DEL MMACA AL AULA

Pequeñas experiencias matemáticas

MMACA

SUMA+ núm. 93
pp. 67-76
Artículo solicitado por *Suma* en diciembre de 2019 y aceptado en febrero de 2020

Cuando hablamos de niños pequeños, generalmente no estamos tan seguros de saber qué hay que hacer para enseñarles matemáticas. De hecho, cuando en el MMACA abrimos la sala María Montessori, en la planta baja del Palau Mercader, dudamos mucho en qué material poner y por eso hicimos un primer pilotaje con diferentes centros de primaria que nos indicaron algunos detalles a mejorar.

Una vez tuvimos decidido el material, teníamos claro que hacía falta acompañarlo de un ambiente acogedor y estimulante a la vez, por eso nos decidimos a usar los dibujos premiados en el Concurs de Dibuixos Matemàtics de ABEAM. Además de ser un elemento decorativo de gran calidad, resulta ser un material para trabajar en las aulas desde un punto de vista diferente. Solo hay que mirar algunas de las presentaciones de los actos de reparto de premios con sus comentarios añadidos y los recursos empleados con GeoGebra u otras herramientas para comprobar y verificar los títulos que proponen los pequeños participantes.

Pero hablemos de las propuestas del MMACA, inicialmente no habíamos pensado ningún módulo de cálculo, dando por supuesto que ya se trabajaba sobradamente en las escuelas, pero la petición de los maestros y maestras nos hizo pensar en un material muy sencillo pero con una gran cantidad de cálculo detrás. Estamos hablando del *De 4 a 12*. Se trata de

Figura 1. Dibujos matemáticos

tirar dos dados y sumar los valores obtenidos para, después, repartir las 4 bolas en las tres cajas numeradas del 1 al 3 que tenemos, de manera que cada bola adquiere el valor de la caja donde se sitúa, teniendo que coincidir el total con la suma de los dos dados (figura 2). Este módulo ya se introdujo en *Suma*, n.º 89, 38-39, planteando algunas variedades.

Con este módulo las caras de sorpresa son habituales, se encuentran con descomposiciones distintas de un mismo número y, además, el hecho de tener dos juegos de cajas encaradas, hace que no sirva copiar al compañero.

Estudiemos las diferentes sumas que se pueden obtener con dos dados y las descomposiciones posibles:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figura 2. De 4 a 12

Como vemos, aparecen todos los valores del 4 al 12, pero ¿cómo podemos obtener los valores 1, 2 y 3 usando cuatro bolas con valores del 1 al 3? Imposible, precisamente por eso lo llamamos *De 4 a 12*.

Veamos ahora cómo podemos situar las bolas en cada caso. Calculando las diferentes descomposiciones que podemos encontrar sumando cuatro valores entre 1 y 3 tenemos:

$3+3+3+3=12$; $2+2+2+2=8$; $1+1+1+1=4$;
$3+3+3+2=11$; $2+2+2+1=7$;
$3+3+3+1=10$; $2+2+1+1=6$;
$3+3+2+2=10$; $2+1+1+1=5$;
$3+3+2+1=9$;
$3+3+1+1=8$;
$3+2+2+2=9$;
$3+2+2+1=8$;
$3+2+1+1=7$;
$3+1+1+1=6$.

No se trata en ningún caso de que el alumnado haga estos cálculos delante del módulo, solo son para los docentes para que vean hasta dónde se puede *alargar* este módulo y que los usen en clase si les parece apropiado. Detalles como que aparecen tres valores de la tabla de multiplicar del 4, también permiten reforzar la idea de multiplicación como suma repetida de valores.

De hecho este módulo se puede completar con el *Cierra la caja (Shut the box)* que tenemos en la sala de cálculo de la planta superior. En aquel caso se trata de lanzar dos dados y sumar sus valores, habiendo de tapar una o dos piezas de las nueve, numeradas del 1 al 9, que tenemos. Se trata de seguir con el reto hasta que no se puedan tapar los números necesarios para la suma obtenida.

En este caso, hay que considerar la probabilidad de que salga cada suma para saber qué valores conviene descartar antes o reservarlos tanto como se pueda.

De la tabla de sumas anterior resulta fácil calcular estas probabilidades, contando cuantas veces aparece cada una:

Suma	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Total	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36

Tenemos 36 resultados, por lo tanto:

P(2) = 1/36; P(3) =2/36 = 1/18; P(4) = 3/36 = 1/18; P(5) = 4/36 = 1/9; P(6) =5/36; P(7) = 6/36 = 1/6; P(8) = 5/36; P(9) = 4/36 =1/9; P(10) = 3/36 = 1/12; P(11) = 2/36 = 1/18; P(12) = 1/36.

Como el 9 solo nos hace falta cuando aparece el 9, 10, 11 o 12, parece claro que conviene sacarlo cuanto antes, el 8 aparece en menos de la mitad de las descomposiciones, etc.

Puede resultar interesante analizar si la estrategia cambia aplicando las nuevas reglas que han inventado los educadores del MMACA: Se permite volver a usar los números que ya se han tapado, por lo tanto siempre habrá un ganador que consiga tapar todas sus cifras.

Pero volvamos a la sala María Montessori. El tratamiento que recibe la geometría en esta sala se basa en materiales bien distintos como espejos, construcciones y tangrams entre otros.

Los espejos que encontramos nos permiten intuir que no todo es simétrico. Haciendo girar una cara de payaso un poco extraña, que se verá duplicada de forma simétrica, aparecen distintas expresiones que nos permiten hablar de este tema. Al estar el espejo elevado respecto de su base, se puede pasar por debajo un móvil muy fino con una foto propia, o una copia en papel, y ver el efecto que causa la simetría en nosotros mismos (figura 3).

Figura 3. Simetrías

Por otro lado, usar las letras mayúsculas, las primeras que aprenden los pequeños en la escuela, también nos permite insistir en el tema de simetría (figura 4). No todas las letras tienen un eje de simetría, algunas incluso tienen dos, por eso resulta divertido intentar escribir su nombre con estas piezas y, a veces, descubrir que no es posible. Con este módulo se consigue una visión del plano y de las figuras desde otra perspectiva.

Figura 4. Letras

El tema de la simetría se puede trabajar también con las piezas para hacer parejas. En realidad son piezas pensadas para que clasifiquen por colores, cantidad y tipo de figura antes de unirlas, pero tal como están diseñadas permiten intuir también temas de simetría (figura 5).

Este material les gusta mucho pues clasificar es una actividad habitual desde muy pequeños. El material se puede complicar si lo que tenemos que unir son piezas no simétricas, inclinando las figuras superpuestas sobre la base por ejemplo, pero resulta muy enriquecedor para el alumnado que lo trabaja, descubren nuevas relaciones en el plano y no paran hasta conseguir todas las parejas.

Puestos a clasificar, podemos hablar de patrones. En la sala tenemos dos módulos que trabajan el tema de patrones, uno es bien conocido por los alumnos por ser similar a lo que hacen en clase y el otro permite llevar más allá la idea de patrón.

En el primer caso disponemos de piezas cúbicas de colores distintos con las que han de crear un patrón y después reproducirlo varias veces: una vez igual que la muestra, otra haciendo efecto espejo respecto a la muestra, otra intercalando los dos tipos, etc. Pero los patrones lineales de este tipo también permiten reforzar la idea de múltiplo, por ejemplo preguntando qué color ocupará la posición 8 (sabiendo que el patrón original es de cuatro piezas), etc.

También se trabaja la observación, cuando una vez reproducido el patrón les cambiamos algunas piezas de sitio y les pedimos que las detecten. Habitualmente les resulta de lo más fácil (figura 6).

En el otro módulo de patrones, la excusa es molestar a una barracuda para que no se coma un pez. Para ello les pedimos que encajen teselas en forma de pez, de manera que no haya dos del mismo color juntos, o que cada tres haya uno verde, etc., de forma que hay que pensar en dos dimensiones, no solo linealmente, cosa que les sorprende.

En clase se puede trabajar el tema de las teselas y cómo obtenerlas a partir de un rectángulo, sería nuestro caso. De hecho lo entienden muy bien, son capaces de ver que si encajan entre ellos es porque son piezas positivo-negativo, es decir, lo que le falta a una le sobra a la otra para poder encajarlas como un puzle.

Para los más mayores (cuarto de primaria), se les puede pedir que cada uno escoja un color de pez y los vayan situando por turnos, para conseguir tres en raya de su color. En este caso se trabajan otros temas como las posibles estrategias, etc., aunque no es necesario insistir en explicaciones sobre el tema, ellos solos deben descubrirlas (figura 7).

Para acabar con el tema de patrones y distribución en el plano, tenemos un último módulo en el que hay que distribuir piezas con círculos de tres colores distintos sobre un tablero con los colores pintados. Al ser piezas con tres colores, los tableros solo admi-

Figura 5. Parejas

Figura 6. Series

Figura 7. Pececitos

ten una solución pero hay piezas que pueden ocupar lugares distintos, se trata de observar la distribución que vamos generando para prever si podremos poner el resto de piezas (figura 8).

Sobre este módulo se pueden hacer muchas variaciones, incluso se puede pedir a los alumnos que diseñen ellos algún tablero, y las piezas, y que comprueben si tiene una única solución o no.

De hecho, si se les asigna a cada niño y niña de la clase una bola de color (los mismos que hay sobre el tablero) se les puede pedir que se agrupen de tres en tres, como las piezas, cogidos de la mano y que se sitúen de manera que completen el tablero. Si lo tenemos pintado en el suelo resulta divertido como quieren cruzarse sin soltarse de la mano, si está colgado en la pared deben fijarse muy bien para no equivocarse de posición. Este ejercicio grupal permite observar comportamientos y actitudes de los alumnos de una forma inmediata.

Algunos módulos no son aptos para los cuatro niveles educativos que pueden acceder a la sala María Montessori, por eso hay que cambiar algunos en función del nivel.

Por ejemplo, para tercero y cuarto ponemos unas torres de Hanoi que les permiten trabajar la recurrencia de una forma absolutamente autónoma puesto que si uno hace trampas el de al lado siempre se lo indica.

Seguramente no hace falta hablar del juego de las Torres de Hanoi, en el que hay que mover una cierta cantidad de círculos de un lugar a otro, de manera que solo podemos mover uno cada vez y no podemos poner uno mayor sobre otro más pequeño (figura 9).

Os proponemos visitar la web de *Recerca en acció*[1] en la que podréis jugar y ver cada movimiento reflejado en un grafo, de forma que la solución óptima será una línea recta y si queremos pasar por todos los movimientos posibles obtendremos un triángulo de Sierpinski, fractal que se puede trabajar en las aulas por su simplicidad de construcción con materiales muy diversos.

También podéis encontrar una variante competitiva en nuestro artículo sobre el juego en *Suma*, n.º 88, 92-94.

Figura 8. Patrones

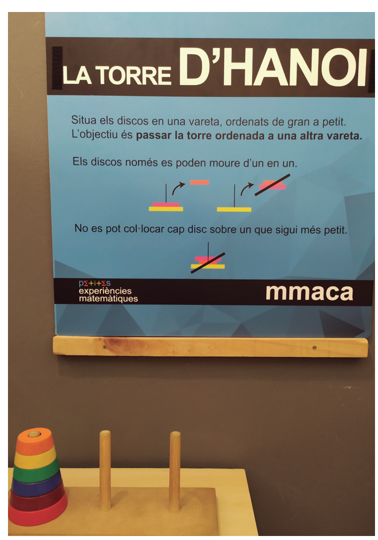

Figura 9. Torre de Hanoi

Otro de los retos que les proponemos son los *Dados de colores* (figura 10). Este material surgió a partir del artículo «El puzzle de los cubos de colores» del Grupo Alquerque, en el n.º 41 de esta revista. A partir de su trabajo se desarrollaron otros posibles puzles que se presentan a los alumnos y se trabajaron todas las posibilidades, incluso su relación con los grafos, material que se encuentra en la *Llicència retribuida: Altres materials per a l'aula de matemàtiques a secundària: Reptes i jocs*[2], bajo el nombre de *Semàfor*. Por lo que no me extenderé. De hecho, Francisco Molina vuelve a hablar de este material en «Solucionando el puzle Instant Insanity» en *Suma* n.º 92.

Si hablamos de distribución espacial y ordenación, también podemos pensar en los rascacielos, que a pesar de estar pensados para público de más edad, hemos comprobado que también son capaces de resolver alguna de las propuestas. Si no, se lo pasan muy bien creando su propia ciudad ordenando los diferentes edificios de colores y alturas distintos (figura 11).

Este módulo necesita de más explicación por ello se ha añadido un caso resuelto para que puedan mirarlo y facilitarles la comprensión.

En *Suma*, n.º 87, 80-82, ya hablamos de este módulo y de cómo usarlo en formato taller, haciendo que el alumnado construya sus propios retos.

Si queréis jugar on-line, en la misma página de *Recerca en acció*[3], o en la del MMACA[4], podréis mover edificios y probar el juego. De hecho, si lo hacéis, podréis descubrir que alinear los edificios al lado de cada fila facilita muchísimo la resolución de los distintos retos. Si además empezáis situando los más altos, no os costará resolverlos.

Partiendo del conocido cubo Soma, del que se puede comprobar que a pesar de sus múltiples soluciones no resulta fácil para la mayoría de las personas, nos planteamos simplificar el problema. Por ese motivo usamos un modelo al que llamamos *Cub 7L* por estar formado por siete piezas en forma de L (figura 12).

Todas las piezas, menos una, son iguales y eso permite situarlas con mucha mayor rapidez, sin tener que pensar en tantas posibilidades de colocación. Construir el cubo no es difícil y hacer otras figuras resulta muy divertido. Inicialmente teníamos unas piezas blandas de gran tamaño pero finalmente lo hemos cambiado por un material de sobremesa para evitar que los alumnos acabasen tumbados o

Figura 10. 4 colores

Figura 11. Rascacielos

Figura 12. Cubo 7L

Figura 13. Circuitos

sentados sobre las piezas en lugar de intentar resolver el reto.

Con este material se trabaja la visión del espacio y el orden para tomar decisiones. También se puede ver cómo aplican el método de ensayo-mejora sin decirles nada.

Tenemos también otros materiales más conocidos pero en formatos mayores para facilitar su manejo a los pequeños matemáticos que nos visitan.

Por ejemplo el Tantrix, usamos piezas de casi un palmo para que consigan los distintos caminos indicados sobre una mesa o sobre el suelo. Limitamos las piezas a las que solo tienen los tres mismos colores para que hagan caminos cerrados de un color, podría ser un solitario pero ellos lo afrontan de forma grupal y *verbalizan* las distintas propuestas directamente con las manos (figura 13). La guía didáctica que podemos encontrar en la web de Tantrix, estuvo revisada por el MMACA.

El Polydron, juego de construcción con piezas planas (triángulos, cuadrados y pentágonos), de gran tamaño, con el que pueden conseguir distintos poliedros o hacer maravillas con las piezas, desde un corral hasta un armario con puertas para meterse dentro.

Los engranajes que acompañan este material también permiten adentrarse en el mundo del movimiento encadenado y descubrir nuevas sensaciones (figura 14).

No podía faltar el Tangram, puzle muy conocido y usado en muchas escuelas pero que planteado con retos de gran tamaño resulta muy efectivo. Los alumnos con más dificultades se atreven a probar con un material conocido y si no pueden resolverlo se les gira la lámina y encuentran la solución detrás. De esta forma todos pueden resolver más de un reto. Además les proponemos que construyan algún dinosaurio, ofreciéndoles también la solución. La intención es

Figura 14. Construcciones geométricas

que reproduzcan imágenes geométricas con distintos polígonos, es un buen momento para usar los nombres de estos polígonos y que puedan comparar el tamaño de las distintas piezas (figura 15).

Sobre tangram hay mucho escrito y solo nos queda decir que resulta muy útil cortarlo plegando papel para ver la relación de tamaño que hay entre las distintas piezas y, después, usar esta relación para resolver nuevos retos, quizás con alumnos un poco más mayores.

Desde hace unos meses hemos incorporado para los más pequeños, 6-7 años, las *Geocares* (figura 16). A partir de un diseño de nuestros compañeros de Girona, se trata de rodear cada cara con las piezas que la conforman. También se pueden unir entre ellas, embaldosando. Nos parece una excelente manera de introducir las figuras geométricas y sus nombres para los más peques. Usar todas las piezas en un solo puzle puede resultar complicado.

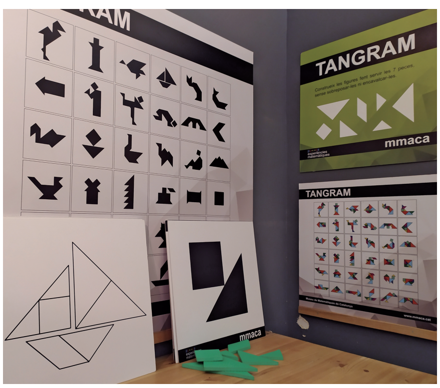

Figura 15. Tangram chino

Figura 16. *Geocares*

No podemos acabar sin comentar un nuevo módulo que estamos probando con los más pequeños y que está gustando mucho, se trata de *Culleres i gots* (Cucharas y vasos). Consiste en un tablero 3×3 con cubículos donde situar los vasos, nueve vasos, tres de cada color, y nueve cucharas, tres de cada color (los mismos que los vasos) (figura 17).

La propuesta es distribuir los vasos y cucharas de todas las maneras posibles: que cada fila tenga un solo color, que no haya colores repetidos en ninguna fila, que no estén en el mismo orden en las tres filas, que no se repitan en filas ni columnas, que no coincidan los colores de los vasos con los de las cucharas, que no se repita el color de los vasos ni el de las cucharas en cada fila, en cada fila y columna, etc.

Es fácil ver cómo algunos alumnos ven alguna estrategia rápidamente y la aplican para resolver los distintos retos sin ninguna dificultad, sin embargo otros no son capaces de distribuir las piezas sin que coincidan los colores.

Veamos algunas de las posibles combinaciones en la figura 18.

Figura 17. Cucharas y vasos

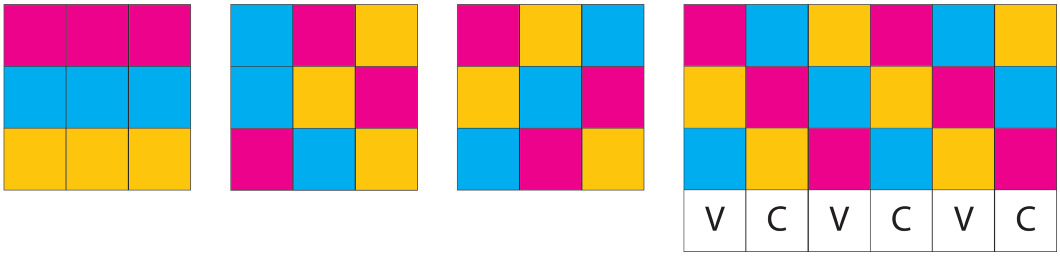

Figura 18. Algunas soluciones

Para ir terminando, trataremos ahora el primer módulo que nos encontramos al entrar en la sala, un gran laberinto en el suelo.

Al estar hecho de grandes piezas de moqueta de colores, resulta muy atractivo para los niños y los mayores. Se trata de un circuito cerrado, por lo tanto puedes empezar por donde quieras y hacer el recorrido completo para llegar al punto de partida.

Inicialmente propusimos laberintos con números y flechas indicando la dirección pero no tenía mucho interés una vez resuelto. Por ese motivo cambiamos las flechas por cuatro colores, que también situamos en los bordes del laberinto, indicando así la dirección de los pasos.

Una vez entendido el funcionamiento, lo repiten y repiten porque no se creen que siempre llegan al punto de partida, para ellos no es habitual un recorrido cíclico.

Algunos maestros nos preguntan cómo diseñar otros modelos, este tema ya se trató en *Suma*, n.º 90, 68-69, por lo que solo añadiremos un ejemplo sin explicar mucho más:

En una cuadrícula de 4 × 4 distribuyamos los números del 1 al 16, de manera que para ir de uno al siguiente, lo podamos hacer en línea recta, horizontal o vertical no diagonal (figura 20).

Decidamos ahora los colores de los márgenes y pintemos después los cuadrados del color necesario para hacer el recorrido, cambiando los números por la cantidad de cuadrados que nos tenemos que mover (figura 21).

Os proponemos diseñar otros laberintos intentando que haya el mínimo número de cuadrados del mismo color juntos. Para evitar esta situación visual que puede confundirlos, se puede pintar en cada cuadrado un número del color correspondiente a la dirección del movimiento.

Los laberintos también los hemos trabajado para públicos de mayor edad y no hemos puesto las indicaciones de colores. No resulta nada fácil estar dentro

Figura 19. Laberinto

1	8	2	7
5	13	14	6
4	12	3	11
16	9	15	10

Figura 20. Propuesta de recorrido

del laberinto y decidir hacia donde debes ir, la visión desde fuera resulta mucho más clara.

Además, en los más grandes, se puede ir pasando un cordel indicando los caminos que se han recorrido y resulta una figura muy interesante, si además dejamos una persona en cada punto sosteniendo el cordel, resulta muy divertido. Una vez más la imagen desde fuera resulta mucho más enriquecedora que desde dentro del laberinto. ¿Podríamos hablar de grafos? ¿Caminos eulerianos y hamiltonianos? Ese puede ser otro artículo.

Para terminar esta visita por la sala Montessori, os pediremos que hagáis vuestra valoración, situando una pieza imantada en la columna correspondiente a la sensación que tenéis después de la visita (figura 22).

Como podéis imaginar. No tienen ningún problema en poner su pieza y al acabar pedimos a los maestros que hagan una fotografía y la comenten en clase. Nos parece una muy buena manera de trabajar diagramas de barras y favorecer que comenten la visita en función de lo que han opinado.

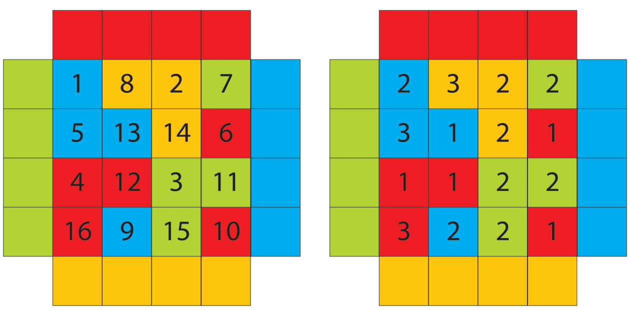

Figura 21. Propuesta con colores (izquierda y propuesta con pasos (derecha)


Figura 22. Valoración

Y, a vosotros, ¿qué os ha parecido?

Referencias bibliográficas

Grupo Alquerque, (2002), «El puzle de los cubos de colores», *Suma*, n.º 41, 121-123.

MMACA (2018), «Desde un punto de vista no-formal», *Suma*, n.º 87, 80-82.

— (2018), «Cálculo y estrategias», *Suma*, n.º 88, 92-94.

— (2018), «Para todas las edades, números, figuras y puzles», *Suma*, n.º 89, 38-39.

— (2019), «De lo que dejan los eventos», *Suma*, n.º 90, 68-69.

Molina, F. (2019), «Solucionando el puzle Instant Insanity», *Suma*, n.º 92, 17-26.

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya, Cornellá de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

1 http://www.recercaenaccio.cat/jocs-i-recursos-educatius/torres-de-hanoi/
2 https://sites.google.com/site/ludomateca/llicencia
3 http://www.recercaenaccio.cat/jocs-i-recursos-educatius/gratacels/
4 https://mmaca.cat/el-joc-dels-gratacels/