suma+ 92
Artículos
Noviembre 2019
pp. 9-15

Enseñar matemáticas: un compromiso con el oficio de preguntar

Cecilia Calvo Pesce

Un elemento común que tiene la tarea de un maestro, maestra, profesor o profesora cuando enseña matemáticas, ya sea en Primaria o en Secundaria, es la necesidad de aprender a hacer buenas preguntas a los alumnos para ayudarlos a construir conocimiento matemático. En estas páginas me propongo reflexionar, a través de situaciones prácticas, sobre el compromiso de los docentes de matemáticas en la búsqueda de buenas preguntas para llevar al aula.

Palabras clave: JAEM, Preguntas, Manipulativos, Registro simbólico, Práctica.

Teaching Maths: a commitment to the art of asking questions

A common feature of any math teacher's job, whether in Primary or Secondary, is the need to learn to ask students good questions to help them build mathematical knowledge. In these pages I intend to reflect, through practical examples, on the math teacher's commitment with the search for good questions to take to the classroom.

Keywords: JAEM, Questions, Manipulatives, Symbolic representation, Practice

Al elegir el contenido de la conferencia plenaria que fui invitada a impartir durante las pasadas 19 JAEM intenté buscar un tema transversal que me permitiera dirigirme a la mayoría de maestros (abarcando con esta etiqueta a profesores, profesoras y maestras) que encontraría en la audiencia. Para ello reflexioné sobre los elementos comunes que había tenido mi trabajo enseñando matemáticas en diferentes etapas y entre ellos surgió, destacado, mi interés por aprender a hacer buenas preguntas a los alumnos para ayudarlos a construir conocimiento matemático.

Aunque el oficio de preguntar se asocia habitualmente a otros oficios (periodistas, investigadores, encuestadores…), el nuestro también está ligado a la realización de preguntas: cuando enunciamos una actividad, cuando planteamos experiencias manipulativas, cuando intervenimos en una discusión con los alumnos con la intención de que construyan conocimiento matemático.

Es así que, tal como hice en la conferencia, también en estas páginas me propongo reflexionar, a través de situaciones prácticas, sobre el compromiso de los docentes de matemáticas en la búsqueda de buenas preguntas para llevar al aula.

Las situaciones prácticas a partir de las cuales se articulan las reflexiones que haré sobre el valor

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2019 y recibido en septiembre de 2019

de las buenas preguntas en el aula de matemáticas, están impregnadas de la concepción de la resolución de problemas, más allá de considerarla un contenido curricular concreto, como el ambiente habitual de trabajo en las aulas de matemáticas durante la etapa de enseñanza obligatoria. Para poder generar este ambiente desde la introducción del tema hasta su clausura es fundamental el papel de los maestros en la selección de tareas

Figura 1. Conferencia plenaria en las 19 JAEM

adecuadas y especialmente, en la gestión que se haga de esas tareas.

Presentaré tres situaciones que pretenden ilustrar diferentes tipos de preguntas que utilizamos para gestionar una tarea.

— En la primera situación, caracterizada por el papel central que aquí juegan los materiales manipulativos, analizaré algunas preguntas que podemos hacer a los alumnos para ayudarlos a descubrir propiedades.
— En la segunda situación, caracterizada por el rol que juega la búsqueda de maneras adecuadas de registrar simbólicamente acciones manipulativas, comentaré preguntas que planteamos para llegar a acuerdos que den a entender a los alumnos que un algoritmo asociado a la división es simplemente una manera de poner por escrito los pasos que realizamos para averiguar el resultado de un reparto.
— Por último, en la tercera situación, asociada a tareas propuestas para brindar al alumnado oportunidades de práctica de un procedimiento matemático, ejemplificaré la existencia de tareas que presentadas con un mismo enunciado inicial para toda la clase, permiten tratar la diversidad de nuestros alumnos a partir de preguntas diferenciadas según sus necesidades.

Con la selección de estas tres situaciones pretendo hacer referencia a diferentes bloques de contenidos y a edades variadas de los alumnos a los que dirigimos las preguntas. La primera situación que trataré se desarrolla alrededor de una actividad para alumnos entre 11 y 13 años sobre una cuestión de geometría tridimensional, la segunda lo hace con relación a una actividad para alumnos del segundo ciclo de Primaria sobre un tema aritmético como es la división entera y la

tercera recorre diferentes propuestas de práctica de destrezas algebraicas (resolución de ecuaciones o estudio de funciones) a la que se acostumbra a dedicar no pocas horas de las clases en la ESO.

Manipulación

Supongamos que nos interesa que un grupo de alumnos descubra propiedades sobre la cantidad de caras (C), aristas (A) y vértices (V) de los poliedros convexos. Para hacerlo posible los alumnos necesitan disponer de un universo amplio y variado de ejemplos y conformar así un esquema conceptual robusto sobre este tipo de cuerpos geométricos tridimensionales.

Podemos poner a su disposición diversos prismas (por ejemplo, cajas que tienen forma de prisma de diferentes bases) y a partir de un conteo cuidadoso, pueden determinar en cada caso C, V y A y detectar así diversas regularidades, como por ejemplo: V siempre es un número par o en todos los casos $C < V < A$. ¿Cuáles de estas regularidades son propias de su carácter de prismas y cuáles válidas para todos los poliedros convexos?

Si agregamos pirámides al conjunto de poliedros a analizar, ofrecemos contraejemplos que refutan la afirmación de que V siempre es un número par y requiere que ajusten a $C \leq V < A$ la conjetura sobre la desigualdad que relaciona estas tres cantidades.

Si preferimos seguir explorando los poliedros por familias, conviene analizar otras menos clásicas que la de prismas o pirámides para ver que en ocasiones C puede ser mayor que V. Podemos hacerlo estudiando bipirámides, antiprismas o poliedros regulares y en todos estos casos detectaremos que a pesar de no poder establecer una relación de orden entre C y V sí que se sigue cumpliendo que estos dos números en todos los casos son menores que A.

Si en lugar del estudio sistemático por familias de poliedros, lo cual permite descubrir y justificar regularidades propias de cada tipo de poliedros (por ejemplo, en los antiprismas y en los poliedros regulares C, V y A son números pares o en las bipirámides, A siempre es divisible entre 3), proponemos a los alumnos que construyan sus propios poliedros (a partir de desarrollos planos en cartulina, con palillos y plastilina, con materiales comerciales como Polydron, etc.) conviene poner como restricción que por más creativos que deseen ser con las formas de sus poliedros se aseguren que sean convexos, o sea, que puedan apoyar cualquiera de sus caras sobre la mesa de trabajo. Es importante que aunque desconozcan los nombres de los poliedros que construyen (es habitual que aparezcan, por ejemplo, pirámides cuadradas elongadas) registren en una tabla los valores de C, V y A.

Tenemos suficiente base para conjeturar que en todos los poliedros convexos $C < A$ y $V < A$. Pero cabe preguntarse qué relación hay entre $C + V$ y A. Cuando los alumnos se enfrentan a esta pregunta damos lugar a uno de esos momentos mágicos que podemos presenciar en un aula. Van analizando los datos que han recogido, van observando que $C + V > A$ pero hay un momento en que algo cambia en sus expresiones: no solo $C + V > A$ sino que «ven» que la diferencia ¡siempre les da 2! Han descubierto el teorema de Euler.

Representación

Para realizar una operación hay disponibles diferentes algoritmos. Ni siquiera el que consideramos algoritmo estándar lo ha sido desde siempre, ni es el mismo en todos los lugares del mundo. Habiendo asumido la existencia de diversos algoritmos asociados a una misma operación, cuando nuestra tarea docente se desarrolla en los primeros cursos de primaria cabe preguntarse con qué criterio elegimos cuál será el que usaremos para cada una de las cuatro operaciones aritméticas. Los criterios más relevantes que deberían intervenir en esta decisión son, principalmente, la transparencia de su justificación y su potencial con relación a futuros aprendizajes, pero sin desatender la eficiencia del procedimiento.

En un marco de construcción del aprendizaje por parte de los alumnos se acude a la contextualización, no únicamente en el momento de presentar un concepto sino también en el mo-

mento de enseñar un algoritmo. Por regla general, empezamos directamente por contar cómo se realiza, sin darle contexto ni transparencia (o sea, sin buscar que el alumno entienda por qué ese procedimiento da respuesta al problema de encontrar el resultado de la operación).

Evidentemente este primer modelo es poco eficiente y necesitaríamos dotarnos de una expresión más breve, lo que nos lleva a intentar abreviar el proceso realizando sucesivas compresiones. Una primera abreviación para este registro: no importa quienes son las personas sino

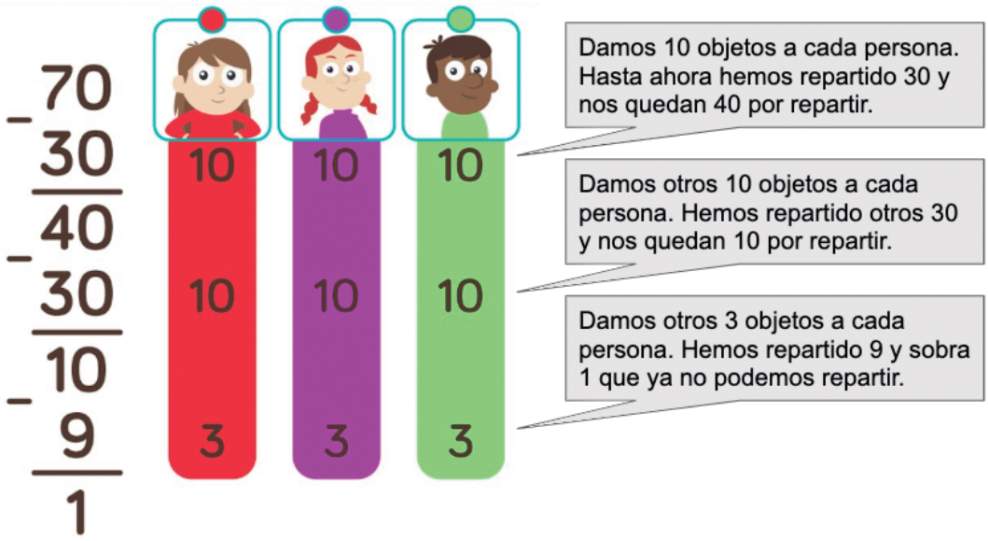

Figura 2

La construcción del cálculo en columnas propuesta por el Instituto Freudenthal (Heuvel-Panhuizen, 2001) aparece como un simple registro ordenado de los cálculos mentales que la operación requiere: mientras uno de los alumnos efectúa un reparto, por ejemplo, de 70 objetos entre 3 personas, se va registrando en la pizarra colectivamente su trascripción simbólica tal como aparece en la figura 2.

cuántas son, por lo tanto, la expresión «entre 3» nos reduce el número de columnas tal como se muestra en la figura 3.

Las siguientes abreviaciones para este registro pasan por repartir «menos veces» dando más objetos cada vez (figura 4).

Si en el momento de resolver un problema dos de nuestros alumnos nos presentan los dos modelos anteriores podemos afirmar que los dos alumnos «saben» dividir, lo que pasa es que uno

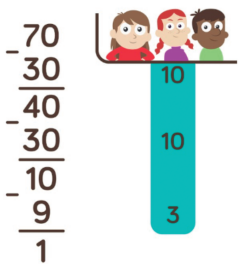

Figura 3

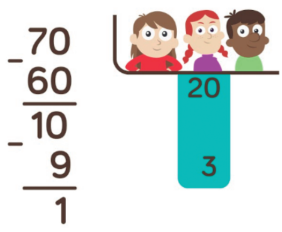

Figura 4

de ellos es más eficiente que el otro. Esto nos acerca a la atención a la diversidad. Perseguimos el objetivo de que todos nuestros alumnos sean capaces de resolver situaciones de reparto o agrupamiento que impliquen el cálculo del residuo y el cociente de una división, y sin salir del rango numérico razonable, algunos de estos cálculos pueden necesitar que se hagan por escrito, pero eso no implica que todos los alumnos tengan que hacerlo utilizando todos el mismo algoritmo y menos aún el algoritmo más sintético que conocen, si en pos de esa búsqueda de registrar lo mínimo imprescindible pierden transparencia respecto a lo que están realizando.

Exigir a todo el alumnado que utilice el algoritmo estándar no permite esta flexibilidad: o el alumno hace el cálculo siguiendo paso a paso las instrucciones aprendidas o no puede responder la pregunta que le hemos planteado. Podemos ser flexibles en este sentido, sin dejar de aspirar a que cada alumno llegue a resolver las divisiones propuestas de la manera más eficiente posible, pero que sea la más eficiente para él y no en términos absolutos.

Práctica

Las destrezas matemáticas básicas requieren práctica para poder ser utilizadas de manera fluida en la resolución de problemas. La cuestión a remarcar es que esta práctica no la debemos entender necesariamente como sinónimo de trabajo mecánico o reproductivo, sino que ella misma se puede desarrollar en un ambiente de resolución de problemas. Para ello hay que elegir bien las tareas que proponemos a nuestros alumnos pero teniendo muy presente que son las preguntas del maestro las que permiten convertir una tarea rutinaria de ejercitación en una práctica productiva (Heuvel-Panhuizen, 2001), o sea, en una tarea más rica desde el punto de vista matemático.

La cantidad de ejemplos que permiten ilustrar esta posibilidad es enorme pero en este apartado me centraré en tareas de práctica de procedimientos algebraicos propias de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Resolución de ecuaciones de primer grado

En lugar de una lista de seis ecuaciones lineales para resolver, podemos proponer que escriban sobre cada segmento de la figura 5 la solución de la ecuación que resulta de igualar los dos cuadros asociados a este segmento (Foster, 2015).

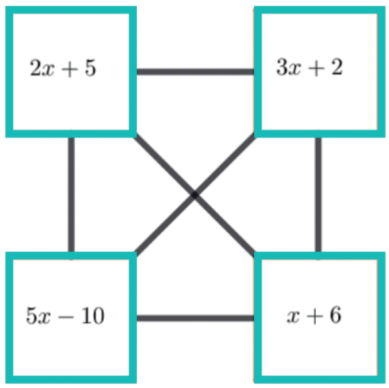

Figura 5

Los alumnos que necesitan tiempo para practicar este tipo elemental de ecuaciones dispondrán de una oportunidad para hacerlo y sus maestros tendremos ocasión de detectar sus dificultades y acompañarlos. Porque los alumnos que ya dominen las estrategias de resolución requeridas observarán que las soluciones obtenidas son 1, 2, 3, 4, 5 y 6 y esta circunstancia nos invita a hacer otras preguntas que los llevarán a resolver otras muchas ecuaciones con una intención más allá de practicar una mecánica. ¿Qué pasa con las soluciones si multiplicas por 10 los términos independientes de las cuatro expresiones? ¿Y si los valores multiplicados son los coeficientes del término de primer grado? ¿Qué expresiones escribirías en los recuadros para obtener los seis primeros números pares? ¿Y para obtener seis números de dos cifras consecutivos?

Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales y dos incógnitas

En lugar de una lista de sistemas inconexos para practicar los métodos de resolución que se hayan

trabajado, podemos proponer: «Mira la figura 6, elige tres números pares consecutivos y úsalos como coeficientes de la primera ecuación (respetando el orden). Para los coeficientes de la segunda ecuación, elige tres números impares consecutivos. Resuelve el sistema resultante. Hazlo de nuevo cambiando la elección de números para los coeficientes. ¿Qué observas?».

Figura 6

La resolución de dos o tres de los sistemas propuestos en ese único enunciado permitirá a los alumnos conjeturar que en todos los casos la solución del sistema es la misma ($x=-1$, $y=2$). Pero este no es el final del camino, les podemos sugerir nuevas preguntas: ¿qué pasaría si cambiamos pares e impares consecutivos por valores consecutivos en otras progresiones aritméticas?, ¿por qué pasa esto?, ¿y si cambiamos progresiones aritméticas por progresiones geométricas?

Ciertamente también aquí tendremos alumnos para los que la resolución de uno solo de estos sistemas será un desafío que requerirá de nuestra ayuda. Pero que el resto del alumnado tenga una tarea entre manos nos da tiempo para ofrecerles este apoyo.

Resolución de ecuaciones de segundo grado

Con la misma idea que en los dos apartados previos, se puede sustituir la propuesta de resolver una serie de ecuaciones de segundo grado por la de completar la tabla de la figura 7.

Al hacerlo podrán conjeturar la relación entre la suma y el producto de las soluciones reales de una ecuación de segundo grado con los coeficientes de la misma cuando el coeficiente del término de segundo grado es 1 (la suma coincide con el opuesto del coeficiente del término lineal y el producto, con el término independiente). A partir de esta primera conjetura podremos proponerles cuestionarse si eso pasará siempre, si es así, cuál sería la razón, qué pasaría si el coeficiente del término de segundo grado no fuese 1 o, si estuviéramos con alumnos más allá de la ESO, hasta se podría plantear cómo adaptar esta propiedad para los casos en que la ecuación tenga soluciones complejas. La lista de preguntas no acabaría, es el maestro quien decide cuando ya se ha exprimido la situación lo suficiente y plantea una nueva tarea.

Determinación de la expresión algebraica y gráfica de una función de primer grado dada por una tabla de valores

En los tres casos anteriores el enriquecimiento de la tarea venía de la mano de la búsqueda de

Ecuación	Soluciones: ● y ■	● + ■	● · ■
$x^2 - 2x - 3 = 0$			
$x^2 - 3x + 2 = 0$			
$x^2 + ½\,x - 3 = 0$			
$x^2 - 3 = 0$			
$x^2 + 5x = 6$			
$x^2 + 6x + 9 = 0$			

Figura 7

patrones pero no es este el único camino. En el último ejemplo, la resolución de problemas se relaciona con la demanda de pensamiento sistemático por parte del alumno para procurar no perder ninguna de las posibilidades asociadas a una situación. Tampoco es necesario que las tareas sean siempre individuales, y por ello, esta última es adecuada para ser resuelta en pequeños grupos: «Completen cada recuadro de la tabla que aparece en la figura 8 con un dígito diferente elegido entre 1, 2, 3 y 4 y obtengan la fórmula y el gráfico de la función de primer grado asociada a cada tabla. Organícense para obtener todas las funciones posibles».

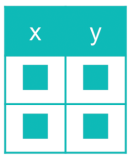

Figura 8

Vale observar que no se trata de un mero ejercicio de combinatoria, puesto que de las 24 posibles permutaciones de los cuatro dígitos, varias tablas diferentes tienen asociadas una misma función y en la acción de descartar las repeticiones, tanto como en la de determinar una fórmula, radica la destreza que se pretende practicar.

Conclusión

La mayoría de nuestros currículos explicitan la capacidad para plantearse preguntas como un aspecto central en la competencia matemática. Pero para que los alumnos se hagan preguntas no solo hace falta plantear situaciones suficientemente abiertas que les den lugar, sino que los maestros debemos ser conscientes de nuestro papel como modelos en este sentido.

No podemos cejar en el intento de hacer cada día mejores preguntas. Antes de entrar al aula debemos planificar qué preguntas haremos para acompañar una tarea, pero será nuestra formación constante y experiencia la que nos ayudará a plantear otras que dependerán de la contingencia del aula (Rowland y Zazkis, 2013).

Referencias bibliográficas

Foster, C. (2015), «Expression Polygons», *Mathematics Teacher*, vol. 109, n.º 1.

Rowland, T., y R. Zazkis (2013), «Contingency in the Mathematics Classroom: Opportunities Taken and Opportunities Missed», *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, vol. 13, n.º 2.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.) (2001), *Children learn mathematics*, Freudenthal Institute, Utrecht University.

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sant Gregori
<ccalvopesce@gmail.com>