suma+ 92
Artículos
Noviembre 2019
pp. 37-45

Matemáticas con un teléfono móvil, un láser y una canica

Máximo Gómez Flórez

Presentamos tres actividades sencillas, que podemos incluir en nuestras clases de matemáticas para trabajar y desarrollar una gran variedad de temas, como por ejemplo, ecuaciones y sistemas de ecuaciones, geometría y trigonometría, error relativo y absoluto, la función parabólica, inecuaciones, derivadas, problemas de optimización, estadística, probabilidad…

El teléfono móvil es el denominador común de las tres actividades, se utiliza como instrumento de medida, y a la vez, para atraer y motivar al alumno en la resolución de problemas.

Palabras clave: Experiencia de aula, Trigonometría, Geometría, Medidas indirectas, Errores.

Mathematics with a mobile phone, a laser and a marble

We present three easy activities that we can include in our math classes to work and develop a variety of topics such as equations and systems of equations, geometry and trigonometry, relative and absolute error, parabolic function, inequations, derivatives, optimization problems, statistics, probability…

The mobile phone is the common denominator of the three activities, it is used as an instrument of measurement and at the same time to attract and motivate the student in solving problems.

Keywords: Classroom experience, Trigonometry, Geometry, Indirect measures, Errors.

En este artículo proponemos tres ejercicios en los que los alumnos trabajarán en grupos, con la ayuda de un teléfono móvil, para medir una distancia o calcular el ángulo óptimo, para acertar a un determinado blanco. En la actualidad, existe una gran variedad de aplicaciones que utilizan los sensores del teléfono móvil para medir distancias, ángulos, aceleraciones… y que podemos incorporar fácilmente a nuestras clases como una herramienta más, para que nuestros alumnos investiguen, trabajen y resuelvan problemas en los que, de forma directa o indirecta, se utilizan estas medidas.

Ejercicio I
Medir una distancia x utilizando como referencia la altura de la pizarra.

Esta primera actividad es muy sencilla, básicamente está diseñada para que los alumnos aprendan a manejar los materiales y la *app* del móvil. Consiste en calcular una distancia utilizando una longitud de referencia. Necesitaremos una *app* instalada en el móvil, que nos permita medir ángulos, un láser y una base de madera o un libro de pasta dura donde colocaremos el mó-

Artículo recibido en *Suma* en julio de 2018 y aceptado en diciembre de 2018

vil junto con el láser. Existen muchas *app* que simulan reglas, goniómetros, transportadores de ángulos, niveles…, en nuestro caso, hemos elegido una *app* sencilla y gratuita de android, que permite medir la inclinación en dos ejes, llamada Nivel (figura 1).

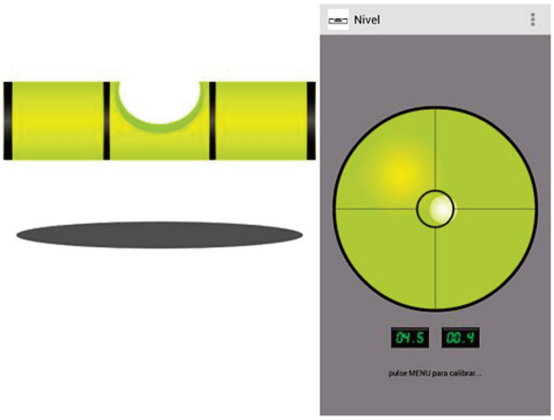

Figura 1

Los puntos de referencia se fijan utilizando el láser. Este puede ser de cualquier tipo, pero conviene que sea un puntero largo, tipo bolígrafo como el de la figura 2, para que, a grandes distancias, se conserve mejor el paralelismo entre la dirección del láser y la superficie del libro.

Figura 2

Para mantener el láser encendido mientras realizamos las medidas hemos colocado un tubo o cilindro hueco de papel, que se desplaza sobre el láser y presiona el botón de encendido. También se puede utilizar un trozo de cartón, cinta aislante o celo.

Las figuras 3 y 4 muestran respectivamente cómo debe ser el montaje de la primera actividad, y la representación simbólica de dicha actividad.

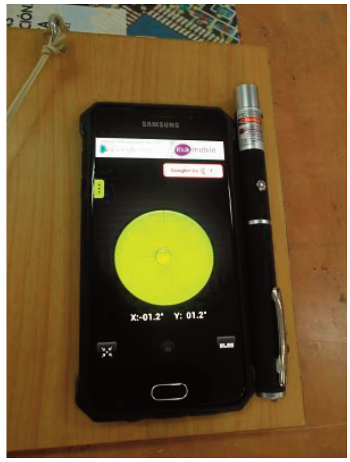

Figura 3

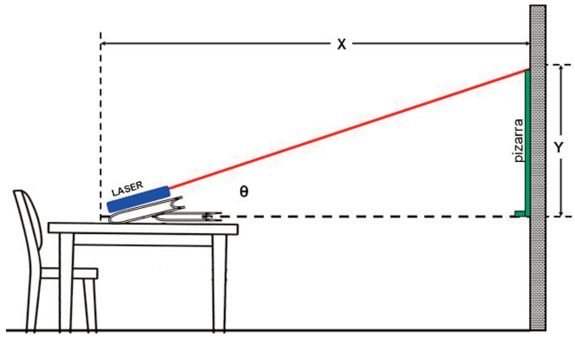

Figura 4

Para calcular x, medimos la distancia y con un flexómetro (por ejemplo, la altura de la pizarra de clase $y = 150$ cm) y con la app del móvil medimos el ángulo θ (por ejemplo, $\theta = 26{,}4^{\circ}$). Con estos datos calculamos x como:

$$x = \frac{y}{\tan\theta} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{150}{\tan 26{,}4^{\circ}} \simeq 302 \text{ cm}$$

Este ejercicio, así planteado, resulta muy sencillo y asequible para todo tipo de alumnado, y nos puede servir como introducción o entrenamiento para una segunda parte, con problemas más complejos. Esta actividad fácilmente se puede combinar o transformar en otros problemas similares basados en el teorema de Tales, triángulos semejantes… (Feiro y Martínez, 2011).

Dependiendo del curso, y del tipo de alumnado, puede ser interesante pedirles que nos respondan, con argumentos lógicos, a las siguientes preguntas: ¿es fiable este procedimiento de medida?, ¿en qué condiciones es un buen método de medida? Para responder a estas preguntas debemos tener en cuenta que nuestra medida no se calcula de forma directa, sino de una forma indirecta. Primero se miden dos magnitudes, un ángulo θ, una longitud y, y por último, se usa una fórmula para calcular la distancia x. En general, las magnitudes θ e y se miden con un cierto margen de error, que representamos por $\Delta\theta$, Δy, de tal forma que podemos suponer que los valores reales de las magnitudes θ e y están comprendidos entre los valores $\theta - \Delta\theta$, $\theta + \Delta\theta$ e $y - \Delta y$, $y + \Delta y$ respectivamente. Esta incertidumbre en el valor de las magnitudes se mantiene al calcular x por medio de una ecuación. El cálculo de errores en medidas indirectas de una magnitud depende del tipo de errores que se consideren: errores sistemáticos, aleatorios o estadísticos, de escala o del instrumento (Sánchez, 1989). En nuestro caso, únicamente hemos realizado una medida, tanto para θ como para y, por lo que solo tendremos en cuenta el error debido a la precisión del instrumento, décimas de grado para θ ($\Delta\theta = 0{,}1^\circ \simeq 0{,}002$ rad) y, en el caso del flexómetro, supondremos una precisión de medio centímetro, $\Delta y = 0{,}5$ cm. Si suponemos que las variaciones $\Delta\theta$, Δy son pequeñas frente a θ, y, la incertidumbre Δx, en el cálculo de la distancia x, se puede aproximar por medio de un desarrollo en serie de Taylor. En general, si f es una función que depende de dos o más variables independientes $x, y, z\ldots$, el error que se comete en f, debido a pequeñas variaciones o errores en sus variables independientes, se puede calcular como:

$$\Delta f \simeq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\Delta z + \ldots \quad [1]$$

Para la distancia x, obtenemos:

$$x = \frac{y}{\tan\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta} = \frac{-y}{\tan^2\theta}\left[1 + \tan^2\theta\right] = -y\left[\frac{1}{\tan^2\theta} + 1\right] = \frac{-y}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Aproximadamente:

$$\Delta x \simeq \left|\frac{1}{\tan\theta}\right|\Delta y + \left|\frac{-y}{\operatorname{sen}^2\theta}\right|\Delta\theta =$$

$$= \left|\frac{1}{\tan 26{,}4^\circ}\right|\cdot 0{,}5 + \left|\frac{-150}{\operatorname{sen}^2 26{,}4^\circ}\right|\cdot 0{,}002 \simeq 3 \text{ cm}$$

lo que significa que la distancia x de 302 cm se calcula con un error absoluto de, aproximadamente tres centímetros, por defecto o por exceso, es decir, que x está comprendida entre 305 cm y 299 cm. Es interesante que los alumnos certifiquen con un flexómetro que sus medidas están dentro de los márgenes calculados y que calculen el error relativo de x, con el fin de conocer la precisión de su medida, en nuestro caso un 1%.

$$e_x\% = \frac{\Delta x}{x}\cdot 100 = \frac{3}{302}\cdot 100 \simeq 1\%$$

Para responder las preguntas: ¿en qué condiciones este método es preciso para medir distancias (entendiendo por preciso menor error relativo)?, y, ¿qué magnitudes son las que determinan, en mayor o menor medida, dicha precisión?, solamente tenemos que estudiar, en la ecuación [1], las derivadas parciales que multiplican a las incertidumbres de las variables independientes en el desarrollo de Taylor. Cuanto menores sean estas derivadas, menor será la incertidumbre en la función Δf. En nuestro caso:

$$e_x = \frac{\Delta x}{x} \simeq \left|\frac{1}{\tan\theta}\right|\cdot\frac{\Delta y}{x} + \left|\frac{-y}{\operatorname{sen}^2\theta}\right|\cdot\frac{\Delta\theta}{x} = e_y + \left|\frac{2\Delta\theta}{\operatorname{sen}2\theta}\right|$$

deducimos que el error relativo en x depende, como es lógico, de la precisión en la medida de y, aproximadamente 0,3%, pero también es directamente proporcional al doble de la incertidumbre en el ángulo e inversamente proporcional al seno del ángulo doble, aproximadamente un 0,5%. Por tanto, para el mismo error $\Delta\theta$ observamos que este último término disminuye monótonamente cuando aumenta el $\operatorname{sen}2\theta$. La situación más favorable ocurre cuando $\theta = \pi/4$, en la que el error relativo debido al ángulo es mínimo, y se reduce, del 0,5% al 0,4%. Así, cuanto mayor sea la diferencia $|\theta - \pi/4|$, mayor es el error relativo debido al ángulo y menos fiable será este método.

Con el fin de que los alumnos entiendan mejor cómo afecta la medida de θ a la precisión de este método, es conveniente que los alumnos resuelvan, por ejemplo, el siguiente problema: ¿Qué intervalo de longitudes se puede medir con una precisión inferior al 5%? Si queremos conseguir un error relativo en x menor del 5%, con los mismos errores en los instrumentos de medida, 0,1º para θ y de 0,5 cm para la longitud de referencia, debemos resolver la inecuación:

$$e_y\% + \left|\frac{200\cdot\Delta\theta}{\operatorname{sen}2\theta}\right| \simeq 0{,}3 + \left|\frac{0{,}4}{\operatorname{sen}2\theta}\right| < 5$$

Esta inecuación se puede resolver fácilmente por métodos analíticos, pero al alumno le resulta más fácil visualizar y analizar los resultados si lo resolvemos gráficamente, por ejemplo, utilizando el programa GeoGebra (figura 5).

En nuestro caso, la gráfica de la figura 5 muestra claramente que:

— Si queremos un error relativo menor del 5 %, θ debe cumplir que 2º < θ < 88º, aproximadamente.

— Todas las medidas de θ para las que 20º < θ < 70º tienen un error relativo menor del 1 %.

— La mayor precisión que se puede obtener es de 0,7 %, y esto ocurre cuando θ = 45º.

En general podemos concluir que este método de medida de longitudes tiene una precisión aproximada de 1 % siempre que el error relativo de la longitud de referencia y sea menor del 0,3 % y que la distancia x, a medir, requiera un ángulo comprendido entre 20º y 70º. En la práctica, este intervalo de θ, supone medir distancias entre 1/3 y 3 veces la longitud y.

Ejercicio II

Calcular el ángulo necesario para encestar una canica en un vaso.

La siguiente actividad consiste en *encestar* una canica, que rueda por un plano inclinado de longitud h_0 , y forma un ángulo θ con respecto a un pupitre de altura y_0. La canica debe caer dentro de un vaso de altura y_1, que se encuentra a una distancia x_0 del pupitre (figura 6).

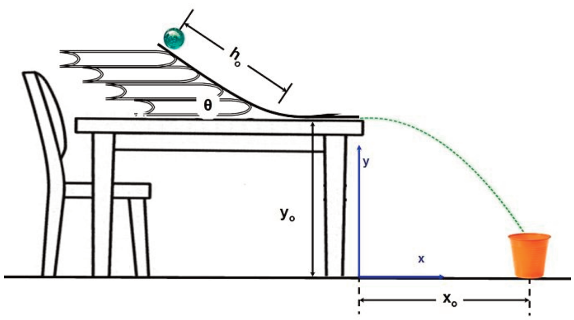

Figura 6

Para evitar que la canica caiga por el plano inclinado sin girar, hemos utilizado un tubo de PVC de 1 metro de largo adosado a un listón de madera, que sujetamos con libros para darle cierta inclinación. Los alumnos tienen un máximo de tres intentos para conseguir este objetivo y, por

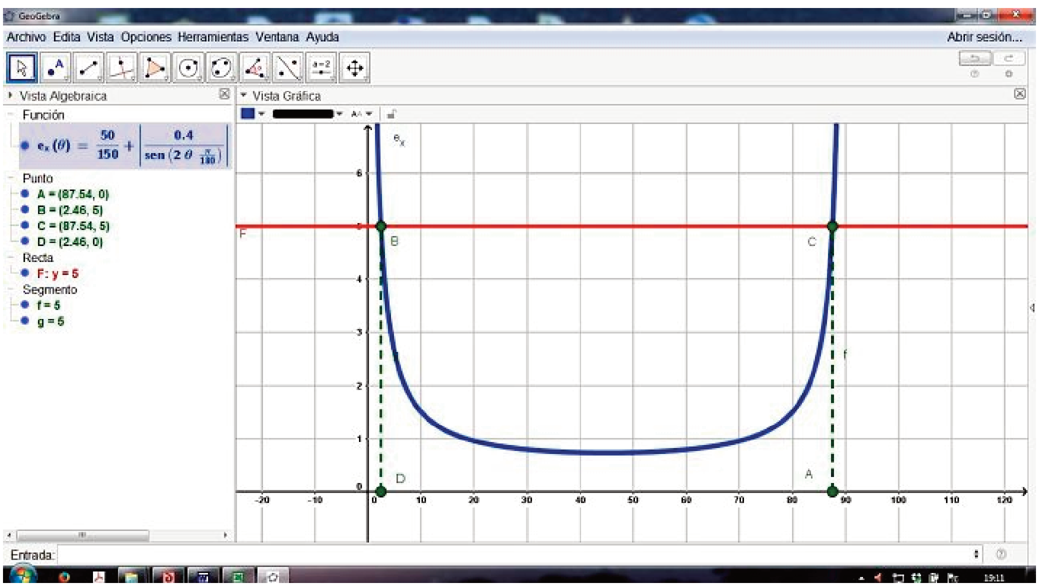

Figura 5

tanto, deben realizar previamente todas las medidas, ajustes y cálculos necesarios. En esta actividad, y_0, x_0 y h_0 son longitudes conocidas, y los alumnos deben jugar (calcular y medir) con el ángulo θ para conseguir que la canica salga rodando y despedida del pupitre, paralela al suelo con la velocidad justa para caer dentro del vaso. El ajuste del ángulo θ se realiza con la misma *app* que hemos utilizado en la ejercicio I. Las ecuaciones que resuelven este problema se obtienen de las fórmulas del tiro parabólico. Cuando la canica sale del pupitre, su trayectoria es una parábola, que viene determinada por la velocidad de salida en el eje X, que llamamos v_0, la altura y_0 y la gravedad $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria, dependientes del tiempo, son:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t \\ y(t) = y_0 - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Por sustitución del tiempo, se obtiene la ecuación parabólica de la trayectoria.

$$y = y_0 - \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x^2$$

Si no consideramos la altura del vaso, la canica caerá dentro del vaso cuando la parábola de su trayectoria corte al eje de abscisas en $y(x_0) = 0$, de lo que se deduce que la velocidad de salida v_0 debe ser:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{2 y_0}} \cdot x_0$$

Con el fin de conseguir esta velocidad de salida, los alumnos deben medir un ángulo θ, de tal forma que la energía potencial gravitatoria de la canica, en lo alto del plano inclinado, se iguale a la energía cinética y de rotación al final del plano:

$$m \cdot g \cdot h_0 \cdot \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_0^2 \quad [2]$$

donde I es el momento de inercia de la canica y ω_0 su velocidad angular:

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot \mathrm{R}^2; \quad \omega_0 = \frac{v_0}{\mathrm{R}}$$

y R, es el radio de la canica.

$$m \cdot g \cdot h_0 \cdot \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot \mathrm{R}^2 \cdot \frac{v_0^2}{\mathrm{R}^2}$$

$$m \cdot g \cdot h_0 \cdot \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + \frac{1}{5} \cdot m \cdot v_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot g \cdot h_0 \cdot \operatorname{sen} \theta}$$

Por tanto:

$$\sqrt{\frac{g}{2 y_0}} \cdot x_0 = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot g \cdot h_0 \cdot \operatorname{sen} \theta}$$

$$x_0^2 = \frac{20}{7} \cdot y_0 \cdot h_0 \cdot \operatorname{sen} \theta \quad [3]$$

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{7}{20} \cdot \frac{x_0^2}{y_0 \cdot h_0}\right)$$

Llegados a este punto es importante asegurarse de tres cosas:

— La superficie del plano inclinado debe ser lo suficientemente rugosa como para que la canica caiga rodando por todo el recorrido. En caso contrario, siempre se puede sustituir la canica por una pelota de golf, y así conseguir mayor adherencia. Si la canica se desplaza sin girar, θ se calcularía igualando solamente la energía potencial gravitatoria de la canica en lo alto del plano a la energía cinética de la canica al final plano.

$$m \cdot g \cdot h_0 \cdot \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{x_0^2}{y_0 \cdot h_0}\right)$$

— Si utilizamos un pelota hueca, como por ejemplo una pelota de tenis o de pin-pong, debemos sustituir el factor 2/5 del momento de inercia en energía de la canica por un factor 2/3. Este cambio es necesario, debido a que el momento de inercia de una pelota hueca es distinto al de una maciza. En esta situación el ángulo θ es:

$$m \cdot g \cdot h_0 \cdot \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_0^2$$

$$m \cdot g \cdot h_0 \cdot \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot m \cdot \mathrm{R}^2 \cdot \frac{v_0^2}{\mathrm{R}^2}$$

$$\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{5}{12} \cdot \frac{x_0^2}{y_0 \cdot h_0}\right)$$

— Debemos asegurarnos de que la canica no se frena, salta o bota al pasar del plano inclinado a la superficie de la mesa. Para evitar este problema es conveniente colocar una cartulina que permita un paso gradual entre el movimiento uniformemente acelerado en el plano inclinado y el movimiento uniforme en la superficie de la mesa, (figura 6).

Es interesante que los alumnos investiguen los cambios que se deberían hacer en las ecuaciones anteriores si tenemos en cuenta la altura del vaso, y_1. La solución, en este caso, es lógica e inmediata: si consideramos la altura del vaso, solamente debemos hacer el cambio de y_0 por $y = y_0 - y_1$.

$$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{7}{20}\cdot\frac{x_0^2}{(y_0 - y_1)\cdot h_0}\right) = \text{arcsen}\left(\frac{7}{20}\cdot\frac{x_0^2}{y\cdot h_0}\right) \quad [4]$$

En lo que respecta al cálculo de errores, si queremos estimar cómo afecta la precisión del ángulo θ, en la posición final x_0 de la canica, procedemos de la siguiente forma:

$$\Delta x_0 \simeq \left|\frac{\partial x_0}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial x_0}{\partial h_0}\right|\Delta h_0 + \left|\frac{\partial x_0}{\partial \theta}\right|\Delta\theta$$

Las derivadas parciales se calculan con la ecuación [3], cambiando y_0 por y para tener en cuenta la altura del vaso:

$$2\cdot x_0\cdot\frac{\partial x_0}{\partial y} = \frac{20}{7}\cdot h_0\cdot\text{sen}\,\theta \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial x_0}{\partial y} = \frac{10}{7\cdot x_0}\cdot h_0\cdot\text{sen}\,\theta = \frac{x}{2\cdot y}$$

$$2\cdot x_0\cdot\frac{\partial x_0}{\partial h_0} = \frac{20}{7}\cdot y\cdot\text{sen}\,\theta \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial x_0}{\partial h_0} = \frac{10}{7\cdot x_0}\cdot y\cdot\text{sen}\,\theta = \frac{x_0}{2\cdot h_0}$$

$$2\cdot x_0\cdot\frac{\partial x_0}{\partial\theta} = \frac{20}{7}\cdot y\cdot h_o\cdot\cos\theta \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial x_0}{\partial\theta} = \frac{10}{7\cdot x_0}\cdot y\cdot h_o\cdot\cos\theta = \frac{x_0\cdot\text{cotan}\,\theta}{2}$$

Por tanto:

$$\Delta x_0 \simeq \left|\frac{x_0}{2\cdot y}\right|\Delta y + \left|\frac{x_0}{2\cdot h_0}\right|\Delta h_0 + \left|\frac{x_0\cdot\text{cotan}\,\theta}{2}\right|\Delta\theta$$

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} \simeq \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta y}{y} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta h_0}{h_0} + \left|\frac{\text{cotan}\,\theta}{2}\right|\Delta\theta \quad [5]$$

Nuestras expectativas de dar en el blanco aumentarán si reducimos al máximo los errores relativos de h_0 e y. También, debemos aumentar lo máximo posible, sin impedir que la canica ruede por el plano, el ángulo θ de inclinación.

En nuestra experiencia, la longitud del plano inclinado fue, h_0 = 100,0 ± 0,5 cm, la altura del pupitre, y_0 = 60,0 ± 0,5 cm y el vaso se situó a una distancia x_0 = 80,5 ± 0,5 cm. Con el fin de que el blanco no se rompa o se caiga al golpearse con la canica, hemos pegado un vaso de plástico a una placa de madera con una altura total y_1 = 13,3 ± 0,2 cm. Por tanto:

$$y = y_0 - y_1 = 46{,}7 \pm 0{,}7 \text{ cm.}$$

Con estos datos y la ecuación [4] se calcula el ángulo que permite, en estas condiciones, dar en el objetivo θ = 29,1º.

Con la ecuación [5], y teniendo en cuenta que θ = 29,1º se mide con una precisión de 0,1º, podemos calcular la incertidumbre en la longitud de lanzamiento de la canica Δx_0:

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} \simeq \frac{0{,}7}{93{,}4} + \frac{0{,}5}{200} + \left|\frac{\text{cotan}\,29{,}1}{2}\right|\cdot 0{,}0017 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \Delta x_0 \simeq 0{,}9 \simeq 1 \text{ cm}$$

Cuando los alumnos realizaron este ejercicio se quedaron bastante frustrados, porque obtuvieron distintos valores de x_0, con las mismas condiciones de y, h_0 y θ y casi todos fuera de los márgenes calculados, ±1 cm. Este resultado se debe a los errores aleatorios o estadísticos. Estas incertidumbres son casuales, fortuitas e incontrolables, y afectan a las medidas en ambos sentidos, por exceso y por defecto. Aunque a veces tienen su origen en causas desconocidas (por ejemplo, debido a fluctuaciones de origen microscópico, rozamiento, vibraciones, corrientes de aire…), en nuestro caso, fundamentalmente se deben a factores personales (soltar la canica con cierta velocidad inicial o a diferente altura, que en ciertos tramos la canica pueda oscilar o patinar, rozamientos…). Este tipo de error es inevitable, pero puede aproximarse repitiendo las medidas, utilizando métodos estadísticos y la teoría de probabilidades. En este sentido el ejercicio es muy interesante, porque te permite trabajar estos temas de manera práctica en clase.

La forma más sencilla de incluir los errores estadísticos, aunque no la más exacta, es considerar que el error de una determinada magnitud x es la suma de error del instrumento o de escala y el estadístico.

$$\Delta x \simeq \Delta x_{\text{escala}} + \Delta x_{\text{estadístico}}$$

Δx_{escala} se obtiene directamente de la precisión del aparato de medida y $\Delta x_{\text{estadístico}}$ se puede estimar por la expresión (Sánchez, 1989):

$$\Delta x_{\text{estadístico}} \simeq 2 \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

que, básicamente es un estimador de la desviación típica de la media de una muestra de n medidas. El factor 2 de la expresión se incluye para garantizar un intervalo de confianza aproximado de 96%.

Con el objetivo de calcular aproximadamente el error estadístico, los alumnos de 4.º ESO realizaron ocho intentos con y = 46,7 cm, h_0 =100 cm y los ángulos 21,9º, 30º y 40º:

Ángulo θ	21,9°	30,0°	40,0°
Longitud x_0	72,2	79,0	88,8
	73,0	82,2	91,6
	73,9	81,5	95,4
	65,5	83,6	95,3
	70,0	82,5	88,5
	70,4	81,9	96,5
	70,7	82,2	94,0
	70,3	82,3	95,2
Media $\bar{x}_0$	70,8	81,9	93,2
$\Delta x_{\text{estadístico}} \simeq 2 \cdot \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$	1,8	0,9	2,2

Tabla 1

Después, aproximaron el error estadístico a 2,2 el mayor error obtenido en las tres pruebas. Por último, calcularon la incertidumbre total de la magnitud x_0 como la suma del error del instrumento y del estadístico 0,5 + 2,2 ≃ 3 cm. Aclaramos que en la segunda columna de la tabla 1 aparece 21,9º porque durante las ocho pruebas, el ángulo θ no siempre se mantuvo constantemente igual a 22,0º. Concretamente, 5 de las 8 medidas la *app* del móvil marcó 21,9º y el resto 22,0º.

Los resultados de estas pruebas nos sirven para hacernos una idea del valor aproximado del error total cometido en la magnitud x_0 para un determinado lanzamiento. Con este nuevo valor y las ecuaciones [1] y [3]:

$$\Delta\theta \simeq \left|\frac{\partial\theta}{\partial x_0}\right|\Delta x_0 + \left|\frac{\partial\theta}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial\theta}{\partial h_0}\right|\Delta h_0$$

$$\left|\frac{\partial\theta}{\partial x_0}\right| = \left|\left(\frac{\partial x_0}{\partial\theta}\right)^{-1}\right| = \frac{2\cdot\tan\theta}{x_0}$$

$$\left|\frac{\partial\theta}{\partial h_0}\right| = \left|\left(\frac{\partial h_0}{\partial\theta}\right)^{-1}\right| = \frac{\tan\theta}{h_0}; \quad \left|\frac{\partial\theta}{\partial y}\right| = \left|\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^{-1}\right| = \frac{\tan\theta}{y}$$

$$\Delta\theta = \tan\theta\cdot\left[2\cdot\frac{\Delta x_0}{x_0} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta h_0}{h_0}\right]$$

Por tanto, para que los alumnos acierten a un blanco situado a x_0= 80 ± 3 cm, y = 46,7 ± 0.7 cm y h_0 =100 ± 0,5 cm deben medir un ángulo aproximado de θ = 29 ± 3º, y algo de intuición. Añadimos que también es necesario algo de intuición, porque los alumnos solo tienen 3 intentos para *encestar* la canica. En nuestro caso solo dos grupos de seis acertaron en tres, o menos intentos, el resto necesitó entre cuatro y cinco intentos. Lo bonito e interesante del ejercicio es que en todos los casos, el ángulo de disparo verificaba la condición θ = 29 ± 3º. En la realidad el ángulo exacto que permite acertar al blanco con nuestras medidas es un poco más preciso, θ = 29 ± 2º. Básicamente la diferencia entre nuestro error, ± 3º, y el real, ± 2º, se debe a la aproximación generosa y al alza que los alumnos hicieron del error estadístico de x_0.

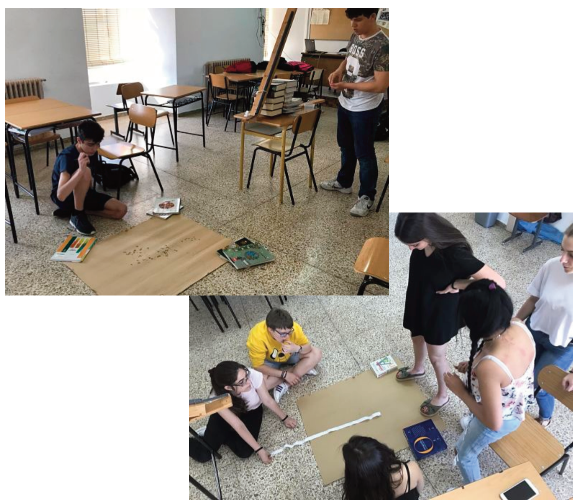

Figura 7

Ejercicio III

Lanzar una canica y dar en un blanco situado a una distancia conocida.

Esta actividad es similar al ejercicio anterior, y consiste en lanzar una canica con una pistola de gomas casera, y dar en un blanco situado a una distancia conocida, por ejemplo, 6 metros. Como en el ejercicio II, los chicos tienen un máximo de tres intentos para lograr este objetivo. Los alumnos de 4.º ESO construyeron la pistola de gomas en el taller de tecnología, utilizando una base de madera, dos alcayatas, una pinza y una goma elástica como se ve en la figura 8.

Figura 8

Si no podemos construir nuestra propia pistola, siempre podemos utilizar la típica pistola de *todo a 100* o una pistola NERF (figura 9), aunque consideramos que es más interesante que los alumnos diseñen y construyan su propia pistola de gomas con los procedimientos o destrezas adquiridas en la asignatura de Tecnología del curso de 1.º ESO.

Figura 9

La actividad se divide en dos partes: en la primera parte estimamos la velocidad de salida de la canica y en la segunda calculamos el ángulo adecuado para alcanzar el blanco.

Primera parte: Cálculo de la velocidad con la que sale la canica de la pistola de gomas

Para estimar este dato colocamos la pistola en un ángulo conocido, por ejemplo de $\theta = 45{,}0^{\circ}$ y medimos el alcance máximo x_{MAX} que adquiere.

Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la canica dependientes del tiempo son:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t \\ y(t) = v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

Por sustitución del tiempo se obtiene la ecuación de la trayectoria parabólica de la canica (figura 10):

$$y = \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\theta} \cdot x^2$$

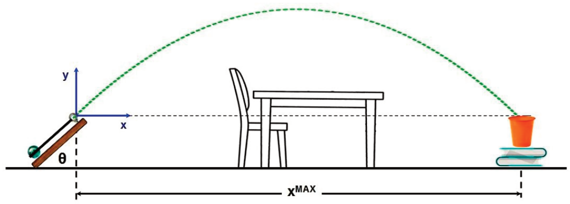

Figura 10

Y por tanto, el alcance máximo x_{MAX} se calcula como el punto de corte de la parábola con el eje de abscisas:

$$0 = \tan\theta \cdot x_{MAX} - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\theta} \cdot \left(x_{MAX}\right)^2$$

que da un resultado no trivial (distinto de 0):

$$x_{MAX} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen} 2\theta$$

Así, deducimos que la velocidad de salida del proyectil tiene que ser:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot x_{MAX}}{\operatorname{sen} 2\theta}} \qquad [6]$$

El error relativo cometido en la estimación de v_0 se deduce aplicando la fórmula [1] a la ecuación [6]:

$$\Delta v_0 = \frac{\Delta x_{MAX}}{2 \cdot x_{MAX}} + \frac{\Delta\theta}{\left|\tan 2\theta\right|}$$

Observamos que el error absoluto Δv_0 disminuye cuando x_{MAX} y $\tan 2\theta$ aumentan, además, estos son máximos cuando $\theta = 45º$. El ángulo inicial θ, necesario para obtener v_0, puede ser cualquiera, pero es preferible que sea próximo o igual a 45º, porque para estos valores la dependencia de Δv_0 con θ es mínima o nula, y por tanto, un error en su medida afectaría mucho menos al estimar v_0. En nuestro ejemplo con $\theta = 45{,}0º$, hemos medido un $x_{MAX} = 735 \pm 5$ cm y calculado $v_0 \simeq 8{,}49 \pm 0{,}03$ m/s.

Segunda parte: Cálculo del ángulo de disparo

El ángulo de disparo para una distancia máxima conocida x_{MAX} del objetivo se obtiene resolviendo la ecuación:

$$x_{MAX} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen} 2\theta \quad [7]$$

Cuya solución es:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arcsen}\left(\frac{g \cdot x_{MAX}}{v_0^2}\right)$$

Si $x_{MAX} = 6{,}00 \pm 0{,}02$ m y $v_0 = 8{,}49 \pm 0{,}03$ m/s se obtiene $\theta \simeq 27{,}3º$.

Para calcular el error aplicamos la fórmula [1] a la ecuación [7]:

$$\Delta\theta \simeq \left|\frac{\partial\theta}{\partial x_{MAX}}\right| \Delta x_{MAX} + \left|\frac{\partial\theta}{\partial v_0}\right| \Delta v_0$$

$$\left|\frac{\partial\theta}{\partial x_{MAX}}\right| = \left|\left(\frac{\partial x_{MAX}}{\partial\theta}\right)^{-1}\right| = \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos 2\theta} = \frac{\tan 2\theta}{2 \cdot x_{MAX}}$$

$$\left|\frac{\partial\theta}{\partial v_0}\right| = \left|\left(\frac{\partial v_0}{\partial\theta}\right)^{-1}\right| = \frac{v_0 \cdot \operatorname{sen} 2\theta \cdot \tan 2\theta}{g \cdot x_{MAX}} = \frac{\tan 2\theta}{2 \cdot v_0}$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \cdot \tan 2\theta \cdot \left|\frac{\Delta x_{MAX}}{x_{MAX}} + 2 \cdot \frac{\Delta v_0}{v_0}\right|$$

Esto nos da un valor aproximado de $\Delta\theta \simeq 0{,}4º$. Por tanto, el ángulo final que tenemos que medir para dar a un blanco a 6 metros es, aproximadamente, $\theta = 27{,}3 \pm 0{,}4º$.

La realización de este ejercicio en el aula resultó ser más divertida que práctica. Fundamentalmente porque en este experimento los errores estadísticos son muy grandes y difíciles de cuantificar, sobre todo la magnitud v_0. Si utilizábamos una pelota de goma, nuestra pistola apenas tenía potencia para alcanzar distancias razonables, y si usábamos una pelota de pin-pon o una pistola NERF obteníamos un alcance máximo de 5 a 7 metros. En todos los casos, el aire modificaba significativamente la trayectoria de la pelota, de tal forma que, resultaba muy difícil dar en el blanco y/u obtener medidas con suficiente precisión. Para conseguir buenos resultados debemos utilizar proyectiles con bastante masa como para que el aire no altere su trayectoria, pero esto implica utilizar otros sistemas de disparo que no son aconsejables para alumnos de la ESO. En cualquier caso, y con un poco de tiempo, paciencia y práctica los alumnos consiguieron, en la mayoría de los casos, acertar en el blanco. Nuestro mejor resultado se obtuvo para $x_{MAX} = 6{,}0$ m con un ángulo de 30,3º y un valor aproximado de $v_0 = 8{,}5$ m/s que, teniendo en cuenta las dificultades, se ajusta bastante bien a nuestros cálculos.

A modo de conclusión diremos que la experiencia realizada con alumnos del último curso de ESO del colegio Maestro Ávila de Salamanca fue enriquecedora, y nos mostró que los alumnos son más creativos y asimilan mejor los conceptos si les planteamos retos concretos (medir una longitud, encestar en un vaso…) y problemas que requieran el uso o la manipulación de materiales que forman parte de su entorno y vida cotidiana.

Agradezco sinceramente a Santiago Pérez, Aurora Martín, Antonio Martín, amigos y compañeros de trabajo y a Isabel Rodríguez, por la ayuda que me han prestado a la hora de elaborar, organizar y sacar adelante este proyecto.

Referencias bibliográficas

Feito, M., y J. Martínez (2011), «Medidas de altura: trigonometría con cuerda, metro y móvil», *Suma*, n.º 66, 35-40.

Sánchez del Río, C. (1989), *Análisis de errores,* Eudema, Madrid.

Máximo Gómez Flórez
Colegio Maestro Ávila, Salamanca
<máximo@usal.es>