suma+ 92
Artículos
Noviembre 2019
pp. 27-36

Evolución histórica del concepto de recta tangente

Abilio Orts Muñoz
Francisco José Boigues Planes

El análisis epistemológico permite identificar concepciones, dificultades o rupturas ligadas al desarrollo histórico de un concepto. Como una forma de explicar el contexto de enseñanza en el que el concepto de recta tangente está inmerso, nos planteamos la cuestión de cómo se ha configurado el concepto de recta tangente históricamente y cómo su evolución ha determinado la manera en que se presenta actualmente a nuestros estudiantes. Ello nos ha permitido identificar tres concepciones (euclídea, cartesiana y leibniziana).

Palabras clave: Aprendizaje matemático, Recta tangente, Análisis epistemológico.

Historical evolution of the concept of tangent line

Epistemological analysis allows to identify conceptions, difficulties or ruptures in the historical development of a concept. As a way of explaining the context of teaching of the concept of tangent line, we wonder about how this concept has configured historically and how this evolution has determined the way in which it is presented now to our students. This work allowed us to identify three conceptions (Euclidean, Cartesian and Leibnizian).

Keywords: Mathematical learning, Tangent line, Epistemological analysis.

La recta tangente es uno de los conceptos del currículo de Matemáticas de Bachillerato (RD 1105/2014). Los estudiantes acceden a este concepto en 1.º ESO desde un punto de vista geométrico ligado a la circunferencia (concepción euclídea: recta tangente como aquella que toca pero no corta a la circunferencia). Al llegar a bachillerato estudian el concepto de recta tangente a la gráfica de cualquier función desde el punto de vista del análisis matemático (concepción cartesiana: recta tangente como la recta límite de las rectas secantes). La transición desde la perspectiva geométrica a la analítica no es inmediata sino que se constituye como un obstáculo epistemológico que dificulta una adecuada comprensión del concepto de recta tangente (Orts, 2017).

Como una forma de explicar el contexto de enseñanza en el que este concepto está inmerso, nos planteamos la cuestión de cómo se ha configurado históricamente y cómo su evolución ha determinado la manera en que se presenta actualmente a nuestros estudiantes. Para abordar esta cuestión utilizamos el análisis epistemológico (Radford, 2016; D'Amore, 2008).

Artículo recibido en *Suma* en julio de 2018 y aceptado en diciembre de 2018

Análisis epistemológico

El análisis epistemológico es una herramienta útil para el análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje, identificando concepciones, dificultades o rupturas ligadas al desarrollo del concepto y que se pueden presentar en los estudiantes (Schubring, 1987). En ocasiones, las reacciones de los alumnos son similares a las encontradas en la historia de las matemáticas (Tall y Vinner, 1981) y tal correspondencia puede ser una herramienta importante para los profesores (Hausberger, 2015; Steinbring, 1998).

En este trabajo se ha seguido un marco teórico basado en la revisión de documentos históricos (fuentes primarias y secundarias). Para ello se utiliza una metodología que analiza los elementos de significado institucional histórico (Contreras y otros, 2003) del concepto de recta tangente. La revisión ha permitido identificar dos grandes corrientes en la forma de tratar la recta tangente: una que arranca en Arquímedes y a través de Roberval y Torricelli llega a Newton, y otra que partiendo de Euclides y Apolonio lleva a Descartes y Fermat y desemboca en Leibniz.

En la época griega, las aportaciones de Euclides y Apolonio, por una parte, y de Arquímedes, por otra, son radicalmente diferentes y van a marcar las dos tendencias que los posteriores autores van a seguir. Arquímedes piensa en la recta tangente como la dirección instantánea del movimiento que sigue la función. En cambio, Euclides y Apolonio la conciben como la recta de mínimo contacto (toca pero no corta). Esta vertiente desembocaría en la concepción de Descartes, Fermat, Barrow y Leibniz, como límite de rectas secantes (Boyer, 1986).

Esta segunda corriente es la que aparece en los libros de texto y, por tanto, la que aprenden nuestros estudiantes. Hay un corte entre la concepción euclídea, donde la recta tangente es la recta que toca pero no corta a la cónica (introducida en ESO) y la posterior concepción cartesiana, donde la recta tangente es considerada como el límite de las rectas secantes a una función en el punto considerado (introducida en Bachillerato). Son, por tanto, las dos concepciones dominantes que se pueden observar en los alumnos. Este salto histórico también se reproduce entre los estudiantes. Es importante destacar también una tercera concepción. Se trata de la forma que tiene Leibniz de concebir una curva como formada por infinitos segmentos. Al prolongar el segmento en el que se encuentra el punto de tangencia obtenemos la recta tangente (Durán, 1996).

Hemos considerado adecuado dividir la evolución del concepto de recta tangente en cuatro etapas. En la primera consideramos las aportaciones de tres matemáticos griegos clásicos, Euclides, Arquímedes y Apolonio; en la segunda las contribuciones de los predecesores a la etapa del cálculo; en la tercera incluimos los trabajos de los fundadores del cálculo, Newton y Leibniz; y en la última nos centramos en tres libros de texto significativos que nos permiten observar cómo ha llegado hasta nosotros desde los siglos XVIII y XIX.

1.ª Etapa: Euclides (325-265 a. C.), Arquímedes (287-212 a.C.) y Apolonio (262-190 a.C.)

Los primeros vestigios de lo que conocemos como recta tangente se remontan a la época griega. Sobresalen tres matemáticos: Euclides, Arquímedes y Apolonio. Euclides define, en el tercer libro de los *Elementos*, la recta tangente a un círculo como aquella que tocando al círculo y siendo prolongada, no corta el círculo (def. 2). En esta misma línea, Apolonio, autor de la obra *Cónicas*, propone un concepto de recta tangente como la recta que toca a una cónica en un único punto P y tal que no es posible trazar otra recta pasando por P e incluida entre ambas (recta tangente y cónica), es decir, la línea recta de contacto más cercano.

Esta definición ya aparecía como proposición 16 en el tercer libro de los *Elementos*:

> La (recta) trazada por el extremo del diámetro de un círculo formando ángulos rectos (con el mismo) caerá fuera del círculo y no se interpondrá otra recta en el espacio entre la recta y la circunferencia; y el ángulo del semicírculo es mayor y el restante menor que cualquier ángulo rectilíneo agudo.

En la proposición 17 explica el método de construcción de la tangente a un círculo (figura 1): «Desde un punto dado trazar una línea recta tan-

gente a un círculo dado». El método de construcción es el siguiente:

> Sea el punto *A* y el círculo *BΓΔ*. Así pues, hay que trazar desde el punto *A* una línea recta tangente al círculo *BΓΔ*.
>
> Tómese, pues, el centro del círculo, *E*, y trácese *AE* y con el centro *E* y la distancia *EA* descríbase el círculo *AZH* y a partir del (punto) *Δ* trácese *ΔZ* formando ángulos rectos con *EA* y trácese *EZ*, *AB*.
>
> Digo que ha sido trazada *AB* desde el punto *A* tangente al círculo *BΓΔ*.

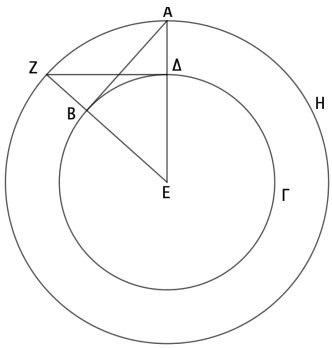


Figura 1. Método de Euclides para el trazado de la recta tangente a un círculo (Euclides, 1991)

Arquímedes calcula la recta tangente a una espiral *OPR* identificando la dirección de la tangente con la dirección instantánea del movimiento. Así, considera un punto genérico de la espiral *P* sometido a dos movimientos simultáneos, uno radial uniforme de alejamiento del centro de coordenadas y otro circular de centro el mismo origen de coordenadas. Así, a partir del movimiento resultante de ambos determina la dirección instantánea del movimiento y, por tanto, la dirección de la recta tangente *PQ* a la espiral (figura 2) (Boyer, 1986).

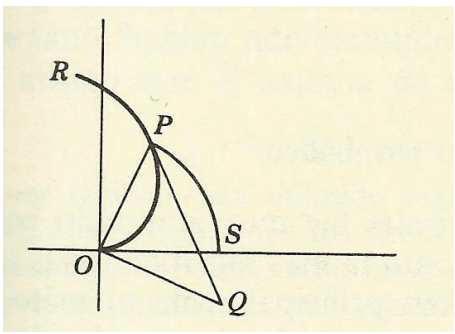


Figura 2. Método de Arquímedes para el trazado de la recta tangente a una espiral (Boyer, 1986)

Estas dos definiciones de recta tangente caracterizadas, por un lado, como la recta de mínimo contacto con la cónica, es decir, aquella recta que roza la cónica sin atravesarla, y por otro, como aquella recta que determina la dirección instantánea de movimiento, van a marcar las diferentes formas de concebir el concepto de recta tangente en los siglos posteriores.

2.ª Etapa: René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), Evangelista Torricelli (1608-1647) e Isaac Barrow (1630-1677)

Descartes plantea sustituir la definición de recta tangente como recta de contacto más cercano, pues esta era válida para las secciones cónicas estudiadas por los griegos pero resultaba problemática para el creciente número de curvas que iban apareciendo en el siglo XVII. Así, propone una declaración equivalente a la afirmación de que la tangente es la posición límite de la secante. Fermat adopta también esta definición.

Descartes reduce el problema de determinación de la tangente a una curva a la construcción de una tangente a un círculo. Utiliza un método algebraico para evitar recurrir al concepto de límite. Así, en primer lugar, halla la ecuación de una circunferencia con centro en el eje de coordenadas y que pasa por dos puntos *P* y *Q*, donde *P* es el punto de tangencia y *Q* un punto variable sobre la curva. A continuación, iguala a cero el discriminante de la ecuación que determina las intersecciones de la circunferencia con la curva, obteniendo el centro de la circunferencia tal que *Q* coincide con *P*. La tangente a la circunferencia en ese punto será la tangente a la curva (el método para determinar tangentes a circunferencias era conocido desde la época griega). Se trata de un método algebraico que evita el uso de cantidades infinitesimales que tantos problemas planteaban en esta época. En cambio, este procedimiento, que solo era aplicable a funciones definidas mediante un polinomio sencillo, no era tan fácil de aplicar como el de Fermat (Boyer, 1986).

Fermat propone un método para obtener máximos y mínimos muy similar al empleado ac-

tualmente, aunque, claro está, sin la incorporación del concepto de límite. En esencia, dicho método se basa en la convicción de que en un punto máximo o mínimo la diferencia entre $f(x)$ y $f(x+E)$ es muy pequeña cuando la longitud de E es casi nula. Así, Fermat iguala las expresiones de las imágenes de la función en ambos puntos, divide por E y luego sustituye E por cero (Rey Pastor y Babini, 1997).

A continuación, Fermat utiliza su método para obtener máximos y mínimos al cálculo de la recta tangente (Kline, 1992). Sea PT la tangente buscada a la curva por el punto P. Llamamos subtangente a la longitud TQ (figura 3). Fermat obtiene dicha subtangente a partir de la cual se obtiene T y TP.

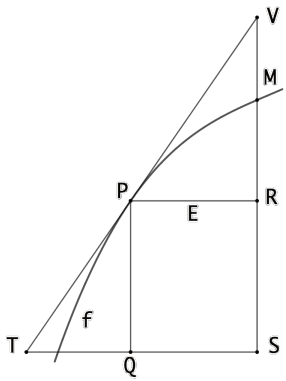


Figura 3. Método de Fermat para el cálculo de la recta tangente (Kline, 1992)

Sea QS un incremento de longitud E del segmento TQ. Entonces, por semejanza de triángulos ($TPQ \approx PRV$) se cumple:

$$\frac{TQ}{PQ} = \frac{E}{VR}$$

Pero VR es prácticamente MR (al ser E pequeño el punto sobre la tangente estará aproximadamente sobre la curva), por lo que:

$$VR \approx MR = MS - RS = MS - PQ$$

$$\frac{TQ}{PQ} = \frac{E}{MS - PQ}$$

Si llamamos $f(x)$, como en nuestra notación moderna, a PQ:

$$\frac{TQ}{PQ} = \frac{E}{f(x+E) - f(x)}$$

Y despejando:

$$TQ = \frac{E\, f(x)}{f(x+E) - f(x)}$$

Por último, Fermat divide numerador y denominador por E y, haciendo $E = 0$, obtenemos la subtangente TQ que determina unívocamente, junto con el punto P, la tangente buscada. En esencia, lo que obtiene Fermat es una expresión equivalente (sin el concepto de límite) a nuestra actual:

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

Sin embargo, este procedimiento obtenido por Fermat solo lo podía aplicar a curvas del tipo $y = x^n$.

En 1638, Roberval, Fermat y Descartes obtuvieron la tangente de la cicloide (Durán, 1996). Cada uno utilizó un procedimiento diferente: Descartes su método geométrico, Fermat el suyo, mucho más analítico. Roberval (1602-1675), en cambio, define la recta tangente en un punto como la dirección del movimiento (compuesto por uno de rotación y otro de traslación de idéntica velocidad) que en ese instante tiene un punto que está describiendo la curva, definición que recuerda a la expresada por Arquímedes para la determinación de la tangente de la espiral. Unos años más tarde, Torricelli publicó también sus resultados siguiendo un método similar al de Roberval. Torricelli considera que un punto P de la cicloide está sujeto a un movimiento de traslación horizontal en la dirección PS y a otro de rotación alrededor del centro O de la circunferencia generatriz, por tanto, en la dirección PR tangente a la circunferencia generatriz, cuando esta gira sobre la recta AB (figura 4). Puesto que ambos

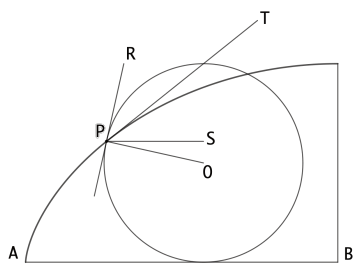


Figura 4. Método de Torricelli para el cálculo de la recta tangente (Ausejo, 1992)

movimientos son iguales, se tiene que la bisectriz *PT* del ángulo *SPR* es la tangente a la cicloide en *P* (Ausejo, 1992). Este método era aplicable a funciones del tipo $y = x^n$.

Posteriormente Barrow, cuyo método sería seguido por Newton y Leibniz, considera una curva como el límite de un polígono cuyos lados son infinitamente pequeños, y afirma que el lado del polígono infinitamente pequeño se convierte, en el límite, en la tangente a la curva. Los resultados son coincidentes con las definiciones de Roberval y Barrow, pero la controversia en cuanto a qué definición era la correcta fue intensa. Continuando con el estudio de las tangentes, Pascal (1623-1662) se interesó también por la cicloide y obtuvo, además, la construcción de la tangente a una cónica deduciéndolas de lo que hoy se conoce como teorema de Pascal. A él también se debe la utilización del triángulo característico o diferencial, usado tanto para el cálculo de tangentes como de cuadraturas y que posteriormente sería utilizado por Leibniz. De hecho, es precisamente este trabajo de Pascal el que inspira a Leibniz para darse cuenta de la relación inversa existente entre los problemas de tangentes y los de cuadraturas.

En 1652, Sluse (1622-1685) obtuvo un método para determinar la recta tangente a una curva dada por una ecuación de la forma $f(x, y) = 0$, donde f es un polinomio (Boyer, 1986). Este procedimiento se basaba en la determinación de la subtangente como el cociente obtenido situando en el numerador los términos del polinomio $f(x, y)$ que contengan la variable y, cada uno de ellos multiplicado por el exponente de la potencia de y, y en el denominador los términos en los que aparece la variable x, multiplicado cada uno de ellos por el exponente de x y divididos todos ellos por x. (Equivalente a nuestro actual $y \cdot f_y/f_x$). Se puede reconocer en este proceder la influencia del método de Roberval y Torricelli.

Barrow propone un método geométrico, basado en el triángulo característico, y para ello utiliza dos cantidades infinitesimales (e, a) en lugar de una única como hacía Fermat (E). Este procedimiento, que generaliza el de Fermat, es prácticamente idéntico al que se utiliza en nuestro cálculo diferencial salvo en la notación empleada. Este método es válido para funciones del tipo $f(x, y) = 0$, donde f es un polinomio. Barrow considera el triángulo formado por un segmento de la recta tangente (hipotenusa) y dos longitudes infinitamente pequeñas e y a (catetos). Puesto que estas longitudes son infinitamente pequeñas podemos considerar, por aproximación, que el punto $(x - e, y - a)$, que está sobre la recta tangente, también lo está sobre la curva, por lo que se cumplirá la ecuación siguiente:

$$f(x-e, y-a) = f(x, y) = 0$$

En esta ecuación se pueden simplificar todos los términos en los que no aparezca alguna potencia de e o a. A continuación, Barrow elimina las potencias de e y a de exponente mayor que uno y los productos de ambos factores infinitamente pequeños (por ser despreciables frente a e y a). Así, únicamente quedan términos que dependen de e y a. De esta expresión podemos despejar el cociente a/e que, por construcción, es la pendiente de la recta tangente (figura 5). Y de esta forma queda determinada la recta (Durán, 1996).

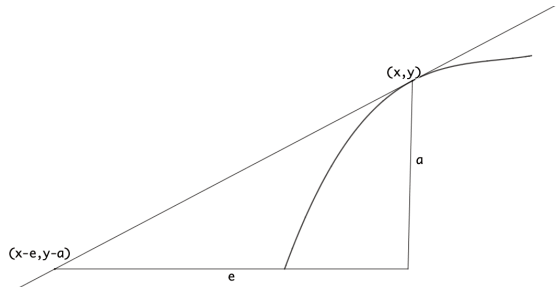


Figura 5. Método de Barrow para el cálculo de la recta tangente (Durán, 1996)

3.ª Etapa: Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716)

Newton y Leibniz son considerados los fundadores del cálculo diferencial. Varias son las razones que podemos apuntar. Siguiendo a Durán (1986), las principales aportaciones son:

— Frente a los razonamientos particulares de los matemáticos anteriores, Newton y Leibniz desarrollan un método general para el cálculo de la variación de una variable con respecto al tiempo (Newton) o

la diferencial de una variable (Leibniz). Con ello, crearon una teoría general, aplicable a todas las funciones tanto algebraicas como trascendentes (Boyer, 1986), donde tenían cabida los problemas de tangentes, los de máximos y mínimos, etc.

— El reconocimiento claro y contundente de que los problemas de tangentes y cuadraturas son recíprocos. Además, dotaron de mayor contenido analítico y generalidad a los resultados parciales que había presentado Barrow.

La primera obra de Newton dedicada al cálculo es *De analysi per aequations numero terminorum infinitas* (1669) en la que presenta un método de diferenciación similar al de Barrow, sustituyendo la *a* y la *e* de este por *po* y *qo*, donde *o* representa un intervalo de tiempo muy pequeño y *po* y *qo* representan incrementos pequeños que experimentan x e y durante dicho intervalo. El cociente q/p simboliza la razón entre las velocidades instantáneas del cambio de las variables y y x, es decir, la pendiente de la curva $f(x, y) = 0$ (Boyer, 1986). Más adelante, al trabajar con una función explícita $y = f(x)$, utiliza únicamente o como un incremento pequeño de x. También en esta obra aparece el método de Newton para resolver ecuaciones de manera aproximada utilizando la recta tangente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Posteriormente, en su obra *De Methodis serierum et fluxionum* (1671), Newton introduce los conceptos de *fluente* (variable función del tiempo) y *fluxión* de la fluente (derivada de la variable respecto al tiempo). A partir de ellos, y con ayuda del desarrollo en serie de potencias y de sus incrementos evanescentes, presenta un método general que le permite resolver problemas de tangentes, así como de máximos y mínimos o cuadraturas (Rey Pastor y Babini, 1997).

Newton tiene una concepción dinámica de las curvas, como si fueran generadas por un movimiento. Por su parte, Leibniz considera las curvas como si estuvieran formadas por segmentos indivisibles de longitud infinitesimal. De esta manera, al prolongar dichos segmentos, se obtienen las rectas tangentes. Tras estudiar la obra de Pascal, Leibniz es consciente de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias. Leibniz trabajaba en términos de incrementos pequeños dx y dy de las cantidades x e y, y utilizaba su razón para determinar la tasa de cambio de y como función de x:

$$dy = f(x+dx) - f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

que es la pendiente de la recta tangente (el cociente de los catetos del triángulo característico de Pascal se convierte en la pendiente de la recta tangente).

Leibniz publica en 1684 sus resultados en la revista *Acta Eruditorum* con el título «Un nuevo método para máximos y mínimos, y también para tangentes, que no se ve obstruido por las cantidades fraccionarias ni por las irracionales». Paralelamente al desarrollo de su método, Leibniz introduce una acertada notación, tanto que, en esencia, seguimos utilizándola actualmente.

Las teorías de Newton y Leibniz difieren claramente en su misma concepción. Para Newton una curva es generada por el movimiento de un punto y su fluxión es la variación en el fluir de dicha curva. Para Leibniz una curva es entendida como una poligonal de lados infinitesimales y la diferencial es el cociente de los catetos en el triángulo característico asociado en cada segmento de la curva. Así, en la teoría de Newton juega un papel fundamental la idea de límite (cantidades evanescentes que se van desvaneciendo) y en la de Leibniz lo hacen las cantidades infinitesimales que no es posible eliminar usando el concepto de límite. De hecho, Leibniz trata la idea de curva como una cantidad infinitesimal. En este sentido, Leibniz estudia el orden y la magnitud de estas cantidades infinitesimales (Durán, 1996).

4.ª Etapa: Siguiendo el rastro hasta la actualidad (L'Hôpital (1661-1704), Bézout (1730-1783), Lacroix (1765-1843)

Por último, revisamos tres textos relevantes que nos permiten seguir la pista de cómo se ha ido transmitiendo el concepto de recta tangente hasta

llegar a la actualidad. Se trata de tres libros de influencia capital en la elaboración de los manuales de texto posteriores. Estos libros son:

— *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas* del marqués de L'Hôpital, escrito en 1696.
— *Primeros Principios de Cálculo Diferencial e Integral, o Doctrina de Fluxiones* de Bézout, escrito en 1768.
— *Tratado Elemental de Cálculo Diferencial e Integral* de Lacroix, escrito en 1802.

El *Análisis de los infinitamente pequeños* del marqués de L'Hôpital es el primer libro de texto publicado sobre Análisis. Comienza L'Hôpital dando la diferencia entre el análisis ordinario, que trata de las magnitudes finitas y el que se va a presentar en esta obra que

> [...] penetra hasta el infinito mismo. Compara las diferencias infinitamente pequeñas de las magnitudes finitas, descubre las razones de estas diferencias [...]. Solo un análisis de esta naturaleza podría conducirnos hasta los verdaderos principios de las líneas curvas. Pues las curvas, al ser poligonales de una infinidad de lados, y al diferir entre ellas solo por la diferencia de los ángulos que estos infinitamente pequeños lados forman [...]

Ya en el inicio del prefacio podemos encontrar la concepción leibniziana (una curva considerada como la unión de infinitos segmentos infinitesimales). Unas líneas después, incide en este aspecto destacando que los polígonos inscritos o circunscritos, por la multiplicación infinita de sus lados, se confunden con las curvas.

A continuación, realiza una sucinta descripción de los métodos utilizados por Descartes, Fermat o Barrow en los que, según L'Hôpital, se va ganando en sencillez. Tras nombrar a Pascal, cita a Fermat y Barrow y su método de cálculo de tangentes basado en el triángulo característico. Por último, se ocupa de las aportaciones de Leibniz (su método de cálculo permitió avanzar en el método de Barrow) y los Bernouilli como los matemáticos más hábiles de Europa.

La sección donde trata la recta tangente es la segunda: «Donde se hace uso del cálculo de diferencias para encontrar las tangentes de todo tipo de líneas curvas» (figura 6).

La sección 2 comienza con la definición de recta tangente (figura 7):

> Si se prolonga uno de los pequeños segmentos *Mm* del polígono que compone la línea curva, ese pequeño segmento será llamado la Tangente de la curva en el punto *M* o *m*.

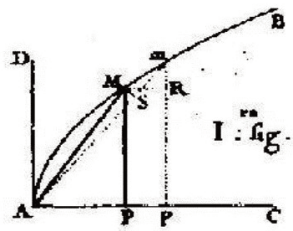
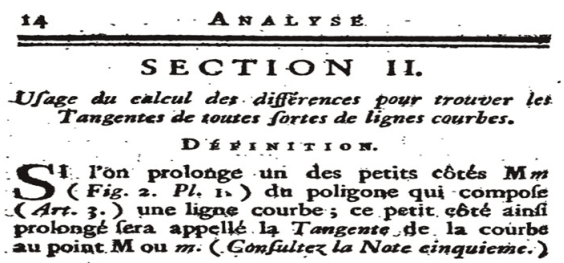


Figura 7. Interpretación gráfica de la definición de recta tangente (L'Hôpital, 1696)

Para L'Hôpital, las ordenadas *PM* y *pm* están infinitamente cerca la una de la otra y la recta tangente a la curva dada en el punto *M* se define como la prolongación del segmento infinitésimo *Mm*.

En la nota V a la que hace referencia la definición se hace un repaso de las cónicas. Completan esta segunda sección 16 proposiciones en forma de problema en las que se explica cómo obtener la recta tangente a una curva en diferentes situaciones.

El segundo libro analizado es *Primeros Principios de Cálculo Diferencial e Integral, o Doctrina de Fluxiones* de Bézout, escrito en 1768. Bézout define la recta tangente a una curva a partir de la concepción leibniziana (figura 8):


14 ANALYSE.

SECTION II.

Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.

DÉFINITION.

Si l'on prolonge un des petits côtés *Mm* (*Fig.* 2. *Pl.* 1.) du polygone qui compose (*Art.* 3.) une ligne courbe; ce petit côté ainsi prolongé sera appellé la *Tangente* de la courbe au point M ou *m*. (*Consultez la Note cinquieme.*)

Figura 6. Definición de recta tangente (L'Hôpital, 1696)

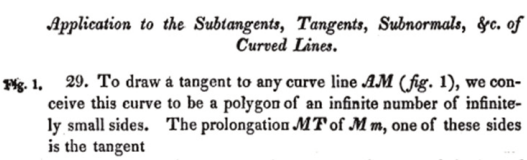

Application to the Subtangents, Tangents, Subnormals, &c. of Curved Lines.

Fig. 1. 29. To draw a tangent to any curve line *AM* (*fig.* 1), we conceive this curve to be a polygon of an infinite number of infinitely small sides. The prolongation *MT* of *M m*, one of these sides is the tangent

Figura 8. Definición de recta tangente (Bézout, 1824)

El último de los tres textos que consideramos es el *Tratado Elemental de Cálculo Diferencial e Integral* de Lacroix escrito en 1802. En dicho texto se compilan los resultados obtenidos por Euler, Lagrange, Monge o Laplace, entre otros. Lacroix es considerado por Schubring (1987) como el autor que contribuyó más decisivamente a las matemáticas escolares en Francia, además de ser el modelo de referencia para los autores españoles relevantes del siglo XIX y primera mitad del XX. El estudio de la recta tangente se aborda en el apartado «Aplicaciones del Cálculo diferencial a la teoría de curvas». El concepto de límite pasa a desempeñar un lugar central sustituyendo aquellos que hasta ese momento se utilizaban de forma poco rigurosa (incrementos evanescentes, cantidades infinitamente pequeñas, etc.). Así, en este texto aparece la concepción cartesiana (que usa la noción de límite) para definir la recta tangente en lugar de la concepción leibniziana utilizada hasta ahora (figura 9).

75. La tangente d'une courbe étant la limite de toutes les droites qui rencontrent cette courbe en deux points,

Figura 9. Definición de recta tangente (Lacroix, 1802)

Análogamente, la definición de recta tangente que aparece en los manuales actuales es la que usa la concepción cartesiana (Spivak, 1992; Apostol, 1984) (figura 10).

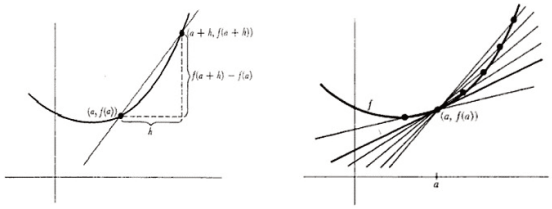


Figura 10. Concepción cartesiana para definir la recta tangente (Spivak, 1992)

La recta tangente en los textos españoles

En España los *Principios de Matemáticas* de 1778 de Bails reproducen la misma definición de Bézout (figura 11).

Aplicacion del cálculo diferencial á la doctrina de las líneas curvas.

664 Indagarémos primero como se ha de tirar una tangente á una curva qualquiera, dada que sea su equacion; esto nos dará á conocer el ángulo que la curva forma en el punto de contacto con su ordenada, ó con el exe de las abscisas, y por consiguiente ácia que lado es convexá ó cóncava.

Para tirar una tangente á una linea curva *AM*, se la considera como un polígono de una infinidad de lados infinitamente pequeños; la prolongacion *MT* de uno de sus lados *Mm* será su tangente, y la determinarémos respecto de cada punto *M* con calcular el valor de la subtangente *PT*, ó de la porcion de la linea en la qual se cuentan las abscisas, que coge desde la ordenada *PM* hasta el punto *T* de la tangente.

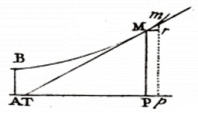


Figura 11. Definición de recta tangente (Bails, 1778)

Posteriormente, el *Tratado Elemental de Matemáticas* de 1832 de Vallejo introduce la definición de Lacroix (figura 12):

582 Las consideraciones geométricas prueban de un modo muy exacto que la relacion de los incrementos de una funcion y de su variable es en general susceptible de límites.

Toda funcion de una sola variable se puede representar por la ordenada de una curva, de la que esta variable es la abscisa; porque si vamos dando valores particulares á la abscisa, y tomamos estas partes á lo largo de una línea, y en los estremos se levantan líneas paralelas entre sí, de la magnitud que esprese la funcion en cada caso, tendrémos construida una curva, cuya ecuacion sea la igualacion de la funcion propuesta con una variable; ahora, la relacion de la ordenada de la curva con su subtangente corresponde al primer coeficiente diferencial de la funcion. En efecto, si en una curva GD (fig. 179) se tira por dos puntos M y M' una secante MM' prolongada hasta que encuentre en S al eje AB de las abscisas, se bajan despues las ordenadas PM, P'M', y se tira la recta MQ paralela con AB, los triángulos MQM' y PMS serán semejantes (I 485 cor. 2.°), y darán

$$PM:PS::M'Q:MQ;\ \text{de donde}\ \frac{PS}{PM}=\frac{MQ}{M'Q}=\frac{\Delta x}{\Delta z};$$

y pasando á los límites, se tendrá *límite* de $\frac{PS}{PM}$ = *límite* de $\frac{\Delta x}{\Delta z}$; pero el límite del primer miembro es $\frac{PT}{PM}=\frac{subt.}{z}$, porque á medida que el punto M' se aproxima al punto M, se acerca S á T, y por consiguiente la *subsecante* PS á la *subtangente* PT; y como el límite del segundo miembro es $\frac{dx}{dz}$, será $\frac{subt.}{z}=\frac{dx}{dz}$ ó $subt.=\frac{dx}{dz}\times z$, que es la fórmula general que determina la subtangente de una curva cualquiera; y nos dice que *debemos hallar el valor del coeficiente diferencial* $\frac{dx}{dz}$ *de la abscisa con relacion á la ordenada, multiplicarle por el valor de la ordenada, y este será el valor de la subtangente.*

Figura 12. Definición de recta tangente (Vallejo, 1832)

De igual modo, los libros de texto que utilizan los estudiantes de Bachillerato del sistema educativo español presentan la recta tangente a través de la concepción cartesiana (Orts, 2017) (figura 13).

Es decir, en la cuarta etapa hemos mostrado cómo los primeros textos presentaban la recta tangente mediante la concepción de Leibniz. Así, los trabajos de L'Hôpital y Bézout, y por tanto

en España el de Bails que reproduce el texto de este último, usan esta definición leibniziana para introducir el concepto de recta tangente. Sin embargo, y con la intención de ser más riguroso, en el texto de Lacroix, y por tanto en el libro de Vallejo que reproduce el de Lacroix, se opta por sustituir la definición leibniziana por la utilizada por Descartes y así, los estudiantes españoles desde este momento estudian el concepto de recta tangente a partir de la concepción cartesiana.

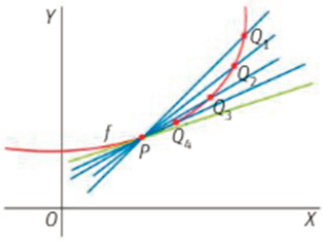


Figura 13. Ejemplo de uso de la concepción cartesiana en libros de texto (Matemáticas I, SM)

Implicaciones para la enseñanza

Del estudio histórico nos interesa remarcar dos aspectos:

Por un lado, el análisis epistemológico ha permitido identificar tres maneras diferentes de concebir el concepto de recta tangente a lo largo de la historia:

- Concepción euclídea: la recta tangente como aquella que toca, pero no corta a una cónica.
- Concepción cartesiana: la recta tangente como el límite de las rectas secantes.
- Concepción leibniziana: toda función está formada por segmentos infinitesimales; al prolongar el segmento en el que se encuentra el punto de tangencia obtenemos la recta tangente.

Por otro lado, se ha identificado una evolución significativa de estas concepciones en la utilización en los manuales escolares. Los primeros textos (L'Hôpital, Bézout) definían la recta tangente a partir de la concepción leibniziana. En España los textos reproducían esta definición como hemos visto, por ejemplo, en el texto de Bails. A partir del siglo XIX, con la búsqueda del rigor matemático en los libros de texto y la consiguiente introducción de la formalización matemática en los manuales, la concepción leibniziana es sustituida por la concepción cartesiana. Y así, a partir del texto de Lacroix, de gran influencia tanto en España como en gran parte de Europa, se produce un cambio radical y, desde este momento hasta la actualidad, los estudiantes de Bachillerato acceden al concepto de recta tangente como un proceso de aproximación al límite siguiendo la concepción cartesiana. En cambio, en la ESO, los libros de texto definen la recta tangente como aquella que corta a la circunferencia en un solo punto (concepción euclídea), matizando la idea del mínimo contacto pero obviando que es la recta que más se ajusta a la circunferencia.

En Orts (2017) hemos mostrado cómo introducir el concepto de recta tangente a la gráfica de una función a través de la concepción leibniziana (usando la idea de linealidad local de una función en el entorno de un punto con la ayuda de asistentes matemáticos como GeoGebra), como hacían los primeros textos, puede ayudar a desarrollar una comprensión más adecuada del concepto de recta tangente.

Referencias bibliográficas

Apostol, T. (1984), *Calculus*, Reverté, Barcelona.

Ausejo, E. (1992), *Las matemáticas en el siglo XVII*, Akal, Madrid.

Bails, B. (1788), *Principios de Matemáticas* (3.ª Edición, Vol. 2), Madrid.

Bézout (1824), *First principles of the differential and integral calculus, or The doctrine of fluxions*, Hilliard & Metcalf, Cambridge.

Boyer, C. (1986), *Historia de la matemática*, Alianza, Madrid.

Contreras, A., L. Ordóñez, L. Luque, M. García, C. Sánchez y M. Ortega (2003), *Análisis de manuales de primero y segundo de Bachillerato-LOGSE en institutos de educación secundaria de la provincia de Jaén, en cuanto a los conceptos básicos de Cálculo infinitesimal derivada e integral*, Proyecto de investigación del Instituto de Estudios Giennenses, Jaén.

D'Amore, B. (2008), «Epistemology, didactics of ma–thematics and teaching practices», *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, n.º 7(1), 1-22.

Durán, A. (1996), *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza, Madrid.

Euclides (1991), *Elementos*, Gredos, Madrid.

Hausberger, T. (2015), «Training teacher students to use history and epistemology tools: theory and practice on the basis of experiments conducted at Montpellier University», *Proceedings of the 7th European Summer University*, Aarhus University, Copenhague.

Kline, M. (1992), *El pensamiento matemático: Desde la Antigüedad a nuestros días*, Alianza, Madrid.

Lacroix, S. F. (1802), *Traité élémentaire de calcul différentiel et calcul intégral*, Duprat, Paris.

L'Hôpital, Marquis de (1696), *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Imprimerie Royale, Paris.

Orts, A. (2017), *Características del aprendizaje de la recta tangente. Identificación de trayectorias de aprendizaje en un experimento de enseñanza*, Tesis doctoral. Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante.

Radford, L. (2016), «Epistemology as a research category in mathematics teaching and learning», en B. Hodgson, A. Kuzniak, y J. Lagrange (eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues*, Springer, Suiza, 31-41.

Rey Pastor, J., y J. Babini (1997), *Historia de la Matemática*, Gedisa, Barcelona.

Schubring, G. (1987), «On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Autor», *For the Learning of Mathematics*, n.º 7(3), 41-51.

Spivak, M. (1992), Calculus, Reverté, Barcelona.

Steinbring, H. (1998), «Elements of Epistemological Knowledge for Mathematics Teachers», *Journal of Mathematics Teacher Education*, n.º 1(2), 157-189.

Tall, D. O., y S. Vinner (1981), «Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity», *Educational Studies in Mathematics*, n.º 12(2), 151-169.

Vallejo, J. (1832), *Tratado Elemental de Matemáticas* (2.ª Edición, Vol. 2), Madrid.

Vizmanos, J., J. Hernández y F. Alcaide (2015), *Matemáticas I*, SM, Madrid.

Abilio Orts Muñoz
IES Tavernes Blanques, Tavernes Blanques (Valencia)
<abilioorts@gmail.com>

Francisco José Boigues Planes
Universidad Politécnica de Valencia
<fraboipl@mat.upv.es>