suma+ 92
Artículos
Noviembre 2019
pp. 17-26

Solucionando el puzle Instant Insanity

Francisco Molina López

En este artículo se describe el puzle Instant Insanity, algo de su historia y su solución. Se procura analizarlo exhaustivamente utilizando distintas herramientas matemáticas de progresivo nivel de complejidad. Y por último se presenta una gran familia de juegos similares a este, generalizaciones del juego y se proponen otros diferentes para ser resueltos por el lector.

Palabras clave: Instant Insanity, Puzle, Grafos, Teorema de enumeración de Polya, Combinatoria.

Solving Instant Insanity puzzle

This article describes the Instant Insanity puzzle, a bit of its history and its solution. We try to analyze it exhaustively using different mathematical tools of creeping levels of complexity. And finally we introduce a large family of puzzles similar to this one and generalisations of the game and suggest others which the reader can solve.

Keywords: Instant Insanity, Puzzle, Graph, Polya enumeration theorem, Combinatory.

Bajo un nombre tan sensacionalista como es *Instant Insanity* (locura instantánea) se esconde un puzle que nada tiene de locura, sino todo lo contrario. Su análisis discurre totalmente por los senderos de la lógica deductiva y la cordura.

Aunque Instant Insanity es el nombre más extendido de este juego, también puede encontrarse bajo otros nombres, como Tantalizer, Katznjammer, Face-4, Cube-4, Bognar Balls, Taktikolor, Frantic, Diabolical, Damblocks, Symington's Puzzle… La mayoría de estos puzles son exactamente el mismo, otros son *isomorfos* y solo unos pocos son pequeñas variantes. En este artículo veremos cómo podemos estudiarlos para encontrar sus soluciones y cómo podemos compararlos y diferenciarlos.

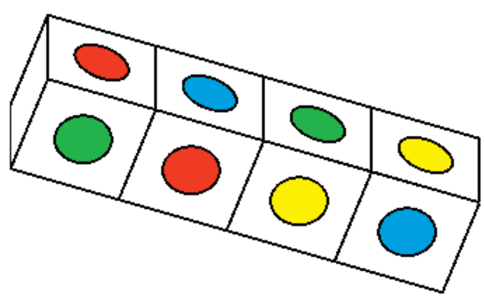


Figura 1. Instant Insanity resuelto

Artículo recibido en *Suma* en abril de 2018 y aceptado en diciembre de 2018

Nos familiarizamos con el juego

El juego está formado por cuatro cubos, en los que cada cara tiene un color. Cada cubo tiene exactamente cuatro colores, con lo cual se repetirá alguno o algunos. La distribución de los colores en cada cubo es diferente, tanto por los colores que se repiten como por su ubicación (ver ejemplo en figura 2).

En esta situación, el objetivo del juego es encontrar cómo se pueden alinear las piezas, al estilo del dibujo inicial (figura 1), para que en cada cara lateral queden visibles los cuatro colores diferentes y por lo tanto no se repita ninguno.

Cualquier juego está hecho para entretenerse y por tanto, es lógico que la primera aproximación sea coger los cuatro cubos e intentar resolverlos por el método de ensayo y error. Invitamos a que usando el desarrollo de la figura 2 se construya un ejemplar del puzle.

Mediante ensayo y error podemos tener suerte o no, pero ¿cómo de difícil será que encontremos dicha solución? Para contestar a esta pregunta debemos contar en primer lugar el número de formas posibles de colocar las piezas del juego. Y luego saber cuántas soluciones tiene.

Si imaginamos el juego resuelto nos daremos cuenta de que el orden de los cubos no es importante, y sí lo es su orientación. También observamos que cada cubo tendrá dos caras ocultas y otras cuatro visibles cuando estén alineados. Contemos las configuraciones distintas con esos cubos:

— El primer cubo se podrá poner de 3 formas distintas, solo será cuestión de elegir cuáles serán las parejas de caras ocultas.

— Una vez fijada la posición de este primer cubo, el siguiente se podrá poner de $6\times4 = 24$ formas distintas; 6 posiciones que corresponden a la elección de la cara en contacto con el primer cubo y 4 por la elección de la cara frontal.

— Y el tercer y cuarto cubo se podría poner de otras 24 formas cada uno, como el segundo.

— Así habrá $3\times24^3 = 41\,472$ formas distintas de colocar los cuatro cubos del juego. Demasiadas combinaciones para buscar la solución aleatoriamente (sobre todo si esta fuese única).

Pero, es evidente que cuando jugamos no buscamos la solución al azar, sino que una vez colocado un cubo iremos mirando los colores para eliminar muchas de esas posibilidades. Por ejemplo, una vez colocado el primer cubo, si este tiene la cara frontal amarilla, de las 24 posiciones del segundo cubo eliminaremos todas aquellas que tengan también la cara frontal amarilla. Además, tampoco probaremos con las que coincidan en los colores de la parte trasera, la superior ni la inferior. Y del mismo modo con el tercero y el cuarto cubo.

De esta manera se reducirían mucho las 41 472 posibilidades. Y si fuésemos muy metódicos llegaríamos a la solución única que tiene el conjunto de cubos que vamos a estudiar, aunque no es nada fácil ser metódico. Lo más frecuente es perderse en la rotación de los cubos y acabar probando una y otra vez posibilidades ya estudiadas sin percatarnos de ello. Nos perderemos en un bosque de combinaciones y tendremos la sensación de andar en círculos, o peor aún, lo estaremos haciendo sin darnos cuenta.

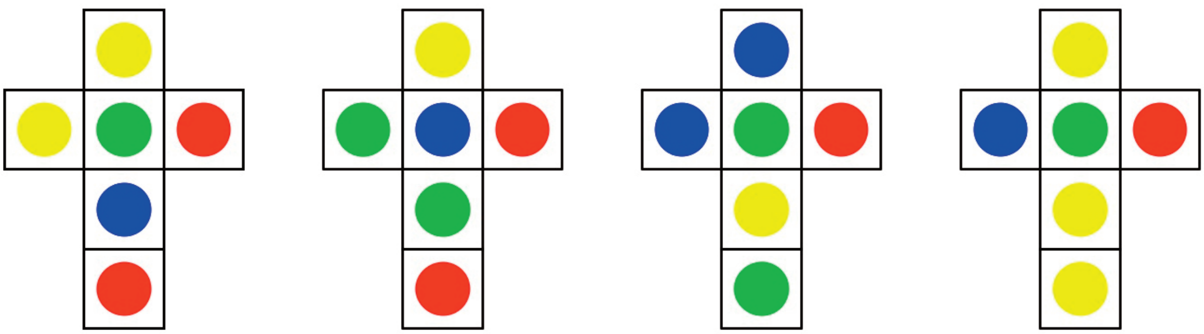


Figura 2. Desarrollo de Instant Insanity

Primer análisis

Una vez que nos hemos entretenido un rato y nos hemos familiarizado con los cubos, el siguiente paso *natural* es pararse un momento y reflexionar sobre los colores y su distribución.

Recordamos que en cada cubo habrá dos caras opuestas que se *ocultarán*. Entre todas las caras *visibles* de los cuatro cubos deberá haber en total cuatro colores rojos, cuatro amarillos, cuatro verdes y cuatro azules. Entonces, ¿qué colores debemos ocultar concretamente? Un recuento elemental nos permite ver que tenemos 7 amarillos, 6 rojos, 6 verdes y 5 azules. Luego, sobran 3 amarillos, 2 rojos, 2 verdes y 1 azul respecto de esos cuatro de cada color que serán visibles. Por tanto deben quedar ocultos.

¿Cuánto hemos simplificado las combinaciones? Muchísimo, ya que los colores que van a quedar escondidos van emparejados por caras opuestas en cada cubo. Así solo habrá $3^4 = 81$ combinaciones que revisar. Este análisis se puede hacer sobre papel, incluso dejando momentáneamente a un lado los cubos. Con un poco de paciencia se puede comprobar que solo en 5 de esos 81 casos se pueden ocultar los colores indicados (3 amarillos, 2 rojos, 2 verdes y 1 azul). Respetando el orden en que hemos colocado los cubos en la figura 2, indicamos en la tabla 1 las parejas de colores que deberían ocultarse en cada cubo para las cinco posibilidades mencionadas:

	Cubo 1	*Cubo 2*	*Cubo 3*	*Cubo 4*
1.ª	Rojo-Verde	Rojo-Verde	Amarillo-Azul	Amarillo-Amarillo
2.ª	Rojo-Verde	Amarillo-Verde	Rojo-Azul	Amarillo-Amarillo
3.ª	Amarillo-Rojo	Rojo-Azul	Verde-Verde	Amarillo-Amarillo
4.ª	Amarillo-Rojo	Rojo-verde	Amarillo-Azul	Amarillo-Verde
5.ª	Amarillo-Rojo	Amarillo-Verde	Rojo-Azul	Amarillo-Verde

Tabla 1

Finalmente, hay que comprobar cada una de esas configuraciones para eliminar las que no permiten obtener la solución deseada. Es decir, las que se pueden colocar sin que coincidan colores en las caras laterales de la pila de cubos. Esta última comprobación es necesario hacerla con una réplica de los cubos y proporciona una solución única.

Segundo análisis

Hasta aquí hemos descrito el análisis y los procesos que se nos podrían ocurrir a la mayoría de los que intentemos ser meticulosos (al menos hablo de lo que a mí me sucedió). A partir de aquí veremos un análisis más evolucionado, que también usa emparejados los colores de las caras opuestas. Y la idea clave que se añade es la notación en forma de grafo.

Esta forma de enfocar este problema, aunque aparece reproducida en multitud de textos, tiene su origen en el artículo «The colour cubes problem» (Carteblanche, 1947) [1]. Este artículo estaba firmado bajo el seudónimo de F. de Carteblanche, por un grupo de estudiantes universitarios. Los nombres reales que se escondían detrás de este seudónimo eran Leonard Brooks, Arthur Stone, Cedric Smith y Bill Tutte [2].

En el artículo de Carteblanche se mencionaba que el juego se había hecho famoso en los años 40. Aunque el origen del juego, ya entonces, quedaba en el aire. Y Wei Zhang (1996) afirma que hay registrada una patente de este juego en 1900 a nombre de Frederick A. Schossow.

La novedosa idea clave para analizar a fondo este puzle es *codificar* las piezas en forma de grafo. En el grafo cada vértice representa un color y para abreviar se marcan con las letras B, Y, R y G (iniciales de sus respectivos colores en inglés) [3]. Como cada cubo tiene los cuatro colores solamente, cada uno de nuestros grafos tendrá exactamente cuatro vértices. (Es aconsejable ponerlos siempre en el mismo orden en el grafo).

Y las aristas del grafo unirán los colores de las parejas de caras opuestas de nuestro cubo de la siguiente manera: Si, por ejemplo, tenemos en nuestro cubo dos caras opuestas con los colores rojo (R) y verde (G), tendremos una arista uniendo los vértices R y G. Como cada cubo tiene tres pares de caras opuestas, el grafo de cada cubo tendrá tres aristas.

Este grafo podrá tener lazos (aristas que conectan un punto consigo mismo), ya que dos caras opuestas del cubo pueden tener el mismo color. Las aristas también estarán marcadas con un número que indique el cubo al que pertenecen. De esta manera, los grafos para representar cada uno de los cubos de nuestro juego son los siguientes:

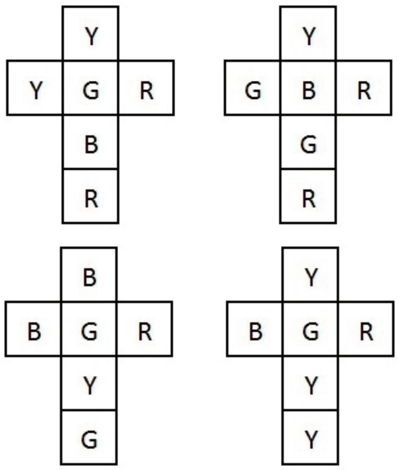


Figura 3. Desarrollo de las piezas del puzle con letras

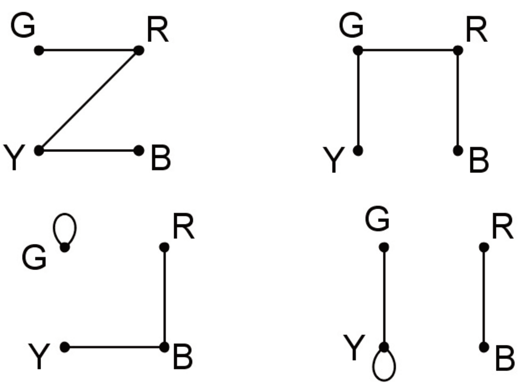


Figura 4. Grafos de los cuatro cubos

Y finalmente crearemos un grafo conjunto de todo el juego que será la suma de los cuatro grafos, con los números que indicarán el cubo del que procede cada arista. Así, para nuestro juego tendremos el grafo total que puede observarse en la figura 5.

Esta forma de analizar el juego sirve tanto para buscar soluciones, como para comparar distintas versiones del juego, ya que muchos de los juegos que podemos encontrar son el mismo

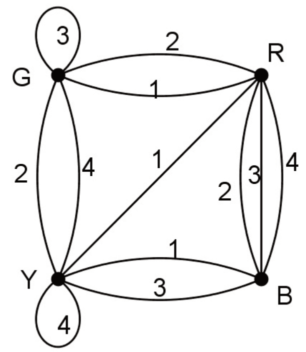


Figura 5. Grafo conjunto del juego

que hemos mencionado, salvo cambio o permutación de los colores, simetrías, sustitución de colores por símbolos, etc. Si los grafos fuesen más complejos, detectar isomorfismos sería difícil, pero al tener solo cuatro vértices y 12 aristas, la tarea es relativamente sencilla.

Para entender cómo podemos buscar una solución usando el grafo total del juego, supondremos el puzle resuelto. Más concretamente, de la supuesta solución, primero nos fijaremos solo en las caras superior e inferior. Un ejemplo sería:

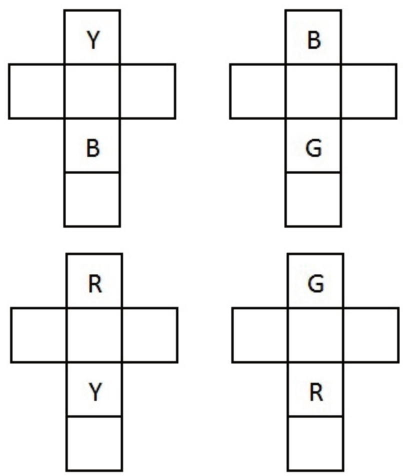


Figura 6. Caras superior e inferior
de una supuesta solución

Si dibujamos las aristas de esas caras opuestas y las numeramos de acuerdo con el cubo del que proceden, obtendremos el grafo mostrado en la figura 7. Además, observamos que la figura 7 sería un subgrafo del grafo total del supuesto juego (no del nuestro). Y para que sea una posible solución debe tener las siguientes propiedades:

— Cuatro aristas, una de cada cubo. Por lo tanto estarán numeradas del 1 al 4. Podría haber también aristas en forma de lazos, como se ha mencionado arriba.
— Los cuatro vértices tendrán grado 2, ya que cada color tiene que aparecer exactamente una vez en cada lado opuesto. Un lazo en un vértice haría que ese vértice llegase a grado 2 con el lazo.

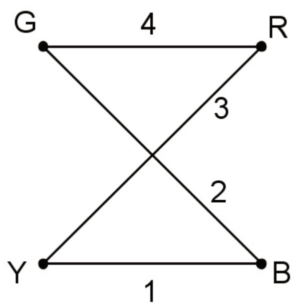


Figura 7. Subgrafo esquema de la figura 6

Con estas características, el subgrafo de esa parte de una solución será un ciclo o un conjunto de ciclos, ya que puede haber lazos. Y si esto sucede para las caras superior e inferior, con las caras anterior y posterior también resueltas se formaría otro subgrafo similar al anterior que utilizaría *otras aristas diferentes*. Diferentes ya que una arista representa un par de caras del cubo, y por tanto no puede estar arriba y abajo, y al mismo tiempo delante y detrás (posiciones representadas en los subgrafos).

En resumen: toda solución tiene asociados dos subgrafos con las características arriba indicadas, y la afirmación recíproca también es cierta. Es decir, si podemos encontrar esos subgrafos, habremos encontrado una solución y esta queda descrita en ellos.

En la mayoría de los documentos en que se describe la solución de este juego, se indica que una vez encontrados estos grafos todavía hay que hacer varias pruebas (físicamente con los cubos reales) para encontrar la orientación de cada cubo sin que se repitan los colores.

Por ejemplo, supongamos que en la figura 8 aparecen los dos subgrafos solución para arriba-abajo y delante-detrás respectivamente:

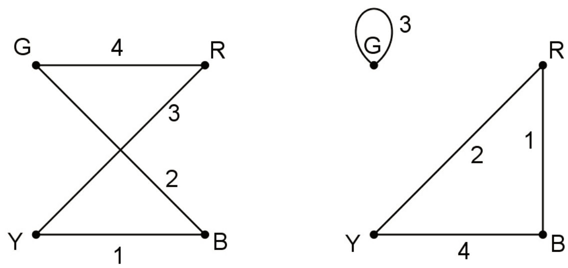


Figura 8

En ese caso colocaríamos el cubo 1 con Y arriba y B abajo (o al revés) y al mismo tiempo R delante y B atrás (o al revés). Para el segundo cubo pasará lo mismo. GB arriba-abajo (o al revés para que no coincida con la elección hecha en el cubo 1) y RB delante-detrás (o al revés para que tampoco coincida con el cubo 1). Habría que elegir la posición que no haga coincidir ningún color. Y hacer lo mismo al añadir los dos cubos restantes.

Para evitar tener que hacer todas estas comprobaciones finales, en el artículo «A diagrammatic solution to Instant Insanity problem» (Grecos y Gibberd, 1971) se completa la solución con algo tan sencillo como añadir una orientación a las aristas elegidas en cada subgrafo para que formen ciclos dirigidos.

Como cada vértice de los subgrafos tiene que tener grado dos, al asignar orientación a sus aristas tendremos que en cada vértice coinciden un final de una arista y un comienzo de otra. Así podemos suponer que los extremos de las aristas del primer subgrafo siempre indicarán los colores de arriba y los orígenes indican los colores de abajo (o al revés en todas) y de la misma forma, para el segundo grafo indicarán delante-detrás.

Ahora vuelve al grafo total del puzle Instant Insanity (figura 5). ¿Serías capaz de encontrar una pareja de subgrafos disjuntos que cumplan las dos condiciones mencionadas? Solo un par de indicaciones:

— podrás encontrar tres subgrafos cíclicos como los que necesitamos;
— solo se puede seleccionar una pareja de ellos con aristas disjuntas.

Para no quitar el placer de encontrar la solución, esta aparecerá al final del artículo.

Tercer análisis

La tercera forma de resolver este juego la encontramos en Brown (1968). Este método consiste en asignar a cada color un número. Estos números serán, el uno y tres números primos. Por ejemplo, podría ser:

1: Rojo 2: Amarillo 3: Azul 5: Verde

De esta forma, si alineamos los cubos y nos fijamos en una de las caras laterales de la alineación, multiplicando los números según sus colores, tendríamos asociado un número. Más concretamente, si el juego está resuelto, cada cara alineada tendrá asociado el *número característico* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Para este análisis, también asociaremos (como en el análisis mediante grafos) las parejas de caras opuestas de cada cubo. Así cada cubo tendrá asociados tres números característicos relativos a sus pares de caras opuestas. Y en nuestro juego sería:

Cubo 1	2	6	5
Cubo 2	5	10	3
Cubo 3	3	6	25
Cubo 4	3	4	10

Tabla 2

Si el juego estuviese resuelto, el total de las caras frontales llevarían asociados un resultado total de 30, y el de las traseras también sería 30. Por lo tanto, combinadas darían un total de $30 \cdot 30 = 900$.

Usaremos un método casi idéntico al descrito en Brown (1968) para encontrar las combinaciones de los cuatro números que dan 900: Con el cubo 1 y el cubo 2 buscamos todos los posibles productos de sus tres números característicos (paralelamente haremos lo mismo con los de los cubos 3 y 4). Y finalmente, buscaremos parejas en esas dos columnas de resultados cuyo producto sea 900 (tabla 3).

Y las parejas de las columnas centrales que proporcionan el resultado 900 serían en nuestro caso:

$$(6 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 10) = 30 \cdot 30$$

$$(5 \cdot 10) \cdot (6 \cdot 3) = 50 \cdot 18 \qquad (5 \cdot 3) \cdot (6 \cdot 10) = 15 \cdot 60$$

Cubo1		Cubo2					Cubo3		Cubo4
2	·	5	=	10	9	=	3	·	3
2	·	10	=	20	12	=	3	·	4
2	·	3	=	6	30	=	3	·	10
6	·	5	=	30	18	=	6	·	3
6	·	10	=	60	24	=	6	·	4
6	·	3	=	18	60	=	6	·	10
5	·	5	=	25	75	=	25	·	3
5	·	10	=	50	100	=	25	·	4
5	·	3	=	15	250	=	25	·	10

Tabla 3

Se puede observar que esas tres posibilidades recuerdan sospechosamente a los tres ciclos o subgrafos que hemos comentado que podíamos obtener con el método de los grafos.

Cada una de esas formas de obtener el 900 es una posible combinación para ordenar los cubos en las caras inferior-superior y del frente-fondo. Para encontrar las parejas compatibles, podemos seguir usando los números. Por ejemplo, la primera de esas combinaciones es incompatible con la tercera ya que ambas usan el 10 para el cubo 4 (lo que implicaría usar ese cubo con dos orientaciones distintas simultáneamente). Igualmente, la segunda y la tercera también son incompatibles. Por lo tanto, la primera y la segunda combinaciones proporcionarán la solución de nuestro juego. Solo tenemos que volver a traducir los números característicos de cada uno de los cubos a colores y tendremos las orientaciones de cada uno de los cubos. Por ejemplo la combinación

$$6 - 5 - 3 - 10$$

corresponde a:

$$2 \cdot 3 - 1 \cdot 5 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 5$$

y son los colores:

amarillo-azul – – rojo-verde – –
– – rojo-azul – – amarillo-verde

y la podemos usar para las caras superior e inferior.

En este análisis todavía queda por decidir exactamente qué caras aparecerán en la parte frontal y cuáles en la parte trasera. Esto lo tenemos que analizar probando con cada cubo. Recordamos que este mismo problema lo tendríamos si no añadimos orientación a los ciclos obtenidos con el método de los grafos.

Cuarto análisis

La última de las vías que he encontrado para resolver este problema (Basart y Guitart, 1999) es quizás la más compleja. Pero proporciona una forma de generalizar el problema e implementarlo en un programa informático.

El método consiste en crear una serie de ecuaciones e inecuaciones lineales que reflejen todas las limitaciones del puzle basándonos en el grafo conjunto. Este sistema constituye un problema de programación lineal y la solución que hace máximo el valor de una función objetivo sencilla nos proporciona la solución buscada.

Para el caso de 4 cubos y 4 colores, creo que este método es demasiado complejo, salvo que se quiera usar, por ejemplo, para resolver con medios informáticos todos los juegos posibles de este tipo.

Solo para dar algunas pinceladas del método, podemos indicar que en el ejemplo que nos ocupa tendríamos estos cuatro grupos de condiciones:

- 4 ecuaciones asociadas cada una a un vértice del grafo conjunto (cada color).
- 4 ecuaciones asociadas cada una a un cubo.
- 12 ecuaciones asociadas a cada arista del grafo (solo para reflejar en las ecuaciones que las aristas son no orientadas).
- 12 inecuaciones que limitan los valores de las variables (una por cada arista del grafo). Estas variables solo pueden tomar valores 0 ó 1, de modo que la limitación es solo imponer que sean menores o iguales que 1.

Cubos diferentes

La solución más usada para este juego es la que utiliza los grafos. Es bastante rápida e intuitiva. Además nos permite comparar con relativa facilidad nuestra combinación de cuatro cubos con otras que podemos encontrar en juegos comercializados o compartidos en Internet.

Para comparar dos juegos solo tenemos que crear el grafo conjunto de cada uno de ellos e intentar compararlos. Muchas veces las únicas variaciones son permutaciones o cambios en los colores, en la posición de los mismos en el grafo o sustitución de los colores por otras figuras o símbolos, lo que da lugar a grafos idénticos.

De hecho, resulta interesante crear nuestro propio grupo de cuatro cubos pintados con cuatro colores e intentar resolver ese puzle. Pero, ¿cuántos cubos diferentes, a efectos del diseño del puzle, podemos hacer?

La forma más fácil de contestar a esta pregunta es intentar dibujar todos los grafos posibles para un cubo. Siendo meticuloso y con un poco de paciencia podemos ver que hay 52 cubos. En la figura 9 se incluyen los grafos que los representan.

Esta forma de obtener todos los cubos es puramente heurística, pero podíamos haber calculado su número usando un caso particular del teorema de Enumeración de Polya. Según este teorema, la fórmula para calcular el número de cubos diferentes que podemos pintar usando *como máximo k* colores (N_k) es:

$$N_k = \frac{1}{24}\left(k^6 + 3k^4 + 12k^3 + 8k^2\right)$$

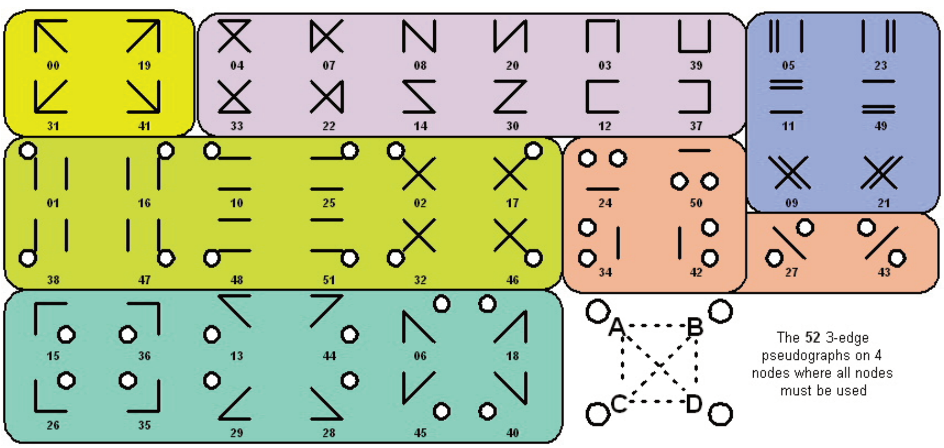


Figura 9. Grafos de los distintos tipos de cubos. Imagen copiada de la página de puzles de Rob Stegmann

Así que $N_1 = 1$, $N_2 = 10$, $N_3 = 57$ y $N_4 = 240$.

Pero a nosotros lo que nos interesa es que se usen *exactamente* los cuatro colores (n_k), no que se usen 4 colores como máximo.

$$n_1 = N_1$$
$$n_2 = N_2 - \binom{2}{1} n_1 = 10 - 2\cdot 1 = 8$$

(Hemos restado a N_2 las combinaciones con un solo color).

$$n_3 = N_3 - \binom{3}{1} n_1 - \binom{3}{2} n_2 = \\ = 57 - 3\cdot 1 - 3\cdot 8 = 30$$

(Hemos restado a N_3 las combinaciones con un solo color y con dos colores exactamente).

$$n_4 = N_4 - \binom{4}{1} n_1 - \binom{4}{2} n_2 - \binom{4}{3} n_3 = \\ = 240 - 4\cdot 1 - 6\cdot 8 - 4\cdot 30 = 68$$

(Hemos restado a N_4 las combinaciones con uno, dos y tres colores exactamente) [4].

La sorpresa que nos encontramos es que los resultados heurísticos analizados en el dibujo anterior (52 grafos diferentes) no se corresponden con el cálculo realizado con el teorema de Polya (68 cubos diferentes). La discrepancia de estas dos cifras se debe a que con el método de los grafos no podríamos distinguir un cubo de su simétrico (por tanto los contaríamos solo una vez), mientras que con la fórmula de Polya sí los distinguiríamos (y computarían como dos).

Hay 16 parejas de cubos simétricos, y 36 cubos que no tienen ningún simétrico (es decir, que su simétrico es idéntico a él) [5]. Puesto que las soluciones del juego no cambian si sustituimos algún cubo por su simétrico, tenemos que hay 52 cubos (/grafos) diferentes.

Diferentes combinaciones de Cubos

Como ya hemos mencionado, la mayor parte de las combinaciones de cuatro cubos que encontramos en Internet para este juego son iguales: usan símbolos, cambian de colores, los permutan o usan algún cubo simétrico de los aquí presentados.

Los 52 cubos posibles se pueden combinar en grupos de 4 de 270 725 formas diferentes. De modo que hay 270 725 potenciales puzles diferentes. Y sin embargo parece que hay una combinación que ha triunfado sobre las demás. Tal vez por haber sido la primera que se popularizó.

La mayor compilación de los puzles de este tipo que se han comercializado (y de muchos otros tipos) aparece en la página web de Rob Stegmann <http://www.robspuzzlepage.com/pattern.htm#insanity>. Pero si quisiéramos tener en cuenta incluso las que no se han comercializado, tendríamos que hacer un análisis muchísimo mayor. Por suerte, ese análisis lo ha llevado a cabo el propio autor, y nos explica sus resultados también en su página web. Según su análisis, de los 270 725 juegos de cubos posibles, hay 138 078 con alguna solución. Y que tengan una única solución habría 5 160. Pero en este análisis no se han eliminado las posibles permutaciones de colores para descartar los juegos isomorfos. Cuenta Rob que al eliminarlas se queda reducido el número de puzles con solución única a 200 y en su web se puede descargar un archivo de texto donde se detallan esas 200 combinaciones.

También se menciona en la página web anterior, que Frank Harary (1977) (reconocido como uno de los padres de la moderna teoría de grafos) indicaba que usando métodos de enumeración de grafos no es difícil contar el número de puzles diferentes de este tipo que podemos crear. Desconozco a qué tipo de análisis se referiría Harary, ya que no lo dejó escrito. Pero lo que sí es relativamente sencillo es encontrar todos los *subgrafos cíclicos* posibles con cuatro vértices y cuatro aristas. Esto puede servir de ayuda para sistematizar la búsqueda de soluciones dentro del grafo total de un juego concreto. Encontrar todos estos ciclos queda como tarea para el lector, solo indicaremos que hay 17 diferentes (3 con un solo ciclo, 7 con dos ciclos, 6 con tres ciclos y 1 con cuatro).

Variantes del juego

Con cubos de Instant Insanity también se puede hacer otro juego. En este caso el objetivo sería formar un cuadrado de $2\times 2\,(\times 1)$ en el que las 4 caras superiores tengan cuatro colores diferentes, las cuatro inferiores también, y en cada una de las caras laterales (2×1) se vea un único color diferente al de las demás.

No he encontrado ningún método que sistematice la solución de esta variante del puzle. Pero sí que podemos ver los resultados sobre este tipo de juegos que Gál Péter ha publicado en su blog <http://ordoglakat.blog.hu/2013/05/20/az_orulet_fokozodik_755>[6].

Aunque los resultados de Péter no pueden compararse con los de Stegmann por usar métodos distintos de conteo. Por ejemplo, Péter encontró que hay 340 grupos de 4 cubos con los cuales este nuevo puzle tiene solución única (recordamos que Stegmann encontró 200). El problema de este análisis está en que, según me comentó Péter, él no eliminó los cubos simétricos, sino que hizo el análisis con 68 cubos (en lugar de los 52 de Stegmann). Supongo que de ahí surge la discrepancia.

En el blog de Péter podemos encontrar más generalizaciones y variantes de este tipo de juegos. Una de ellas es el interesante puzle intercambiado por Rik Van Grol en el IPP25[7] llamado *Complete Insanity* donde los cubos no se alinean sino que se colocan sobre una plantilla que permite ver todas sus caras. En esa plantilla se tiene que poder ver desde las seis direcciones posibles los cubos sin que se repita ninguno de los 5 símbolos (sustitutos de los colores).

También aparece relacionado frecuentemente este puzle con los *cubos de MacMahon* (Grupo Alquerque, 2002). Aunque estos cubos también tienen las caras de colores, en este caso se usan seis colores diferentes en cada cubo. Así que si queremos usar cubos de este tipo para un juego del tipo Instant Insanity necesitaremos 6 cubos que habría que alinear sin repetir colores. Por ejemplo, son cubos de MacMahon los cubos del puzle 3 que se dejará propuesto más abajo. Por lo demás, en el citado artículo del Grupo Alquerque (2002) se le añaden más objetivos interesantes con los cubos de Instant Insanity.

Para que el lector pueda practicar lo que hemos visto en este artículo, dejamos aquí tres combinaciones nuevas con 4, 5 y 6 cubos respectivamente. Para ser más rápidos, representaremos cada cubo con tres pares de letras entre paréntesis, indicando cada uno de ellos los colores de sus tres pares de caras opuestas.

Puzle 1
Descrito en el blog de Péter. Tiene solución única y también admite colocarlo formando un cuadrado 2×2×1 como se ha indicado más arriba: (GY, RY, BY) (GY, YB, BR) (RY, YB, BG) (GR, RB, BY)

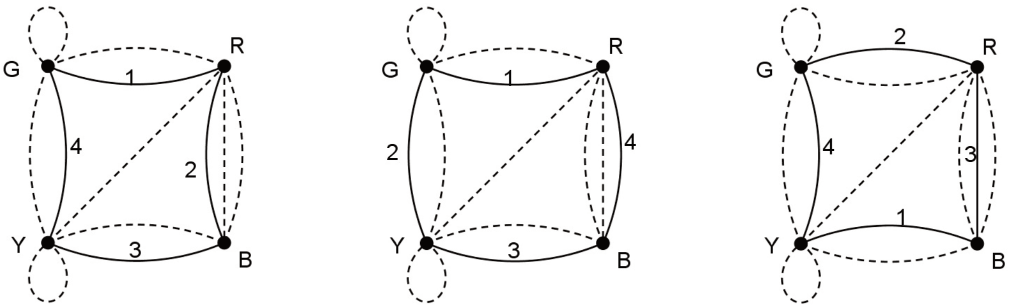
Puzle 2
Con cinco cubos y dos soluciones (O'Beirne, 1961b) (RU, FJ, BU) (JF, RU, BF) (RF, RJ, BU) (BF, RJ, UF) (FJ, BR, BU)

Puzle 3
Con seis cubos, el puzle llamado Bewitching cubes aparece publicado en el libro de Wei Zhang (1996) (LG, RY, BO)(YL, RB, GO) (BG, YL, RO) (RL, OB, YG) (RB, OY, GL) (RO, YG, BL))

Hay una cita de Leibniz, que casi siempre que se habla de juegos y matemáticas se saca a colación: «Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos. El espíritu se encuentra ahí a sus anchas… »[8]. Y es que los juegos y las matemáticas siempre han guardado una estrecha relación. Incluso podemos recordar que un *juego* o acertijo, el de los puentes de Königsberg, en manos del genial Euler dio lugar a la teoría de grafos. Desde entonces, la teoría de grafos se ha usado una y otra vez en la resolución de otros juegos que nada tienen que ver con el que resolvió Euler. Parece que esta teoría quiere rendir homenaje a los juegos y pasatiempos que la hicieron nacer.

Solución de Instant Insanity

La figura 10 contiene los tres subgrafos cíclicos del grafo de Instant Insanity (que aparece en la figura 5) que cumplen las propiedades requeridas a las posibles soluciones:



Subgrafo 1 Subgrafo2 Subgrafo 3

Figura 10

El subgrafo 1 no es disjunto de ninguno de los otros dos grafos, por lo tanto no sirve para la solución.

La solución se obtiene orientando los subgrafos 2 y 3 y colocando los cubos según esos ciclos.

Referencias Bibliográficas

Basart, J. M., y P. Guitart (1999), «A solution for the coloured cubes problem», *Theoretical Computer Science*, n.º 225, 171-176.

Brown, T. A. (1968), «A note on Instant Insanity», *Mathematics Magazine*, n.º 41, 167-169.

Carteblanche, F. de (1947), «The colour cubes problem», *Eureka*, n.º 9, 9-11.

Grecos, A. P., y R. W. Gibberd (1971), «A diagrammatic solution to Instant Insanity problem», *Mathematics Magazine*, n.º 44, 119-124.

Grupo Alquerque, (2002), «El puzzle de los cubos de colores», *Suma*, n.º41, 121-123.

Harary (1977), «On The Tantalizer and Instant Insanity», *Historia Mathematica,* n.º4, 205-206.

O'Beirne, T. H. (1957) «Coloured Cubes: A new Tantalizer», *Mathematical Gazette*, n.º 338, 292-293.

— (1961), « Plus ça change-: or the Great Tantalizer», *New Scientist*, n.º 247, 358-359.

— (1961a), «How to make chains with patterns on cubes», *New Scientist*, n.º 249, 486-487.

Zhang, W. (1996), *Exploring Math Through Puzzles*, Key Curriculum Press, California.

Referencias Web

<http://www.robspuzzlepage.com/pattern.htm#insanity> [Gran colección de puzles de este tipo con algunas soluciones y análisis].

<http://ordoglakat.blog.hu/2013/05/20/az_orulet_fokozodik_755> [Blog de Gál Péter donde analiza este puzle, otros objetivos y variaciones del mismo.]

<https://culturacientifica.com/2015/04/22/blanche-descartes-y-la-cuadratura-del-cuadrado/> [Información sobre la identidad de Carteblanche].

Francisco Molina López.
IESO Vía Heraclea, Balazote (Albacete)
<fco-molina@hotmail.com>

1 Aunque he intentado buscar el mencionado artículo original de Carteblanche, solo he podido saber de su contenido por las referencias que hacen en varias publicaciones posteriores autores como O'Beirne (1957), O'Beirne (1961) o Harary (1977).

2 Información consultada en <culturacientifica.com/2015/04/22/blanche-descartes-y-la-cuadratura-del-cuadrado/> de Raúl Ibáñez.

3 He mantenido el uso de iniciales en inglés para evitar la confusión de los colores azul y amarillo.

4 La forma recurrente de calcular n_4 podíamos haberla evitado usando algunas propiedades combinatorias y la fórmula:

$$n_4 = \binom{4}{4}N_4 - \binom{4}{3}N_3 + \binom{4}{2}N_2 - \binom{4}{1}N_1$$

aunque el método anterior es más descriptivo y fácil de comprender.

5 Dejamos al lector el placer de descubrir cuáles son esos 16 y 36 cubos.

6 El blog está en húngaro y el traductor no funciona tan bien como para entenderlo completamente. Agradezco a Gál Péter su amabilidad al mandarme una traducción al inglés donde pude entender mejor sus resultados.

7 IPP son las siglas de la International Puzzle Party, un encuentro internacional de entusiastas, coleccionistas y diseñadores de puzles. Se asiste con invitación y algunos participantes acuden con un lote de puzles iguales para intercambiarlos con otros asistentes.

8 «Les hommes ne sont jamais plus ingènieux que dans l'invention des jeux; l'espirit s'y trouve 'a son aise...» (Carta de Leibniz a Montmort del 29 de julio de 1715).