del responsable TIC para asesorar en cuestiones tecnológicas y referentes a la normativa.
— Creación de redes sociales institucionales en cada centro educativo.
— Coordinar las actividades que se realicen tanto a nivel de departamento, como interdisciplinarmente.



Figura 10. Los participantes en el seminario

Juan Martínez-Tébar Giménez
IES Alto de los Molinos, Albacete
<juanmtg1@gmail.com>

XIII Jornadas de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana. Innovación y Tecnología en Educación Matemática

Fernando Arenas Planelles
Òscar Forner Gumbau
José Aurelio Pina Romero

Los días 19 y 20 de octubre de 2018 se celebraron las XIII Jornadas de Educación Matemática de la Comunitat Valenciana en la sede de la Universidad de Alicante en Sant Vicent del Raspeig. Fueron organizadas por la asamblea de Alicante de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi» (SEMCV) con la colaboración de las Facultades de Ciencias y de Educación, los departamentos de Matemáticas y Matemática Aplicada, el Instituto de Ciencias de la Educación y la empresa CASIO.

Las jornadas comenzaron el viernes 19 tal como estaba previsto a las 16 horas, a pesar de la adversa situación meteorológica, con la entrega de acreditaciones y los obsequios facilitados por el Ayuntamiento de Sant Vicent del Raspeig y la Diputación de Alicante. Los asistentes se inscribieron en los diferentes talleres y comunicaciones que se ofertaban en paralelo durante la tarde.

La presentación de las Jornadas correspondió por parte de la Universidad de Alicante al director del Secretariado de Recursos Tecnológicos Ferran J. Verdú Monllor y por parte de la SEMCV a su presidente Onofre Monzó del Olmo. Esta presentación y las tres conferencias plenarias fueron retransmitidas en *streaming* y pueden verse en el siguiente enlace: <https://semcv.org/conferencies-13-jornades>.

Sociedades federadas

La conferencia inaugural, de título *El mundo no es perfecto*, corrió a cargo del profesor y divulgador José Santiago García Cremades. En ella hizo un repaso sobre diversas informaciones y opiniones en los medios de comunicación de claro carácter acientífico y mediante su gran sentido del humor analizaba las contradicciones que contenían.

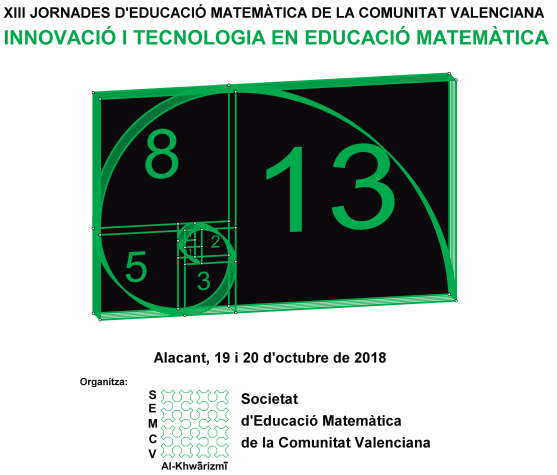


Figura 1. El cartel de las Jornadas

Tras un descanso se desarrollaron un total de 9 talleres con las siguientes temáticas: GeoGebra desde nivel de iniciación, aplicaciones en el aula o de especialización como la Vista CAS; manejo de la calculadora científica ClassWiz de CASIO y presentación de materiales para su uso en el aula; el programa de estadística R y su aplicación para el aprendizaje autónomo; el uso del video como herramienta para el aprendizaje de las matemáticas; uso de nuevas tecnología como la pizarra inteligente y APPs para el móvil; utilización de la aplicación Edpuzzle para realizar la metodología de la clase invertida (Flipped Classroom).

Simultáneamente a los talleres se realizaron 12 comunicaciones relatando diversas experiencias de aula tanto en Educación Primaria, Educación Secundaria y Universidad. Los temas tratados fueron: el análisis de la comprensión de los estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto; el proyecto EMMA sobre el estímulo del talento matemático; aplicaciones de GeoGebra en clase; presentación de la unidad didáctica simetrías del plano para 6.º de primaria en formato *ebook*; experiencias de aprendizaje basado en proyectos en 2.º PMAR;



Figura 2. La presentación de las Jornadas

estudio de estadística unidimensional mediante un *applet* de GeoGebra; uso de *apps* de juegos con el móvil de contenido matemático; presentación de una *scape room*; problemas ricos en secundaria como detector de capacidad matemática alta; análisis de un obstáculo didáctico: concavidad y convexidad de una función en un intervalo; educación financiera en clase de matemáticas de ESO; la videoconferencia entre estudiantes de talento en un taller de matemáticas.

El sábado 20 comenzó con la conferencia del profesor Pedro Antonio Martínez Ortiz titulada *La aventura de innovar en la enseñanza de las matemáticas*. En ella nos habló de su premiado (Fundación Atresmedia a la mejor iniciativa de éxito educativo 2018) proyecto «Emocionar con matemáticas», una aventura sobre innovación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria. Se trata de una propuesta que pretende crear ambientes motivadores para el aprendizaje, entrelazar aspectos cognitivos y emocionales, reducir la ansiedad matemática, promover la interacción y la cooperación en el aula, además de personalizar el aprendizaje y cubrir las necesidades educativas del alumnado mediante el uso de un amplio abanico metodológico. Este proyecto persigue hacer tangibles las matemáticas a cualquiera, independientemente de su contexto pasado, presente y futuro. Persigue reducir el anumerismo y conseguir que nuestra futura sociedad llegue a valorar sin imposiciones una disciplina tan bella y trascendental para nuestra vida como lo son las matemáticas.



Figura 3. Teorema de «doblar y cortar»

Terminada la conferencia pudimos disfrutar en el hall de 8 mesas con materiales manipulativos mientras tomábamos un sencillo tentempié. La mayor parte de ellas estaban relacionadas con los talleres que se desarrollaron por la tarde. Los contenidos de las mesas fueron: geometría con telas; teorema de «doblar y cortar»; superficies seccionadas; la calculadora científica; los calendarios mayas; el calendario matemático 2018-2019; materiales manipulativos del museo MMACA; la fotografía matemática en la SEMCV.



Figura 4. La fotografía matemática en la SEMCV



Figura 5. En las mesas del hall

A continuación se realizó la mesa redonda sobre *Tecnología y didadctica* coordinada por José Aurelio Pina en la que participaron los profesores Lluís Bonet, Agustín Carrillo, Maite Navarro y Ferran Verdú. En ella se abordaron temas como: el uso o no de la calculadora en el aula, en las pruebas de acceso a la universidad y las diferencias por comunidades; su aplicación en otros países y la posibilidad de trabajar en modo examen;

el uso de las TIC en el aula como el programa Geogebra o *apps* como Kahoot entre otras; el uso del vídeo en el aula; la pizarra digital y su implantación en los centros.

Después de la comida se realizaron 8 talleres en 6 de los cuales se desarrollaba la temática de las mesas de la mañana y se añadieron los siguientes temas: creación de videos para la enseñanza de las matemáticas; uso de tabletas en el aula con materiales propios y uso de materiales manipulables para el trabajo con números enteros en primer ciclo de ESO.

La conferencia de clausura fue pronunciada por el profesor Josep Lluís Pol i Llompart de título *Pedres, pals, rodes, tecles i pantalles*. En ella nos habló de que la tecnología condiciona cualquier actividad de las personas y, por tanto, lo hace también con las matemáticas. Eso es así desde la concepción misma de estas, pasando por sus paradigmas de construcción y su evolución hasta los retos actuales. A través de unos ejemplos concretos recorrió el camino desde las piedras hasta las pantallas, y nos hizo reflexionar sobre cómo combinar las llamadas tecnologías «tradicionales» con las digitales.

Para las jornadas se instaló, días antes, la exposición de fotografía matemática de la SEMCV y las fotografías participantes en el XVI concurso de fotografía matemática *Matemática a la vista*, de la cual disfrutaron los asistentes a las jornadas y actuando como jurado del concurso.

Por último Òscar Forner y Fernando Arenas, miembros del comité organizador y científico, despidieron las jornadas agradeciendo a los más de 100 asistentes a las jornadas y los ponentes venidos desde distintas comunidades autónomas su participación en las mismas, así como a los miembros del equipo organizador de la olimpiada matemática en la provincia de Alicante su trabajo para el buen desarrollo de este evento.



Figura 6. La conferencia de clausura

Fernando Arenas Planelles
IES l'Allusser , Mutxamel (Alacant)
<fernando.arenas@iesallusser.es>

Òscar Forner Gumbau
IES Betxi, Betxi (Castelló)
<oscarforner@iesbetxi.es>

José Aurelio Pina Romero
IES Gaia, Sant Vicent del Raspeig (Alacant)
<apina@institutogaia.es>

suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

90
marzo 2018

Consejo de Dirección
<direccion@revistasuma.es>

Iolanda Guevara Casanova
Departament d'Ensenyament
de la Generalitat de Catalunya
Universitat Autònoma de Barcelona

Daniel Sierra Ruiz
IES La Puebla de Alfindén, La Puebla de Alfindén (Zaragoza)

Administración
<administracion@revistasuma.es>

Miguel Latorre García

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Web
<www.revistasuma.es>

Beatriz Rubio Serrano
Universidad de Zaragoza

Jorge Pinilla López
Universidad de Zaragoza

Cubierta
Mercè Cassanyes i Caballeria

Maquetación y corrección

Miquel Albertí Palmer
INS Vallès, Sabadell (Barcelona)
Universitat Autònoma de Barcelona

Ricardo Alonso Liarte
IES Salvador Victoria, Monreal del Campo (Teruel)

Iolanda Guevara Casanova

Julio Sancho Rocher
IES Avempace, Zaragoza
Universidad de Zaragoza

Daniel Sierra Ruiz

Consejo de Redacción

Miguel Barreras Alconchel
IES Matarraña, Valderrobres (Teruel)
<pelanium@yahoo.es>

Carme Burgués Flamarich
Universitat de Barcelona
<cburgues@ub.edu>

José María Muñoz Escolano
Universidad de Zaragoza
<jmescola@unizar.es >

Josep Rey Nadal
MMACA (Museu de Matemàtiques a Catalunya)
INS La Garriga, La Garriga (Barcelona)
<jrey@xtec.cat>

Montserrat Torra Bitlloch
CESIRE, Àmbit matemàtic CREAMAT
Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya
<mtorra@xtec.cat>

Consejo Editorial

Miquel Albertí Palmer
<alberti.miquel@gmail.com >

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
<agustincarrillo@fespm.es>

Juan Martínez-Tébar Giménez
IES Alto de los Molinos, Albacete
<juanmtg1@gmail.com>

Onofre Monzó del Olmo
IES Veles e Vents, Torrent (Valencia)
Universitat de València
<onofre.monzo@uv.es>

Revista Suma
Apartado de correos 286
08911 Badalona (Barcelona)
Tirada: 6000 ejemplares
Depósito legal: Gr 752-1988
ISSN: 1130-488X
Twitter: @suma_fespm

Consejo Asesor

David Arnau Vera
Universitat de València
<david.arnau@uv.es>

Carmen Azcárate Giménez
Universitat Autònoma de Barcelona
<carmen.azcarate@uab.es>

Javier Bergasa Liberal
IES Navarro Villoslada, Pamplona
<jbergasl@educacion.navarra.es>

Salvador Caballero Rubio
IES Gaia, Sant Vicent del Raspeig (Alicante)
<salvador.caballero@gmail.com

Neila Campos González
Universidad de Cantabria
<camposn@unican.es>

Encarnación Castro Martínez
Universidad de Granada
<encastro@ugr.es>

Abilio Corchete González
IES Suárez de Figueroa, Zafra (Badajoz)
<acorchete@gmail.com>

Olimpia Figueras Mourut de Montppellier
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN México
México D.F. (México)
<figuerao@cinvestav.mx>

M.ª José Fuente Somavilla
IES Augusto González de Linares, Santander
<mj.fuente@yahoo.es>

Maria Luisa Girondo
Universitat Rovira i Virgili (Tarragona)
<marialuisa.girondo@urv.net>

Horacio Gutiérrez Álvarez
Profesor de matemáticas, Oviedo
<horag3@gmail.com>

Arturo Mandly Manso
IES José Manzano, Don Benito (Badajoz)
<armandly@gmail.com>

Rafael Martínez Calafat
IES La Plana, Castelló de la Plana
<rmartinez@vila-real.uned.es>

Ricardo Moreno Castillo
Profesor de matemáticas, Santiago de Compostela
<moreno_castillo@hotmail.es>

Maite Navarro Moncho
IES Veles e Vents, Torrent (Valencia)
Universitat de València
<Teresa.Navarro-Moncho@uv.es>

M.ª Jesús Palacios de Burgos
Profesora de matemáticas, Madrid
<mjpalaciosdeburgos@hotmail.com

Pascual Pérez Cuenca
IES Figueras Pacheco, Alacant
<pascual.prz@gmail.com>

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí, Madrid
<aperez.sanz@gmail.com>

Ana Belén Petro Balaguer
Universitat de les Illes Balears, Palma
<anabelen.petro@uib.es>

Luis Puig Mosquera
IES Sofía Casanova, Ferrol (A Coruña)
<luispuig@edu.xunta.es>

Mariano Real Pérez
Centro de Profesorado, Sevilla
<mariano31415@gmail.com>

Francesc Andreu Rosselló Llompart
Universitat de les Illes Balears, Palma
<cesc.rossello@uib.es>

Manuel José Sastre Álvarez
IES La Corredoria, Oviedo
<mjsastre@telecable.es>

Manuel Sol Puig
Institut Vilatzara, Vilassar de Mar (Barcelona)
Universitat de Barcelona
<msol@xtec.cat>

Carlos Oswaldo Suarez Alemán
Universidad de Cádiz
<carlososwaldo.suarez@uca.es>

Francisco Villegas Martín
Centro del Profesorado, El Ejido (Almería)
<pvillegas@thales.cica.es>

Suma es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral cuyo objetivo es tratar sobre los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje y destinada, sobre todo, al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en
Badalona (Barcelona) — España

suma+

no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas

Normas de publicación

1. Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de *Suma* <articulos@revistasuma.es> o su dirección postal:

   Revista *Suma*
   Apartado de Correos 286
   08911 Badalona

2. Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5 Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CD-ROM, DVD-ROM o *pen drive*).
3. Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato .TXT, .ODT, .RTF, .DOC, .DOCX, adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:
   1) El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

   Y a efectos de comunicación:
   2) El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.
4. Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (por ejemplo, institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión se reemplazarán las citas y referencias bibliográficas por «Autor, 2012» o «Autor y otros, 2012». En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
5. Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…
6. Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, y cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

   Ejemplo: Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.
7. El texto irá una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25 000 caracteres sin contar espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.
8. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes serán enviados preferentemente en formato TIF o EPS, aunque será admisible el formato JPEG, de modo que, a una resolución mínima de 300 ppp, la imagen tenga un tamaño mínimo de 8 × 8 cm, y en color original. Se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo estará claramente identificado y se indicará en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
9. Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto. Si esto no fuera posible, se incorporará como imagen. En tales casos se indicará el lugar que ocupan las fórmulas en el texto, haciendo referencia al nombre del archivo que las contiene.
10. Las referencias bibliográficas se dispondrán al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición.

    Ejemplos:

    Gómez, E. (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E. (1990*a*), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., y J. Pérez (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., J. Pérez y D. Hernández (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.

    En los artículos de revistas y capítulos de libro se seguirá la pauta que se muestra a continuación:

    Gómez, E. (1990), «Título», *Revista,* n.° 31, 35-56.
    Gómez, E. (1990), «Título», en J. Pérez (ed.), *Título,* Editorial, Lugar de edición, 13-23.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: «[…] supone un gran avance (Hernández, 1992)». Si el autor aparece explícitamente en el texto, tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: «[…] según Rico (1993)».
12. Si se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión *y otros.* Por ejemplo: «Bartolomé y otros (1982)», «Gelpi y otros (1987)». Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.
13. Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.
14. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
15. A la recepción del trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.
16. Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser evaluado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo, aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo o recomendarán posibles modificaciones acordes con las normas y criterios de *Suma*.
17. Si los dos informes son positivos, el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos, se desestimará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o no.
18. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
19. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Encarni Amaro Parrado (Tesorería de la FESPM)
C/ La Palma nº1, 1ºB,
23740, Andújar-Jaén.

por correo-e a: admin@fespm.es

Deseo suscribirme a la revista *Suma*:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico:

	Importe (€)
☐ Suscripción a partir del año (3 números) _____	
☐ N.os sueltos _____	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (IBAN ES79 2100 2153 3802 0010 9089) Fecha y firma:

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM

Nombre y apellidos:

IBAN: ⌊⌊⌊⌊ Entidad: ⌊⌊⌊⌊ Oficina: ⌊⌊⌊⌊ DC: ⌊⌊ Cuenta: ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista *Suma*.

Atentamente (fecha y firma):

Conforme a lo establecido en el art. 5 de la Ley Orgánica 15/1999 de Protección de Datos de Carácter personal, le informamos que los datos de carácter personal que Usted ha facilitado de forma voluntaria se incorporarán a un fichero automatizado cuyo responsable es la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), con el fin de llevar a cabo la gestión integral de nuestra relación comercial, cobrar tarifas, contactarle y enviarle información que pueda ser de su interés, estando prevista la comunicación de los mismos a aquellos profesionales y/o empresas que intervienen en la gestión del servicio solicitado, descritos en el Documento de Seguridad. Si no nos manifiesta lo contario entenderemos que Usted consiente el tratamiento indicado. Puede ejercitar sus derechos de acceso, cancelación, rectificación y oposición, mediante escrito dirigido a la dirección postal de SUMA junto con una fotocopia del DNI.