suma+
Secciones
Noviembre 2019
92
pp. 67-76

¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez?

Miquel Albertí Palmer

Crónica de una clase no anunciada

Me dirijí al instituto pensando que X e Y, alumnos del Máster de Didáctica de las Matemáticas y de la Filosofía respectivamente, iban a asistir a mi clase con un grupo de 1.º de la ESO. La noche anterior decidí plantear a este grupo un problema sobre un patrón numérico de los ejercicios de inglés ya tratado con otros dos grupos del mismo nivel educativo. Así, X e Y podrían hacerse una idea de cómo es una clase de matemáticas basada en el diálogo filosófico como es propio del proyecto L'INSiTU que estamos desarrollando.

Nada más llegar, la profesora de filosofía me informó de que no llegarían hasta una hora más tarde para asistir a una clase mía con otro grupo de 1.º. ¡Vaya! En este grupo ya tratamos el problema en el que venía pensando y lo que estábamos haciendo ahora no iba a mostrar a X e Y la esencia del proyecto por el que acudían al centro. Así que decidí cambiar de problema y tratar el de cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez. La realidad imponía otra clase no anunciada.

Tras las presentaciones, X e Y me acompañaron al aula. Justo en la puerta nos topamos con dos alumnas, una de ellas estaba llorando. ¿Qué ha pasado?, les pregunté. Entre sollozos dijo que un alumno había empujado a otro y que este, de rebote, la había hecho caer al suelo haciéndose daño. Hice salir de clase al responsable y le recri-

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2019 y aceptado en septiembre de 2019

miné su actitud. Él trató de justificarse diciendo que otro compañero le había empujado antes a él. Le repliqué si acaso creía que había que responder con un empujón a otro empujón: «¿no ves que así acabaríamos todos en el suelo?». Como la alumna afectada no era de mi clase conduje a ambos al despacho de dirección y dejé la cuestión en manos de jefatura de estudios. Luego regresé al aula y entré con X e Y.

La clase ya se había enterado del conflicto. Por ello comencé la sesión reflexionando que la violencia no debe responderse con más violencia, por muy lógica que parezca tal respuesta. Iba a enfocar la cuestión de resolución de problemas cuando un alumno levantó la mano. Dijo que aun no me habían entregado los trabajos que les había encargado. Se trataba de un comentario a los estudios estadísticos sobre temas muy diversos realizados por alumnos de ciencias experimentales de cursos superiores durante la Semana de la Ciencia. Una veintena de trabajos habían sido expuestos en pósteres a lo largo de pasillos y escaleras del centro.

Antes de recoger los trabajos de quienes ya los habían acabado, me entretuve un poco en esa cuestión para que X e Y conociesen de qué estábamos hablando. Pregunté a la clase si alguien podría explicarles en qué consistía el encargo. Una alumna lo intentó, pero no acabó de explicarse con claridad. Di la palabra a otra. Mejoró un poco la explicación, pero no lo suficiente. Así que recordé a todos los presentes de qué se trataba. La tarea consistía en realizar, por tríos, un comentario de las investigaciones de ciencias atendiendo a tres aspectos principales:

— Expresión y comprensión: ¿tanto la expresión lingüística (ortografía, sintaxis, puntuación) como la científica (números, símbolos, cálculos, gráficos) eran apropiadas?
— Coherencia y lógica: las conclusiones del estudio, ¿se desprendían de la investifación realizada?
— Aportaciones y prospección: ¿en qué podría mejorarse la investigación y qué otras investigaciones podría inspirar?

Algunos grupos me entregaron sus trabajos, pero había dos que aún no los habían acabado. Les propuse que fuesen terminándolos a lo largo de la sesión. Se pusieron a ello.

El problema

Este problema fue inspirado por un video matemático realizado por alumnos del ciclo inicial de Primaria de la Escola Vall Ondara (Sant Antolí i Vilanova, Lleida) para el VideoMAT 2015, un concurso de videos matemáticos consistente en exponer y resolver un problema matemático en un máximo de tres minutos. La cuestión del video era averiguar cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez. Los alumnos de primaria que lo presentaban acababan concluyendo que eran 64, pues no hacía falta contarlos uno por uno, sino que bastaba con multiplicar los que componían la vertical y la horizontal del tablero. Además de eso, acababan con una reflexión que iba más allá del problema, pues se daban cuenta de que había números que merecían ser llamados cuadrados porque con ellos puede componerse tal figura geométrica. Viendo las posibilidades que ese problema podría generar en secundaria lo planteé en esa clase de 1.º de la ESO:

¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez?

Pedí a mis alumnos que nadie dijese la respuesta en voz alta, sino que la pensasen durante un rato. Al poco pregunté quienes creían tener ya la solución. Solo 6/23 levantaron la mano. También pregunté cuántos consideraban que no sabían por dónde coger el problema: 3/23. El resto, 14/23, pidieron poder ver un tablero de ajedrez.

Solución elemental

En problemas contextualizados no debe darse por sentado que todo el mundo conoce el contexto, por muy corriente que pueda parecernos. Abrí el ordenador, busqué imágenes de tableros de ajedrez y les proyecté una en la pantalla, pero no era una imagen frontal, sino en perspectiva, con las casillas distorsionadas en cuadriláteros. Algunos empezaron a contar las filas y las columnas del tablero.

—Profesor: ¿Dónde están los datos del problema?
—Ell@s: En el tablero.

Les di unos instantes más antes de preguntar por la solución y el modo en que se había obtenido:

—Ell@s: Creo que hay 64, porque hay ocho filas y ocho columnas. Y ocho por ocho da 64.

Sinapsis lingüística

A muchos les pareció bien, pero entonces otra persona levantó la mano:

—Ell@s: Yo creo que son 65, porque el tablero entero también es un cuadrado.

Esta intervención marcó un punto de inflexión porque nada más escucharla varios levantaron las manos y comenzaron a gritar:

—Ell@s: ¡No, hay más, muchos más!
—Profesor: ¿A qué os referís?
—Ell@s: Sí. Mira. Se pueden hacer de 2×2.

Volví a preguntar cuántos creían poder averiguar la solución. Ahora ya eran 14/23 y no quedaba nadie, 0/23, que no supiera por dónde coger el problema. Un alumno se levantó y se acercó a la pizarra para trazar encima del tablero virtual diversos cuadrados 2×2.

—Profesor: Entonces, ¿qué ha contado como cuadrados la persona que ha dicho que eran 64?
—Ell@s: Las casillas. Hay 64 casillas. Pero cuadrados, ¡uf!, hay un montón.
—Profesor: Bien, pues contadlos todos.
—Ell@s: ¡Hala!
—Profesor: Aunque sean muchos, podrán contarse.

En el lenguaje corriente es aceptable llamar cuadrado a una casilla, pero en matemáticas los términos no pueden tomarse a la ligera. La solución elemental de 64 cuadrados es consecuencia de tomar como sinónimos los términos cuadrado y casilla. Todas las casillas del tablero son cuadradas, pero no todos los cuadrados del tablero son casillas. Cuando alguien vio ese cuadrado de más, el tablero completo, no solo se asomó a la profundidad del problema, sino lo abrió a la solución deshaciendo la sinonimia atribuida a esos dos términos lingüísticos, dando al término cuadrado su verdadero significado.

El problema es el recuento

Después de que un alumno trazase algunos cuadrados 2 × 2, otro trazó en la pizarra los cuadrados de todas las dimensiones posibles (figura 1).

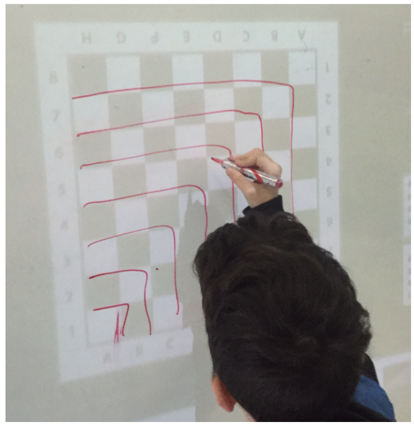

Figura 1. Cuadrados posibles en un tablero de ajedrez

Basándose en esa idea decidió contarlos uno a uno (figura 2). Otros comenzaron a realizar dibujos en sus cuadernos cuadriculados. Pero no acababan de lograr el objetivo. Algunos contaban de forma desordenada; otros, no conseguían ordenar el recuento. Hubo quien dijo que eran 112. Otros le dijeron que había más todavía.

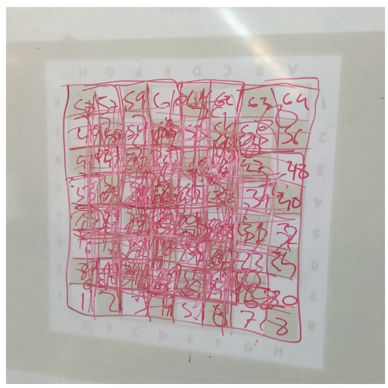

Figura 2. Contar, uno a uno, todos los cuadrados de un tablero de ajedrez es tarea impracticable

El problema era organizar el recuento. Lo intentaban pero no conseguían encontrar un modo de enumerar los cuadrados. Entonces intervino alguien:

—Ell@s: De cuadrados 1×1, hay 64; de cuadrados 2×2, hay 16.

—Profesor: ¿Por qué 16? ¿Alguien está de acuerdo con eso?

—Ell@s: Son 16 porque en uno 2×2 hay 4, y 64 dividido entre 4 da 16.

—Profesor: ¿Qué opináis?

—Ell@s: Hay más porque…

No acaban de dar con un argumento y se produjeron varios intentos fallidos (figura 3).

Pensando que se trataba de un problema de expresión, les invité a hacer una tabla en la que ordenasen la información disponible. Confié en que ello les ayudase a establecer las relaciones necesarias para resolver la cuestión. Y continué el diálogo:

—Profesor: Esos 16 cuadrados 2×2, ¿dónde están?

—Ell@s: Si los dibujas, verás que son 16, cuatro por línea.

—Profesor: ¿Y no hay más?

—Ell@s: Sí, los de enmedio.

—Profesor: Estos 16, ¿se solapan?

—Ell@s: No.

–Profesor: Pero hay otros más, ¿no? ¿Dónde los ponemos?

—Ell@s: Entre los otros.

—Profesor: ¿Y cuántos hay en total?

La cuestión no cuajó. Así que retomé la idea primigenia de la alumna que había dicho que eran 64. Lo hice porque no considero pedagógico zanjar una intervención declarándola errónea o permitiendo que el alumnado puede tomarla como inútil. Quien se arriesga a intervenir merece ver que su aportación, aunque incorrecta, sirve para impulsar otras ideas o que puede corregirse.

—Profesor: ¿Recordáis que alguien dijo al principio que los cuadrados eran 64?

—Ell@s: Sí.

—Profesor: ¿Cómo se justificó eso?

—Ell@s: Porque eran ocho por ocho.

—Profesor: Pero, ¿ocho qué?

—Ell@s: Filas y columnas.

—Profesor: Exacto. Ocho filas y ocho columnas de cuadrados 1×1, ¿no?

—Ell@s: Sí.

—Profesor: ¿Y cuántas filas y columnas de cuadrados 2×2 hay en el tablero?

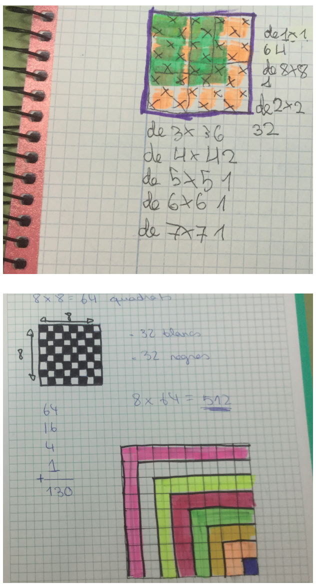

Figura 3. Algunos intentos de recuento fallidos

Sinapsis espacial

Se quedaron dudando. Nadie lograba concretar una respuesta. Entonces tomé una hoja de papel y la doblé de forma que abarcase un cuadrado 5×5, la puse sobre un tablero dibujado en la pizarra y fui deslizándola de izquierda a derecha (figura 4).

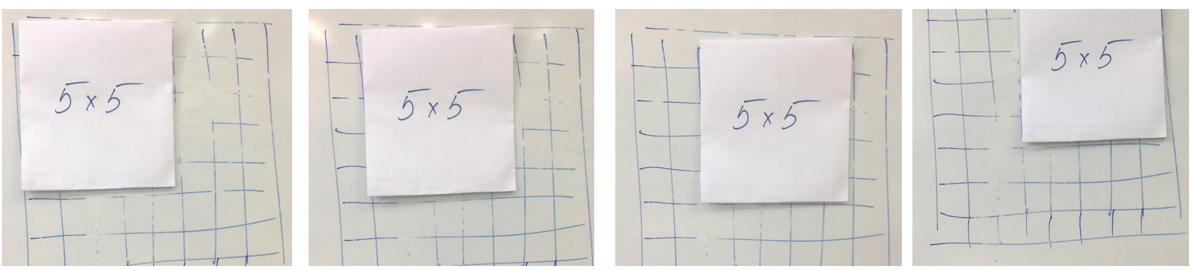

Figura 4. El desplazamiento de un cuadrado 5×5 sobre un tablero dibujado en la pizarra provocó una nueva sinapsis

Justo entonces se produjo una sinapsis:

—Ell@s: ¡Ah!

Hasta aquí llegó el tiempo de clase. X e Y consideraron que había sido muy útil, que el alumnado se mostró muy participativo y que había resultado extraordinario ver cómo con la colaboración de todos se había llegado a resolver el problema. Confesaron que al plantearlo dudaron de si me atrevería a profundizar tanto como para resolverlo completamente.

Al día siguiente retomamos la cuestión. Alguien había recortado cuadrados de varias dimensiones para desplazarlos sobre un cuadrado 8×8. Desplazando un cuadrado 6×6 en horizontal y en vertical vemos que de este tipo hay tres filas y tres columnas, esto es, $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ cuadrados 6×6 en el tablero (figura 5).

Con ello se hacía evidente el patrón subyacente ilustrado en la tabla 1: en el tablero de ajedrez hay $(9-n)^2$ cuadrados de $n \times n$ casillas.

Puede pensarse que este problema quizá vaya un poco grande al alumnado de 1.º de la ESO. Sin embargo, ha habido ocasiones en las que enseguida alguien se ha dado cuenta de que la solución supera y mucho al número de casillas. Incluso hubo un grupo en el que la búsqueda de organización de los datos en una tabla les condujo a hallar por sí mismos la solución (figura 6). Así vieron que la solución era la suma de los cuadrados de los ocho primeros números naturales:

$$8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 204$$

Plus ultra

Terminado el problema les pregunté si podrían plantear alguna cuestión adicional inspirada en él. Lo hice evitando los términos generalización y ampliación. Sus propuestas no fueron las que un matemático pensaría en primer lugar:

Si en un tablero de ajedrez hay 64 casillas, ¿cuántas casillas tocan a cada pieza del juego?

¿Cuántas formas geométricas hay en un tablero de ajedrez?

¿Qué porcentaje de tablero es cada casilla?

¿Cuántas casillas hay de color blanco? ¿Y negras?

Era lógico que propusieran preguntas así, ya que se trata de lo que se ha trabajado en clase últimamente (estadística, porcentajes).

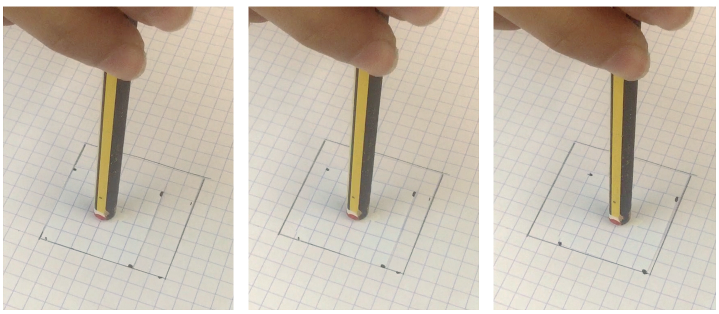

Figura 5. La primera fila de 3 cuadrados 6×6

Cuadrados	¿Cuántos hay?
1x1	8·8=64
2x2	7·7=49
3x3	6·6=36
4x4	5·5=25
5x5	4·4=16
6x6	3·3=9
7x7	2·2=4
8x8	1·1=1

Tabla 1. Relación entre dimensiones y cantidades de cuadrados en el tablero

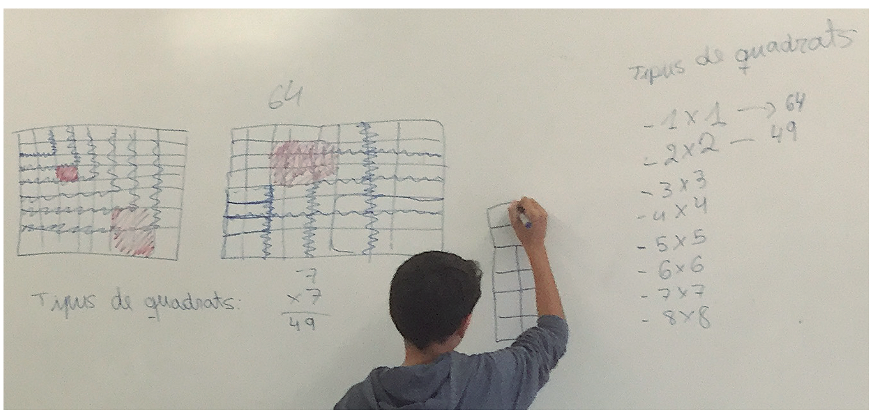

Figura 6. A un paso de la solución definitiva

—Profesor: En estas cuestiones estáis todavía en el tablero de ajedrez, pero podéis saliros de él. No hay por qué limitarse tanto.

Mi comentario inspiró una nueva pregunta:

—Ell@s: ¿Cuántos cuadrados pueden formarse con las casillas blancas? ¿Y con las negras?

Puesto que no se planteaba una generalización del problema, intervine a mi pesar:

—Profesor: Y si en lugar de ser 8×8, el tablero tuviese 100×100 casillas, ¿cuántos cuadrados podrían formarse?

Alguien acabó dándose cuenta de que se trataría de extender la suma de los cuadrados:

—Ell@s: Tendríamos que sumar igual, pero hasta cien: uno al cuadrado, más dos al cuadrado, más tres al cuadrado y así, hasta cien al cuadrado.

Les dije que los matemáticos han encontrado un modo de ahorrarse tantas sumas y que con una fórmula puede realizarse el cálculo de forma directa. La buscamos en Internet:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Les informé también de que podrían deducirla en algún curso posterior, pero que podíamos aplicarla cambiando la letra n por el número 100.

—Profesor: Si n es 100, ¿cuánto será $n+1$?
—Ell@s: 101.
—Profesor: ¿Y 2n+1?
—Ell@s: 200 más 1: 201.
—Profesor: ¿Y cuánto da todo?
—Ell@s: 338 350.

Otro contexto para el mismo problema

A primera hora de la mañana, cuando las fruterías acaban de abrir, puede observarse su género dispuesto de forma bien ordenada (figura 7). Ese orden va deshaciéndose a lo largo del día y tendrá ocupados a los fruteros, quienes se pasarán gran parte del tiempo recomponiendo los apilamientos de manzanas, naranjas, aguacates y tomates.

La gente escoge los productos sin prestar atención a su disposición espacial, pero a un observador matemático no le pasará desapercibida la distribución piramidal de la mercancía. Esas pirámides se componen de varios niveles en los que los frutos de un nivel se asientan en los intersticios cóncavos que dejan las piezas del nivel inferior. Si el nivel de la base se compone de 3×4 frutos; el superior, es de 2×3; y el siguiente, de 1x2. En un caso así no habrá más niveles, ya que el último fruto no se mantendría en equilibrio. Mejor resultado se obtiene con pirámides cuadradas en las que la serie consta de 4×4, 3×3, 2×2 y, ahora sí, 1×1 frutos.

Entonces surge la pregunta: ¿cuántas piezas componen dicha pirámide? Tomando la base cuadrada, la respuesta es evidente: la suma de los cuadrados de los números cuatro, tres, dos y uno. Es decir: $4^2+3^2+2^2+1^2=30$ piezas. Pero el interés matemático no acaba ahí, sino que incita la pregunta general: ¿cuál es el resultado si la pirámide se compone de n niveles? La respuesta es la suma de todos los cuadrados, desde 1^2 hasta n^2.

Si la pirámide no es cuadrada, sino rectangular con m filas y n columnas de piezas en su base, la respuesta es:

$$\sum_{k=0}^{\min(m,n)-1}(m-k)\cdot(n-k)$$

Veamos cómo deducir visualmente una expresión cerrada de la suma de cuadrados. Para hacerlo enfoquemos la cuestión desde una perspectiva que Polya (1988) destacó en su metodología de resolución de problemas: basarse en un problema similar, pero más sencillo, tratando de adaptar su estrategia de resolución al problema

Figura 7. Frutas en un mercado

que tenemos entre manos. En nuestro caso, más fácil que sumar cuadrados es sumar números, sin sus cuadrados: $1+2+3+\ldots+n$.

El cálculo de esta suma puede efectuarse como hizo Gauss de niño o componiendo una versión geométrica del problema (figura 8).

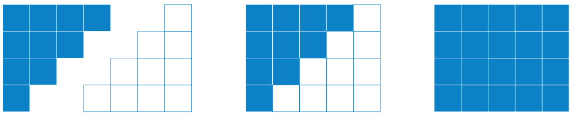

Figura 8. 1+2+3+4 = (4·5)/2

Como se aprecia en la figura 8, la suma de dos figuras idénticas compuestas por 1+2+3+4 piezas da como resultado un rectángulo de $4\cdot 5$ piezas. Lo mismo vale para 1+2+3, siendo el rectángulo resultante de $3\cdot 4$ piezas. La suma 1+2+3+4 es la mitad de $4\cdot 5$, la suma de 1+2+3 es la mitad de $3\cdot 4$ y, en general:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot\left(n+1\right)}{2}$$

Si para sumar los números naturales consecutivos hemos recurrido a esta versión geométrica contando cuadrados. Para sumar sus cuadrados vamos a recurrir a una versión tridimensional en la que contaremos cubos de cerámica. Recomponemos la pirámide de la frutería ($1^2+2^2+3^2+4^2$ piezas) reorganizando las piezas (ahora cubos de cerámica) en una arista vertical (figura 9, izqda.). A continuación, añadimos 1 cubo, 4 cubos y 9 cubos (figura 9).

Todavía queda espacio para repetir este proceso y añadir 1 cubo, 4 cubos y 9 cubos (figura 10).

Para completar el espacio restante del cubo de arista 4 solo queda espacio para añadir 1 cubo (figura 11, izda.), 2 cubos (figura 11, centro) y 3 cubos (figura 11, dcha.). En total, son 6 cubos que completan las $64 = 4^3$ unidades del cubo de arista 4 (figura 11, pág. siguiente).

Hemos levantado el cubo de arista n sumando los cuadrados desde 1 hasta n, dos veces la suma de cuadrados desde 1 hasta $n-1$ y añadiendo también la suma de los números naturales desde 1 hasta $n-1$.

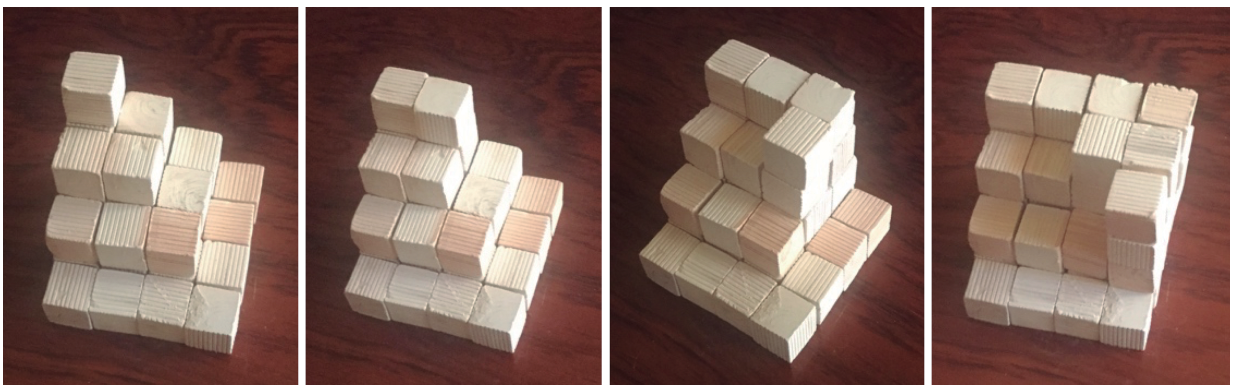

Figura 9. Pirámide de $1^2+2^2+3^2+4^2$ unidades (izqda.) a la que se añaden 1^2, 2^2 y 3^2 unidades

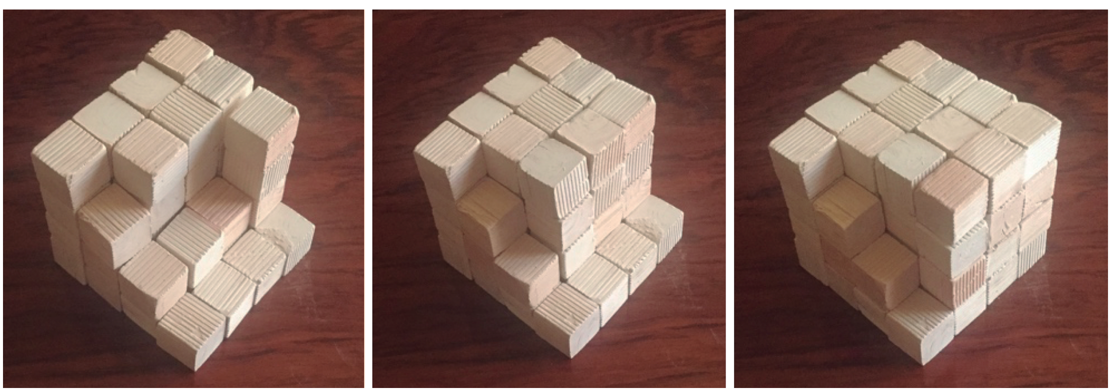

Figura 10. Añadimos de nuevo otras unidades: 1^2 (izda.) 2^2 (centro) y 3^2 (dcha.)

Dado que ya conocemos la suma de los $n–1$ primeros números naturales, llamando S_n a la suma de los cuadrados des de 1 hasta n podemos escribir:

$$n^3 = S_n + 2\cdot S_{n-1} + \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

Pero como:

$$S_n = S_{n-1} + n^2$$

Tenemos:

$$n^3 = n^2 + 3\cdot S_{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}$$

Despejando S_{n-1}:

$$S_{n-1} = \frac{n^3 - n^2}{3} - \frac{n^2 - n}{6} = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$$

Es decir:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(2n^2 - 3n + 1)}{6}$$

Para la suma hasta n substituimos todas las n de esta expresión por $n+1$ y simplificamos:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Con álgebra hemos obtenido una expresión cerrada, sin puntos suspensivos, de la suma de los cuadrados. No es una demostración rigurosa de la igualdad, pues se basa en una conjetura experimental, pero está cerca de la demostración por el método de inducción en el que se basaría una prueba en el ámbito formal. Ello no impide valorar el resultado inspirado en la realidad cotidiana por ser ahí donde nace la inducción.

¿Cuántos cuadrados hay en una hoja de papel cuadriculado?

Nada más cotidiano que una hoja de papel DIN A4. Casi tan cotidiano como ella lo es también una hoja de papel DIN A4 cuadriculada. Cabe preguntarse cuántos cuadrados hay en una hoja de papel cuadriculado como las utilizadas por millones de escolares en todo el planeta. Esas cuadrículas componen un rectángulo de 54×36 celdas. El mayor cuadrado posible es uno de 36×36. Veámoslo con mayor claridad organizando los datos (tabla 2).

Cuadrados	¿Cuántos hay?
1x1	(54–0)·(36-0)=54·36=1944
2x2	(54–1)·(36-1)=53·35=1855
3x3	(54–2)·(36-2)=52·34=1768
4x4	(54–3)·(36-3)=52·33=1683
…	…
28x22	(54–35)·(36-35)=18·1=18

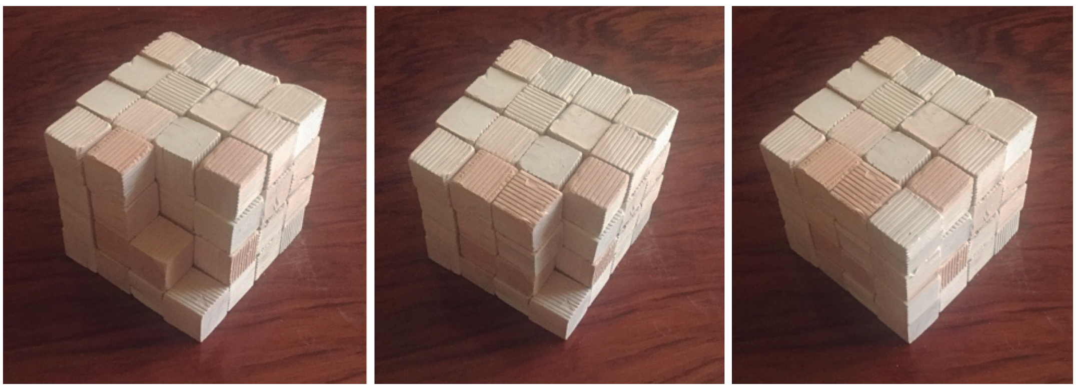

Figura 11. Solo faltan añadir dos (izquierda) y tres unidades (centro) para completar el cubo de arista 4 (derecha)

En total, son 1944+1855+1768+1683+…+18 cuadrados. Si el rectángulo es de $m\times n$ celdas, con $m>n$, y llamamos $S_{m>n}$ a la suma total:

$$S_{m>n}=\sum_{k=0}^{n-1}(m-k)\cdot(n-k)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(mn-kn-mk+k^2\right)=$$
$$=mn^2-(m+n)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}k+\sum_{k=0}^{n-1}k^2$$

Teniendo en cuenta que los valores de estas dos sumas ya fueron calculados y simplificando:

$$S_{m>n}=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(3m-n+1)}{6}$$

Para $m=n$ esta expresión se convierte en la de la suma de los cuadrados. Aplicándola al caso de $m=53$ y $n=36$ (53×36 celdas), obtenemos los cuadrados en una hoja cuadriculada: 28 194.

Conclusiones

Generales

La incitación al planteamiento de nuevos problemas es una de las 12 competencias básicas del ámbito matemático. Concretamente, la cuarta de la primera dimensión competencial (Resolución de problemas). En matemáticas, cada resolución de un problema supone un trampolín para el planteamiento de uno nuevo. El modo más natural de hacerlo es mediante la ampliación o generalización. En el estudio expuesto los estudiantes mostraron dificultades para hacerse nuevas preguntas de carácter matemático. No es raro que las que finalmente propusieron estuviesen centradas en cuestiones propias del entorno matemático trabajado recientemente: la estadística y el cambio de expresión (numérica y figurativa) de un todo y sus partes (fracciones y porcentajes).

Pero no solo dentro del ámbito matemático encontramos excusas para plantear problemas. La observación y el análisis de la realidad puede inspirarlos. Al hacerlo, no estamos aplicando conocimiento matemático a la realidad, sino al contrario, sirviéndonos de esta para generar matemáticas.

Obsérvese lo útil que resulta organizar los datos en una tabla para hacer visibles las relaciones existentes entre ellos (identificación de un patrón) y que son las que nos darán pistas de la estrategia a seguir. Si los datos son los elementos de trabajo para resolver un problema, las relaciones entre ellos indican qué es lo que hay que hacer cuando no se sabe qué hacer con ellos. He ahí un modo de empezar. Relacionar una montaña de frutos con una tabla de datos numéricos es la asociación fundamental para relacionar matemáticas con realidad. No hace falta mucho para ello, basta con pararse a observar esa distribución espacial, contar los niveles de la montaña, contar los frutos en cada uno de ellos y sacar ahí mismo las primeras conclusiones: pirámide de base cuadrada o rectangular cuyos lados disminuyen a cada nivel según un patrón. Si la base es cuadrada, el total de frutos es una suma de cuadrados.

Competenciales

El proceso dialógico y las resoluciones desarrolladas aquí ponen de manifiesto la intervención de las doce competencias básicas del ámbito matemático (CBAM) según el documento marco en Cataluña editado por Gencat (2017). La primera solución elemental al problema se fraguó tomando como sinónimos los términos cuadrado y casilla, pero no fue hasta que esa sinonimia fue invalidada que el problema fue realmente comprendido y su enunciado pasó a ser enteramente matemático (CBAM 1).

La organización del recuento de los cuadrados de diferentes medidas en una tabla de datos volvió a demostrar lo útil que resulta esta estrategia de resolución de problemas (CBAM 2 y 5). Gracias al cambio de representación entre el lenguaje visual geométrico (tablero de ajedrez) y el tablero numérico (tabla de datos) se hizo visible la relación subyacente (CBAM 9) que condujo a la resolución del problema. Todo fue posible mediante el diálogo filosófico (CBAM 5, 6, 10 y 11). Incluso permitió ensayar estrategias diversas (CBAM 3) y formular nuevas cuestiones (CBAM 4).

Ese fue el contenido didáctico de la sesión de clase. El desarrollo posterior elaborado relacionando contextos tan diversos como la frutería y la geometría espacial facilitó nuevas dimensiones competenciales (CBAM 6, 7, 8). Por último, la formalización algebraica es la única que permite cerrar todas esas cuestiones (CBAM 12) y declarar el problema como acabado tras utilizar las relaciones entre diferentes partes de las matemáticas (CBAM 7), unas relaciones que destacan, al estilo de Polya (1988), la adaptación de la estrategia de resolución de un problema sencillo a otro más complejo.

Aprender a pensar matemáticamente

La dificultad del problema planteado no tiene por qué asociarse a un nivel educativo determinado, sino que puede plantearse en diferentes niveles y resolverse con los recursos propios de cada nivel, sean estos del tipo que sean (materiales, digitales, manipulables o de pensamiento). Desde el ciclo inicial de Primaria (ámbito educativo donde se desarrolló el video que dio origen al problema) hasta el ámbito universitario es un problema muy rico porque la pregunta que plantea invita a interpretarse con diferentes grados de profundidad. E incluso, incitar nuevas preguntas: ¿existe una expresión cerrada para la suma de la serie de los cubos? ¿y para la suma de cualquier serie de potencias?

Lo expuesto puede ilustrar cómo se piensa matemáticamente, cómo puede aprenderse a hacerlo y cómo puede gestionarse dicho aprendizaje. La mayoría de estudiantes no han aprendido a pensar matemáticamente, pues ante cualquier pregunta tienden a ofrecer siempre una respuesta, por inverosímil que sea. Nunca callan o admiten desconocimiento. La mayoría de decisiones en su vida las toman otros por ellos, generalmente sus progenitores. Por ser menores, tampoco se les exigen responsabilidades relevantes. Y además, tienden a tomar como fuera de la realidad vital las habilidades de pensamiento que aprenden en el ámbito académico. Lo que sucede en la escuela o en el instituto se queda ahí, raramente se le atribuye la importancia suficiente como para ser incorporado a su personalidad.

Pensamos desde que nacemos, pero no se nace pensando matemáticamente. Las habilidades de pensamiento matemático suelen aprenderse en la escuela y nada tienen que ver con creencias apriorísticas. Suelen verse rechazadas al suponer, no ya un esfuerzo mental, sino un cambio de pensamiento, una transformación del yo. Creer es cómodo; pensar críticamente, no. El creyente queda exento de responsabilidad, pues asume verdades ajenas. La responsabilidad del pensador crítico es extraordinaria porque no solo cuestiona las creencias de los demás, sino también, este es el quid de la cuestión, las de uno mismo.

Referencias bibliográficas

GenCat (2017), *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*, Servei de Comunicació i Publicacions, Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, Barcelona.

Polya, G. (1988), *How To Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press.

Miquel Albertí Palmer
Institut Vallès (Sabadell)
<alberti.miquel@gmail.com>