Surfeando la ola de Agnesi

Josep Lluís Pol i Llompart

SUMA+ núm. 93
pp. 9-17
Artículo recibido en *Suma* en enero de 2019 y aceptado en octubre de 2019

Este artículo rinde homenaje a Maria Gaetana Agnesi. Después de una introducción en la que se revisa sucintamente su biografia y su formación matemática, se pasa a estudiar la curva por la cual se le recuerda. Se procede a su construcción original y se hace un estudio analítico detallado como el que debería poder hacer un alumno de Bachillerato. Así mismo se compara con la campana de Gauss y se plantean las figuras resultantes de su rotación en torno a los ejes de coordenadas. Finalmente se dejan abiertas una serie de preguntas para el lector.

Palabras clave: Historia, Análisis, Curva de Agnesi.

Surfing on the Agnesi's wave // This article pays tribute to Maria Gaetana Agnesi. After an introduction in which his biography and mathematical training are succinctly reviewed, it goes on to study the curve by which she is remembered. The original construction and a detailed analytical study is carried out, such as what a student of High School should be able to do. Likewise, and the curve is compared with the Gauss bell. Finally, a series of questions are left open for the reader..

Keywords: History, Analisis, Curve of Agnesi.

> Soave sia il vento, tranquilla sia l'onda…
> (Così fan tutte, W. A. Mozart)

Recientemente se celebró el 300 aniversario del nacimiento (16 de mayo de 1718) de una de las matemáticas más brillantes de la historia, Maria Gaetana Agnesi, coetánea de Mozart.

Justo es que le dediquemos unas páginas.

Agnesi, la persona

Maria Gaetana fue la mayor de 21 hijos que Pietro Agnesi tuvo fruto de sus tres matrimonios. Su madre era Anna Fortunato Brivio, miembro de una familia de la nobleza italo-húngara y su padre, un rico comerciante de seda. Gracias a ello, Maria Agnesi se pudo formar al abrigo de un ambiente acomodado y culto. Sus progenitores, sensibles a un talento extremadamente precoz, le procuraron una formación científica, filosófica y religiosa que para cualquier otra mujer de su tiempo hubiera sido impensable.

Figura 1. Cartel conmemorativo del tercer centenario del nacimiento de Agnesi (Fotografías y diseño: J. L. Pol)

Sus hazañas intelectuales abren la puerta de los biógrafos a las exageraciones, pero parece cierto que su gusto por la argumentación y una facilidad para las lenguas fuera de lo común hicieron que, ya adolescente, pudiera mantener una conversación académica, en italiano, francés, alemán, español, latín, griego y hebreo. Ha hecho fortuna histórica, también, la publicación de su primer ensayo filosófico en latín sobre el derecho de las mujeres a la educación, aunque pueda tratarse de un ejercicio o de una traducción propuesta por su tutor.

Sus estudios estuvieron siempre vinculados a la religión, no en vano en ese siglo la religión y la ciencia iban aún de la mano (no se pueden entender los *Principia Mathematica* de Newton si no es a la sombra de este paradigma). A medida que se fue haciendo mayor, su dedicación altruista y el estudio de las Sagradas Escrituras fueron ganando terreno a las otras dedicaciones.

No está claro si llegó a profesar como monja agustiniana, como era su deseo de joven. Poco antes de la muerte de su padre, se habría comprometido a no enclaustrarse y hacer de madre para sus hermanos y hermanas, aunque solo cuatro superaron la infancia. Sea como fuere, en 1771 pasó a dirigir un hospicio en Milán, especialmente dedicado a mujeres enfermas o desahuciadas, donde ella misma moriría el 9 de enero de 1799 a la edad de 80 años.

Agnesi, matemática

Maria Gaetana tuvo, probablemente, los mejores profesores de Milán. Entre ellos, matemáticos de la talla de los jesuitas Saccheri y Ricatti (este, matemático como su padre Jacopo Francesco). Las matemáticas eran una de sus pasiones y tuvo acceso a la bibliografía más relevante de ese momento, como eran las obras de Leibniz, Newton o L'Hôpital.

En su etapa de plenitud intelectual, de los veinte a los treinta años, trabajó de manera intensa en el campo del cálculo diferencial y publicó en Milán, en 1748, los dos volúmenes de su obra principal: *Instituzioni*

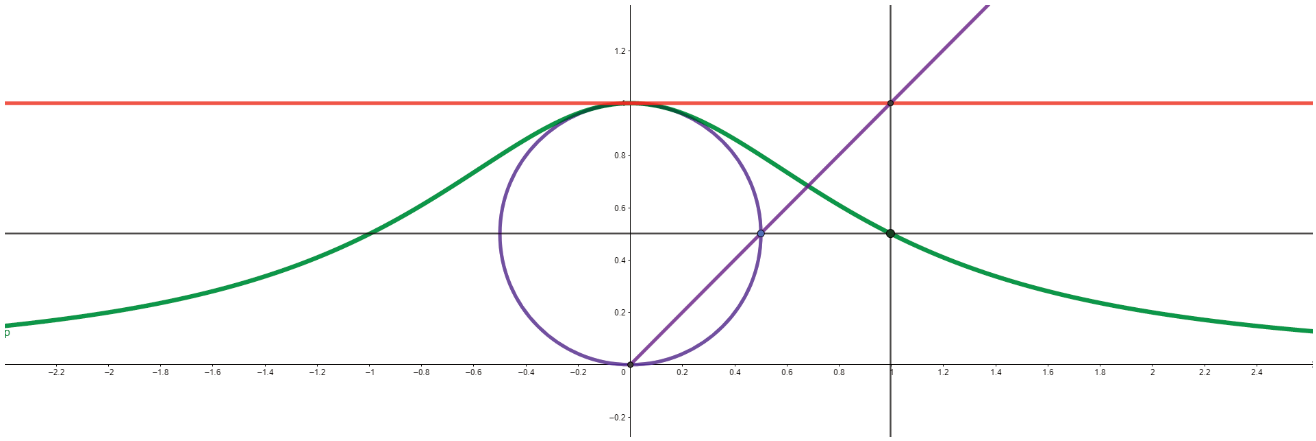

Figura 2. La curva de Agnesi

analítiche ad uso della gioventù. Esta obra, en dos volúmenes, es un magnífico esfuerzo de síntesis del álgebra y del cálculo diferencial e integral de ese momento de manera que, en muy poco tiempo, fueron traducidos al francés y al inglés y rápidamente se convirtieron en manuales universitarios de referencia.

Un año después de esta publicación, en 1749, el papa Benedicto XIV la propuso para enseñar matemáticas en la Universidad de Bolonia, lo que no llegó a aceptar nunca. Cuando su padre murió, en 1752, Maria Gaetana había decidido ya dedicarse en cuerpo y alma a la caridad.

La curva de Agnesi

El nombre de la matemática milanesa permanece ya indefectiblemente unido al de esta curva, una racional de tercer orden. El azar de una mala traducción ha contribuido también, sin duda, a hacerla perdurable a lo largo de los siglos. La curva se encuentra explicada en sus *Instituzioni*. Es allí donde se describe esta *versiera*, palabra de etimología latina acuñada por Guido Grandi. Pero se da el caso de que esta palabra también es la forma abreviada de *aversiera*, que en esta última acepción significa bruja. En la traducción histórica al inglés del libro mencionado, la *versiera* pasa a ser *the witch of Agnesi* (la bruja de Agnesi).

Se sabe que esta curva ya había sido estudiada antes por Pierre de Fermat (siglo XVII) y por dicho Grandi en 1703. Maria Gaetana la obtuvo a partir de su planteamiento geométrico, es decir, como lugar geométrico de los puntos que satisfacen determinadas condiciones. La expresión algebraica que obtiene, intercambia los ejes cartesianos.

El planteamiento es el siguiente: entre dos rectas paralelas separadas por una distancia a trazamos una circunferencia tangente a ambas. Consideramos una de las rectas como eje de abscisas con el origen de coordenadas en el punto de tangencia, por lo que la ecuación de la otra paralela será $y = a$. Se hace girar una semirrecta con origen en el centro de coordenadas, dentro del intervalo angular (0, 180º) que irá cortando todos los puntos de la circunferencia. Así, la curva de Agnesi (figura 2) es el lugar geométrico de los puntos cuya abscisa es la misma que la abscisa del punto de corte entre la semirrecta y la recta $y = a$ y la ordenada, la misma que la ordenada del punto de corte (diferente de cero) entre la semirrecta y la circunferencia (y que por tanto variará dentro del intervalo $(0, a]$).

Obtener su expresión analítica es relativamente sencillo. Para ello, consideremos las ecuaciones de la (semi)recta variable (1) de origen $O(0,0)$, la recta (2) paralela al eje OX y tangente a la circunferencia (3) de centro $C(0, a/2)$ y radio $a/2$:

$$y = mx \qquad (1)$$
$$y = a \qquad (2)$$
$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \qquad (3)$$

La abscisa del lugar geométrico se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$x = \frac{a}{m}.$$

La ordenada del lugar geométrico se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (3):

$$y = \frac{am^2}{1+m^2}.$$

Por último, eliminamos el parámetro *m:*

$$y = \frac{a^3}{x^2+a^2}.$$

Construyendo la ola de Agnesi

La curva de Agnesi es ideal para representar, para jugar, para examinar a fondo, en definitiva, para hacer un trabajo exhaustivo con alumnos de 2.º de Bachillerato. He aquí algunos planteamientos.

Actividad 1
Utiliza el GeoGebra para generar la curva de Agnesi.

No debe hacerse a partir de la expresión analítica, sino a partir del planteamiento geométrico (para ello hay que activar la función trazo del punto obtenido).

Actividad 2
Imprime la curva obtenida para un intervalo de abscisas aproximado de (-3*a*, 3*a*) en un folio apaisado. Toma ahora un alambre, construye la curva dibujada y coméntala con tus compañeros.

Aquí deberían salir muchas de las características de la curva: que es continua, infinita, simétrica, que presenta un máximo para $x=0$, que tiene una asíntota en $y=0$, que presenta dos puntos de inflexión…

Actividad 3
A partir de la curva construida, con un rotulador permanente, intenta localizar visualmente el máximo, los puntos de inflexión (basta uno de ellos), y los puntos de máxima curvatura (si es que hay más de uno). Márcalos en el papel impreso sobre la cuadrícula cartesiana.

Con esta actividad se intenta hacer un trabajo puramente geométrico, totalmente exento de álgebra.

Actividad 4
Haz el cálculo teórico de los puntos marcados en la actividad 3 y comprueba su coincidencia.

Aquí el alumno deberá usar las tres derivadas sucesivas para comprobar su pericia como observador de puntos singulares.

— Máximo relativo (y absoluto) para $x=0$ (cálculo de la 1.ª derivada):

$$y' = \frac{-2a^3x}{\left(x^2+a^2\right)^2}.$$

— Puntos de inflexión para $x=a/\sqrt{3}$ (y su simétrico) (cálculo de la 2.ª derivada):

$$y'' = \frac{2a^3\left(3x^2-a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^3}.$$

— Puntos de máxima curvatura para $x=0$ (convexa, valor de curvatura negativo, mínimo absoluto) y para $x=\pm a$ (cóncava, valores de curvatura positivos, máximos absolutos pero de menor curvatura absoluta que el primero) (cálculo de la 3.ª derivada):

$$y''' = \frac{-24a^3x\left(x^2-a^2\right)}{\left(x^2+a^2\right)^4}.$$

Es muy posible que los puntos de máxima curvatura sean difíciles de entender como derivada de la función curvatura, pero de ninguna manera se pueden dejar de entender a partir del aspecto geométrico constructivo (allí donde se dobla más el alambre respecto de los puntos vecinos). También es importante ver y remarcar que los puntos de curvatura nula son, efectivamente, los puntos de inflexión.

La labor de reflexión se facilita en gran medida si se construye la tabla de valores de las diferentes derivadas sobre una hoja de cálculo:

	Curva de Agnesi		*a* = 1	
abscisa *x*	ordenada *y*	pendiente *y′*	curvatura *y″*	*y‴*
0,000	1,0000	0,0000	−2,0000	0,0000
0,100	0,9901	−0,1961	−1,8829	2,2607
0,200	0,9615	−0,3698	−1,5646	3,7874
0,300	0,9174	−0,5050	−1,1274	4,2584
0,400	0,8621	−0,5945	−0,6663	3,8394
0,500	0,8000	−0,6400	−0,2560	2,9491
0,577	0,7502	−0,6495	−0,0010	2,1955
0,600	0,7353	−0,6488	0,0636	1,9808
0,700	0,6711	−0,6306	0,2842	1,1667
0,800	0,6098	−0,5949	0,4171	0,5826
0,900	0,5525	−0,5494	0,4823	0,2113
1,000	0,5000	−0,5000	0,5000	0,0000
1,100	0,4525	−0,4504	0,4873	−0,1052
1,200	0,4098	−0,4031	0,4571	−0,1465
1,300	0,3717	−0,3593	0,4182	−0,1528
1,400	0,3378	−0,3196	0,3763	−0,1420
1,500	0,3077	−0,2840	0,3350	−0,1241
1,600	0,2809	−0,2525	0,2961	−0,1048
1,700	0,2571	−0,2247	0,2606	−0,0866
1,800	0,2358	−0,2002	0,2288	−0,0706
1,900	0,2169	−0,1788	0,2007	−0,0572
2,000	0,2000	−0,1600	0,1760	−0,0461
2,100	0,1848	−0,1435	0,1545	−0,0371
2,200	0,1712	−0,1290	0,1358	−0,0298
2,300	0,1590	−0,1163	0,1195	−0,0241
2,400	0,1479	−0,1050	0,1054	−0,0194
2,500	0,1379	−0,0951	0,0932	−0,0157
2,600	0,1289	−0,0864	0,0825	−0,0128
2,700	0,1206	−0,0786	0,0733	−0,0104

Si ahora analizamos un poco más los puntos singulares veremos que su nombre les hace justicia. En el caso de los puntos de inflexión, estos se producen para:

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Esto significa que las pendientes de las semirrectas generatrices son:

$$m = \pm\sqrt{3}.$$

Es decir, que forman los ángulos de 60° y 120° con el sentido positivo del eje de abscisas.

En el caso de los máximos relativos de curvatura, si se producen para:

$$x = \pm a.$$

Esto significa que los ángulos de las semirrectas son en este caso 45° y 135°.

¡Singularidad y belleza matemática!

Hasta el infinito y más allá

Para que el homenaje a la matemática milanesa sea completo, debemos animarnos a estudiar las integrales relacionadas con esta curva. Y aquellas despertarán, en las mentes más abiertas, buenas preguntas.

Actividad 5
¿Cuál es el área que delimitan el eje de abscisas y la curva de Agnesi?

La integral es casi inmediata, el resultado, sorprendente. El área englobada coincide con la superficie de la esfera que tiene el mismo radio que la circunferencia generatriz.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2}\,dx = \left[a^2 \cdot \arctan\frac{x}{a}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi a^2 = 4\pi r^2.$$

Una buena manera de recordar este hecho, es construir la curva de Agnesi a partir del diámetro de una naranja (lo más esférica posible) y probar de cubrir el área cercada con su piel. Es importante caer en la cuenta que el área calculada está bajo una función asintótica y que, por tanto, aunque se alargue infinitamente, aunque el perímetro de la región sea infinito, el área no lo es.

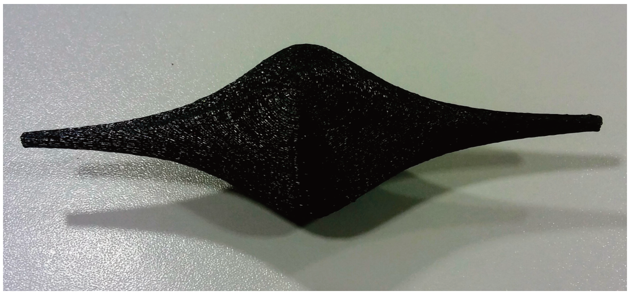

Figura 2. Huso de Agnesi

Actividad 6. *El huso de Agnesi*

Llamamos así a la figura de revolución que se produce cuando hacemos girar la curva de Agnesi en torno del eje de abscisas.
¿Cuál es su volumen?

El cálculo pasa por calcular la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{a^3}{x^2+a^2}\right)^2 dx=\left[\frac{\pi a^3\cdot\arctan\frac{x}{a}}{2}+\frac{\pi a^4 x}{2\left(x^2+a^2\right)}\right]_{-\infty}^{+\infty}.$$

Esta no es, ciertamente, una integral fácil de resolver y habría que dar al alumno, la fórmula de una integral tipo, al menos de este estilo:

$$\int\frac{1}{\left(ax^2+b\right)^n}dx=$$
$$=\frac{2n-3}{2b(n-1)}\int\frac{1}{\left(ax^2+b\right)^{n-1}}dx+\frac{x}{2b(n-1)\left(ax^2+b\right)^{n-1}}.$$

El resultado de la integral es:

$$\frac{\pi^2 a^3}{2}.$$

O sea, que el volumen del huso es tres pi veces el volumen de la esfera de diámetro a (pensemos que la máxima anchura del huso, puesto vertical, es $2a$).

Figura 3. Plato de Agnesi

Actividad 7. *El plato de Agnesi*

Llamamos así a la figura de revolución que se produce cuando hacemos girar la curva de Agnesi en torno del eje de ordenadas.
¿Cuál es su volumen?

Hemos dicho, al presentar la curva, que Agnesi escribió la expresión analítica intercambiando los ejes, es decir, colocándola en vertical (de manera que estrictamente hablando, entonces, no sería una función). Su expresión sería:

$$y=\sqrt{\frac{a^3}{x}-a^2}.$$

Entonces, si volvemos a hacer girar la curva respecto del eje de abscisas, la figura que aparece se parece mucho a una escudilla de aceras infinitas. Una bola de diámetro a en su interior marcaría la altura máxima para que algún tipo de líquido no llegara a rebosar.

En este caso, la integral de revolución presenta la forma:

$$\int_0^a \pi\left(\sqrt{\frac{a^3}{x}-a^2}\right)^2 dx=\left[a^2\left(a\cdot\ln|x|-x\right)\right]_0^a.$$

Que vuelve a ser una integral fácil de resolver. En este caso, el resultado es… ¡infinito!

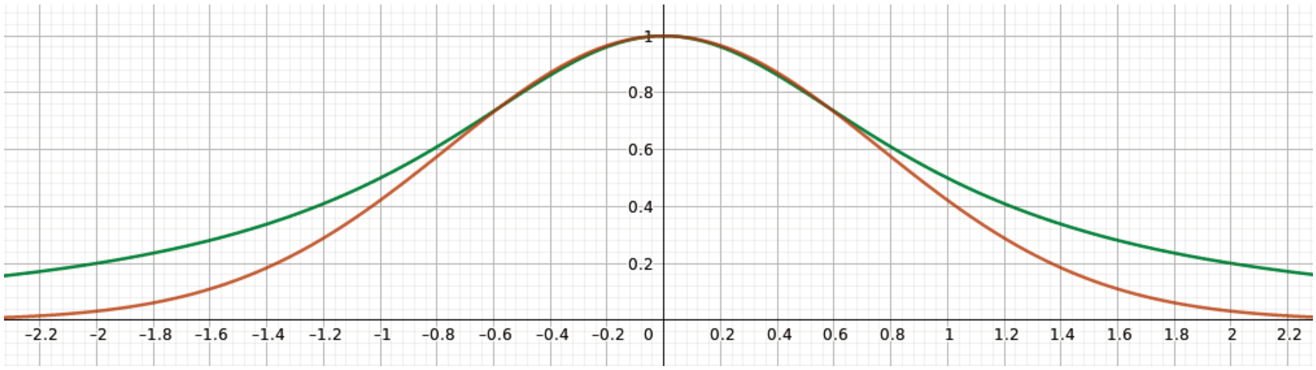

Figura 4. Curvas de Agnesi y de Gauss con los mismos puntos de inflexión

Agnesi-Gauss, un maridaje difícil

Cuando uno mira la curva de Agnesi por primera vez, es inevitable la referencia visual a la campana de Gauss. Ambas son simétricas, las dos son continuas y presentan una asíntota para $y=0$, las dos presentan un máximo absoluto, etc. Este paralelismo nos brinda un ejercicio muy interesante de comparación analítica. ¿Hasta qué punto pueden llegar a ser similares las dos funciones?

Sabemos que la función gaussiana depende de tres parámetros: un factor de proporcionalidad vertical a, una constante de desplazamiento horizontal b, y un tercer factor de «estiramiento horizontal» d (expresado habitualmente como $2c^2$):

$$y = a \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{d}}.$$

Para comparar las dos funciones, es lógico imponer que tengan la misma altura. Entonces la a de Gauss, será exactamente la a de Agnesi. La campana de Gauss la presentaremos centrada sobre los ejes de coordenadas, por lo que $b=0$. Nos queda definir el parámetro d.

Una primera idea, podría ser imponer la condición de que los puntos de inflexión de las dos curvas sean coincidentes. Si la abscisa de estos puntos era entonces:

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$$

entonces la ordenada será $y = 3a/4$. Por lo tanto, tendremos que imponer la condición de que:

$$a \cdot e^{-\frac{x^2}{d}} = \frac{3a}{4}$$

que hace que:

$$d = \frac{a^2}{3 \cdot \ln\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

Las curvas que obtenemos de esta manera, son las que aparecen en la figura 4 (en verde la onda de Agnesi).

Hagamos ahora un segundo intento de casarlas imponiendo la condición de que, teniendo la misma altura, también tengan la misma área bajo la curva. Es decir, que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a \cdot e^{-\frac{x^2}{d}}\, dx = \pi a^2.$$

Esta es una integral que escapa a las competencias de cálculo de 2.º de Bachillerato, pero que presenta un resultado muy curioso:

$$d = \pi a^2.$$

Ahora, la nueva curva de Gauss comparada con la de Agnesi es la que aparece en la figura 5.

Figura 5. Curvas de Agnesi y de Gauss con la misma área bajo la curva

No es sencillo, pues, ajustar las dos curvas. Quizás el hecho de que cuando el príncipe de las matemáticas nació (Braunschweig 1777) Maria Gaetana tuviera ya 59 años, sea una barrera generacional difícil de franquear.

Algunas reflexiones y nuevas preguntas

A menudo los alumnos de bachillerato adquieren una cierta destreza en la derivación y en la integración de funciones, sin que ello implique necesariamente un grado paralelo de comprensión sobre lo que están haciendo. La preparación para la selectividad y los modelos de examen que hasta ahora se han propuesto (al menos en algunas comunidades) ciertamente no ayudan en este camino. También tengo la impresión de que la lenta introducción de las calculadoras gráficas (o tablets, u ordenadores…) no viene acompañada de una ejercitación diferente en el sentido mencionado.

La riqueza de conceptos en la relativa sencillez de la ola de Agnesi es una magnífica ocasión para ayudar a los alumnos a encontrar el sentido geométrico de las operaciones analíticas de las que, como ya hemos dicho, acaban siendo unos buenos… técnicos.

Construir la curva con un alambre no es en absoluto una actividad menor, sino que se convierte en una actividad llena de sentido bajo el paraguas del viejo paradigma de la manipulación. Pasan por los dedos los máximos, los puntos de inflexión, las curvaturas…

Recubrir la superficie bajo la curva con la piel de una naranja, a pesar de la imposibilidad de un trabajo fino en este sentido, permite un nexo visual perdurable entre la superficie de una esfera y el área estudiada.

Construir modelos reales de las figuras estudiadas permite, también, el conocimiento de oficios íntimamente relacionados como los de alfarero o tornero, y de nuevas posibilidades como las que tenemos al alcance con una —ya asequible— impresora 3D.

Después de todo este trabajo, el alumno debería ser capaz —desde la doble perspectiva de la generación geométrica y de la expresión analítica— de responder a preguntas como:

- ¿Por qué la curva presenta un máximo absoluto?
- ¿Por qué es continua?
- ¿Por qué presenta la asíntota horizontal?
- ¿Por qué es simétrica respecto del eje de ordenadas?
- ¿Cuál es el rango de valores que puede tomar la pendiente de la recta tangente en un punto?
- Dado un valor para esta pendiente, se repetirá en algún otro punto?
- ¿Dónde está el valor máximo de la pendiente?

Y, acaso, llegar a formularse preguntas de más envergadura como:

- ¿Por qué los puntos de inflexión y la máxima curvatura relativa presentan ángulos de la semirrecta generatriz tan singulares como 45° y 60°?
- ¿Qué pasa con las características de la curva (altura, puntos singulares, pendientes, área, vo-

lúmenes…) si cambiamos el valor de *a*? ¿Cuáles cambian y cuáles no?

— ¿Por qué el volumen del huso, aunque se extiende hasta el infinito, es finito, mientras que el volumen de la escudilla, alrededor también al entorno de una asíntota, es infinito?

Referencias bibliográficas

Álvarez, J. M. (2006), *Curvas en la historia 1*, Nivola, Madrid.

Bayer, P. (2018), *Notas de la conferencia Las lectoras de Newton*, Universitat de les Illes Balears, Palma, 15 de mayo de 2018.

Maria Gaetana Agnesi (s. f.), Wikipedia, (interesante comparar varias lenguas). Consultada en diciembre de 2018, <https://es.wikipedia.org/wiki/Mar%C3%ADa_Gaetana_Agnesi>.

O'Connor, J. J., y E. F. Robertson (1999), «Maria Gaëtana Agnesi», MacTutor History of Mathematics Archive, University of Saint Andrews, Scotland. Consultada en diciembre de 2018, <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Agnesi.html>.

Josep Lluís Pol i Llompart
Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic
CentMat (Palma)
<joseplpol@xeix.org>