Esther Szekeres y el problema del final feliz

Marta Macho Stadler

SUMA+ núm. 94
pp. 31-36
Artículo solicitado por *Suma* en abril de 2020 y aceptado en junio de 2020

Casi todos los domingos del invierno de 1933, un pequeño grupo de estudiantes se reunía en algún lugar —un parque o un café— de Budapest para hablar de matemáticas.

Ese especial grupo estaba formado, entre otras personas, por Paul Erdős[1], Esther Klein, Márta Svéd[2], George Szekeres[3] y Pál Turán[4] (figura 1).

En una de estas reuniones, Esther propuso el siguiente problema:

> Dados cinco puntos en el plano en posición general, demostrar que cuatro de ellos forman un cuadrilátero convexo.

Tras dejar al resto del grupo un tiempo para reflexionar sobre el problema, Esther explicó a sus colegas la demostración que ella había pensado. Era una bella y sencilla prueba.

Figura 1. En esta fotografía aparecen tres de los protagonistas arriba citados, pero con algunos años más. De izquierda a derecha: Carole Lacampagne, Roger Eggleton, Esther Szekeres (Klein de familia), Paul Erdös, George Szekeres y John Selfridge (1984) ©The University of Newcastle; UON Photographer

El problema del final feliz

Empecemos por aclarar los conceptos involucrados en la proposición de Esther. Que varios puntos del plano estén en posición general significa que no existe ningún subconjunto formado por tres de ellos que sean colineales, es decir, que estén situados sobre la misma línea recta. Un cuadrilátero —polígono con cuatro vértices y cuatro aristas— es convexo si todos sus ángulos interiores son menores que 180 grados.

Esther razonaba teniendo en cuenta que existen tres formas distintas en las que un polígono convexo encierra cinco puntos. Dicho de otra manera, dados cinco puntos en posición general, su envolvente convexa[5] puede ser uno de los tres polígonos siguientes:

1. Un cuadrilátero cuyos vértices son cuatro de los puntos del conjunto inicial y que deja en su interior el punto restante. En este caso, la solución ya es inmediata, ya que es el cuadrilátero dado.
2. La envolvente convexa puede ser un pentágono cuyos vértices son los cinco puntos dados. Entonces cuatro de esos puntos pueden conectarse para formar un cuadrilátero convexo.
3. Finalmente, si la envolvente es un triángulo, los dos puntos que quedan dentro de la figura definen una recta que divide el triángulo en dos partes. En una de ellas hay dos puntos y en la otra uno de los del conjunto de cinco puntos inicial. Estos dos puntos junto con los dos interiores son los vértices de un cuadrilátero convexo (figura 2).

En 1935 Erdős y Szekeres publicaron un artículo en el que se generalizaba el resultado de Esther (figura 3); es uno de los trabajos fundamentales de la geometría combinatoria[6]. Paul Erdős denominó el problema original como «El problema del final feliz» porque Esther y George se casaron en 1937, ¿quizás tras conocerse mejor gracias a este enunciado?

El artículo de Erdős y Szekeres generalizando el enunciado de Esther comenzaba del siguiente modo:

> El problema que nos ocupa ha sido sugerido por la señorita Esther Klein en relación con la siguiente proposición.
> *A partir de cinco puntos del plano de los cuales no hay tres en una misma línea recta, siempre es posible seleccionar cuatro puntos que determinan un cuadrilátero convexo.*
> [...] La señorita Klein sugirió el siguiente problema *más general. Dado un entero positivo n, ¿es posible encontrar un número N(n) tal que de cualquier conjunto que contenga al menos N(n) puntos sea posible seleccionar n puntos que formen un polígono convexo?*

Hay dos preguntas particulares: (1) ¿existe el número $N(n)$ correspondiente a n? (2) Si es así, ¿cómo se determina el menor $N(n)$ en función de n? (denotamos el menor N por $N_0(n)$).

En su artículo Erdős y Szekeres demostraban que el número $N(n)$ existe (para n mayor que 2) y conjeturaban que $N_0(n) = 2^{n-2} + 1$, basándose en algún caso

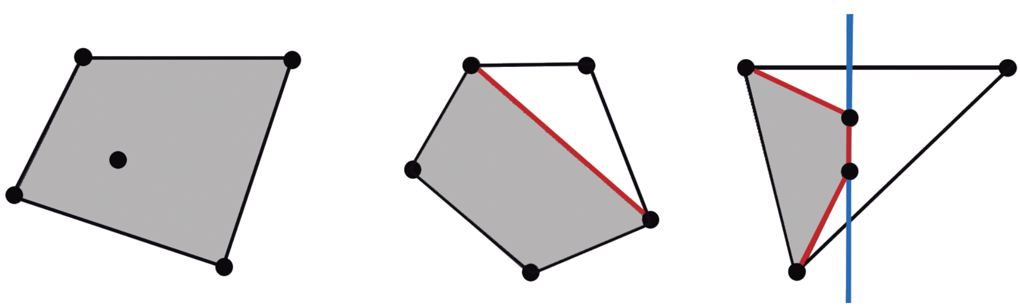

Figura 2. Los tres casos posibles de envolventes convexas y los cuadriláteros convexos obtenidos (sombreados)
Imagen: Marta Macho Stadler.

A Combinatorial Problem in Geometry

by

P. Erdös and G. Szekeres

Manchester

Introduction.

Our present problem has been suggested by Miss Esther Klein in connection with the following proposition.

From 5 points of the plane of which no three lie on the same straight line it is always possible to select 4 points determining a convex quadrilateral.

We present E. Klein's proof here because later on we are going to make use of it. If the least convex polygon which encloses the points is a quadrilateral or a pentagon the theorem is trivial. Let therefore the enclosing polygon be a triangle ABC. Then the two remaining points D and E are inside ABC. Two of the given points (say A and C) must lie on the same side of the connecting straight line $\overline{DE}$. Then it is clear that $AEDC$ is a convex quadrilateral.

Miss Klein suggested the following more general problem. *Can we find for a given n a number $N(n)$ such that from any set containing at least N points it is possible to select n points forming a convex polygon?*

There are two particular questions: (1) does the number N corresponding to n exist? (2) If so, how is the least $N(n)$ determined as a function of n? (We denote the least N by $N_0(n)$.)

We give two proofs that the first question is to be answered in the affirmative. Both of them will give definite values for $N(n)$ and the first one can be generalised to any number of dimensions. Thus we obtain a certain preliminary answer to the second question. But the answer is not final for we generally get in this way a number N which is too large. Mr. E. Makai proved that $N_0(5) = 9$, and from our second demonstration, we obtain $N(5) = 21$ (from the first a number of the order 2^{10000}).

Thus it is to be seen, that our estimate lies pretty far from

Figura 3. Principio del artículo (Erdős y Szekeres)
Captura de pantalla

particular demostrado por otros autores. De hecho, es obvio que $N_0(3) = 3$; Esther Klein demostró que $N_0(4) = 5$ y en Erdős y Szekeres se afirma que E. Makai probó que $N_0(5) = 9$, aunque no existe evidencia escrita de ello[7]. Años más tarde Szekeres y su alumna Lindsay Peters (ver Szekeres) demostraron, con ayuda de un ordenador, que $N_0(6) = 17$, consolidando así la conjetura.

De momento nadie ha sido capaz de confirmar o refutar la conjetura, aunque mucha gente ha trabajado en ello. De hecho, la propuesta se ha reformulado proponiendo la alternativa siguiente (ver, por ejemplo, Freyland):

$$2^{n-2} + 1 \leq N_0(n) \leq 2^{n+O(\sqrt{n\log n})},$$

donde la O mayúscula se refiere a la notación de Landau[8]. Ojalá que más pronto que tarde se conozcan más detalles sobre esta interesante acotación relacionada con tan bello problema geométrico.

Esther Szekeres, la protagonista de esta historia

Esther Klein nació en el seno de una familia judía, en Budapest, en 1910. Parece que desde muy pequeña destacó en matemáticas. Compartía aula de secundaria, en Budapest, con Márta Svéd, con la que mantuvo durante toda su vida una estrecha amistad. Las limitaciones impuestas a los judíos en Hungría a finales de la década de 1920 solo permitían que dos estudiantes de su clase pudieran cursar carreras de ciencias en la Universidad de Budapest: Márta eligió la plaza de matemáticas y Esther optó por la de física.

Esther Klein conoció a George Szekeres en la universidad y allí intimaron. Como ya hemos comentado, compartieron con algunos de sus colegas reuniones dominicales para hablar de matemáticas. Se casaron en 1937.

A pesar de sus capacidades matemáticas, George se vio obligado a estudiar química. En un momento económico delicado, su familia deseaba que se formara en materias que le permitieran continuar con el negocio familiar centrado en el cuero. Tras seis años trabajando en Budapest como químico analítico, y huyendo de la amenaza nazi, en 1939 George aceptó un puesto en Shanghái (China) como especialista en química del cuero. La fábrica cerró un año después. Esther y George Szekeres entraron a formar parte de la comunidad de 15 000 refugiados judíos procedentes de Europa Central en Hongkou. Allí vivieron los rigores de la Segunda Guerra Mundial, la ocupación japonesa[9] y los inicios de la Revolución comunista china[10]. Pero sobrevivieron y, de hecho, su hijo mayor, Peter nació en Shanghái.

En junio de 1948 la familia Szekeres emigró a Australia: la Universidad de Adelaida ofreció un puesto como profesor a George. Durante los primeros tres años de estancia en Australia debieron compartir un pequeño apartamento con sus amigos George y Márta Svéd. Su segunda hija, Judy, nació en 1954. Allí, en Australia, George floreció como matemático profesional.

En 1964, la familia Szekeres se mudó a Sídney, cuando a George le ofrecieron el cargo de profesor de Matemática Pura en la Universidad de Nueva Gales del Sur. Compraron una hermosa casa en Turramurra, situada en un lugar privilegiado, muy por encima de sus posibilidades. Pudieron adquirirla gracias a que nadie deseaba comprarla: era la residencia habitual de una de las dos personas fallecidas en un crimen pasional[11]. Los Szekeres no dieron ninguna importancia a esa mala fama, e hicieron de esa vivienda su hogar hasta 2004, cuando George no pudo ya renovar su permiso de conducir. El matrimonio regresó a Adelaida para poder estar cerca de su familia.

Como ya hemos comentado, George brilló en matemáticas, trabajando en campos muy diversos: álgebra, combinatoria, teoría de números, análisis matemático, análisis numérico, relatividad, cosmología o filosofía de las matemáticas.

Mientras tanto Esther cuidaba de sus hijos, aunque también impartió algunas clases en las universidades de Adelaida y de Macquarie (Sídney). Su pasión matemática se centraba en la geometría, un área en la que superaba a George.

En 1984, Esther y George comenzaron a impartir clases semanales de enriquecimiento matemático en el colegio Mercy de Chatswood (Sídney). Eran clases gratuitas y abiertas a estudiantes procedentes de cualquier sistema escolar. Durante veintiún años, Esther planteó alrededor de mil problemas de geometría, algunos de los cuales se utilizaron como ejercicios propuestos en la Olimpiada Internacional de Matemáticas.

La historia de amor —el «final feliz» entre sus dos colegas, como lo denominaría Erdős— de Esther y George fue larga —casi 70 años de vida compartida— e incluso poética en su despedida: ambos fallecieron el 28 de agosto de 2005, con una hora de diferencia. Ella tenía 95 años, él 94… Esther estaba ingresada en *Wynwood Nursing Home* —una residencia de personas mayores en Wynwood, en la que tuvo que entrar debido a sus problemas de salud— de Adelaida desde el año 2004 y George se mudó a la misma habitación que ocupaba su esposa siete semanas antes del fallecimiento de ambos.

Por cierto, tanto Esther como George poseen número de Erdős igual a 1[12].

Referencias bibliográficas

Cherix, P. A., S. Fiorelli y P. de la Harpe (2014), «Polygones convexes: le problème de la fin heureuse», *Images des Mathématiques, CNRS*, <http://images.math.cnrs.fr/Polygones-convexes-le-probleme-de-la-fin-heureuse.html?id_forum=9483&lang=fr#nh5>.

Cowling, M. (2005), «George Szekeres and Esther Szekeres-Klein», *Gazette of the Australian Mathematical Society,* n.º 32, 221-224, <https://www.austms.org.au/Publ/Gazette/2005/Sep05/Szekeres.pdf>.

Erdős, P., y G. Szekeres (1935), «A combinatorial problem in geometry», *Compositio Math,* n.º 2, 463-470, <http://www.numdam.org/article/CM_1935__2__463_0.pdf>.

Esther Szekeres, Wikipedia [consultado el 15 de abril de 2020] <https://en.wikipedia.org/wiki/Esther_Szekeres>.

Freyland, S. (2019), *The Happy Ending Problem and its connection to Ramsey theory,* Report Uppsala University, <http://uu.diva-portal.org/smash/get/diva2:1298048/FULLTEXT01.pdf>.

O'Connor, J. J., y E. F. Robertson, «George Szekeres», *MacTutor History of Mathematics archive,* University of St Andrews, <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Szekeres.html>.

Szekeres, G., y L. Peters (2006), «Computer solution to the 17-point Erdös-Szekeres problem», *Anziam J.,* n.º 48, 151-164, <https://www.austms.org.au/Publ/ANZIAM/V48P2/pdf/2409.pdf>.

Marta Macho Stadler
Universidad del País Vasco
<marta.macho@ehu.eus>

1 Paul Erdős (1913-1996) fue uno de los más prolíficos matemáticos en cuanto a publicaciones científicas: publicó unos 1.500 artículos y lo hizo con más de 500 coautores <https://files.oakland.edu/users/grossman/enp/Erdos1.html>. Por ello se definió en su momento el *número de Erdős:* Paul Erdős tiene número de Erdős igual a 0, cualquier persona que haya publicado con él tiene número de Erdős igual a 1, alguien que haya publicado con un coautor de Erdős tiene número de Erdős igual a 2, etc. Más información en <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Erdos.html>.

2 Márta Svéd (1909/1910-2005) fue una matemática de origen húngaro. Compartía aula de secundaria, en Budapest, con Esther Klein. Se interesó por las matemáticas gracias a *KöMaL* <https://www.komal.hu/home.e.shtml>, una revista de matemáticas y física para estudiantes de secundaria que se publica de manera ininterrumpida desde 1884. Debido a las restricciones impuestas a los judíos en Hungría a finales de la década de 1920, solo dos estudiantes de su clase podían estudiar ciencias o matemáticas en la Universidad de Budapest: Márta eligió la plaza de matemáticas y Esther Klein la de física.

Márta se casó con el ingeniero George Svéd y, en 1939, se fueron a vivir a Australia. Allí se convirtió en la directora del departamento de matemáticas de la *Wilderness School*, una escuela secundaria privada para niñas en Adelaida. Mientras tanto, su vieja amiga Esther Klein se había casado con el matemático George Szekeres. El matrimonio huyó de Europa, debido a la persecución a los judíos, hacia Shanghái. Tras la Segunda Guerra Mundial, las familias Szekeres y Svéd compartieron un pequeño apartamento en Adelaida.

Márta desarrolló un algoritmo para, a partir de tomografías computarizadas, recrear modelos de nylon en 3D de cráneos de pacientes. Estos modelos se han usado durante años en la Unidad Craneofacial Australiana (Adelaida) para planificar cirugías complicadas en niñas y niños desfigurados por anomalías craneofaciales.

En 1985, con 75 años, Márta defendió su tesis doctoral en la Universidad de Adelaida con la tesis titulada *On Finite Linear And Baer Structures.*

Es autora del curioso libro *Journey into Geometries* (Mathematical Association of America, 1991) que ofrece una introducción informal a las geometrías no euclidianas a través de una serie de diálogos entre una Alicia ya no tan niña, su tío Lewis Carroll y un visitante del siglo xx, el Dr. Whatif. En la historia, y con Alicia como moderadora, Carroll defiende la geometría euclidiana mientras Whatif realiza preguntas controvertidas y perspicaces. Aunque con más carga matemática que en la *Alicia* de Lewis Carroll, muchos de los personajes del *País de las Maravillas* aparecen en el libro de Svéd que propone algunos problemas cuyas soluciones también se incorporan.

Márta Svéd falleció el 30 de septiembre de 2005, dos días después de la muerte de sus amigos, George y Esther Szekeres. Su libro T*wo Lives and a Bonus* (Peacock Publications, 2006) recoge documentos y detalles de su vida en Budapest, antes de emigrar a Australia.

La Universidad de Adelaida ofrece una beca para mujeres matemáticas en memoria de Márta Svéd.

3 George Szekeres (1911-2005) fue un matemático de origen húngaro. Trabajó estrechamente con muchos destacados matemáticos a lo largo de su carrera, como Paul Erdős, Esther Szekeres, Pál Turán, Béla Bollobás, Ronald Graham, Alf van der Poorten, Miklós Laczkovich o John Coates. Más información en <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Szekeres.html>.

4 Pál Turán (1910-1976) fue un matemático húngaro que trabajó fundamentalmente en teoría de números. Durante cuarenta y seis años colaboró con su compatriota Paul Erdős, llegando a publicar veintiocho trabajos conjuntos. Se casó en segundas nupcias con Vera T. Sós (1930) de la que hablamos en el número 92 de esta revista. Gran parte del trabajo de Turán en teoría de números abordó la hipótesis de Riemann. De hecho, Erdős comentaba que «Turán era un "no creyente", de hecho, un "pagano": no creía en la verdad de la hipótesis de Riemann». Más información en <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Turan.html>.

5 La envolvente convexa (en el plano) de un conjunto de puntos es el mayor convexo (en el plano) que los contiene. Se consigue tomando la intersección de todos los conjuntos convexos (en el plano) que contienen a esos puntos. Si (todos) los puntos no están alineados, su envolvente convexa es un polígono convexo cuyos vértices son algunos de los puntos del conjunto inicial.

6 La geometría combinatoria estudia las propiedades combinatorias de objetos geométricos discretos como configuraciones de puntos, teselaciones o politopos, así como propiedades combinatorias de familias de objetos geométricos como conjuntos convexos o arreglos de hiperplanos.

7 La primera prueba escrita de este hecho apareció en el artículo *A combinatorial problem on convex regions* de J. D. Kalbfleisch, J. G. Kalbfleisch y R.G. Stanton (Proc. Louisiana Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing, 180-188, 1970).

8 La notación de Landau se utiliza para la comparación asintótica de funciones. <https://es.wikipedia.org/wiki/Notación_de_Landau>.

9 La Segunda Guerra Chino-japonesa fue un conflicto militar entre la República de China y el Imperio de Japón librada entre julio de 1937 y septiembre de 1945 en el marco de la Segunda Guerra Mundial.

10 La Revolución Comunista china fue el resultado de la guerra civil china, iniciada en 1927. Comenzó en 1946, después del final de la Segunda Guerra Chino-japonesa.

11 El 1 de enero de 1963, dos jóvenes descubrieron los cuerpos de Margaret Chandler y Gilbert Bogle cerca del Puente de Fuller, en el río Lane Cove en el norte de Sídney. Gilbert y Margaret eran amantes, habían muerto envenenados y nunca se llegó a saber si fue un asesinato, un pacto suicida o una sobredosis accidental de drogas.

12 El número de Erdős se define del siguiente modo: Paul Erdős tiene número de Erdős igual a 0, cualquier persona que haya publicado con él tiene número de Erdős igual a 1, alguien que haya publicado con un coautor de Erdős tiene número de Erdős igual a 2, etc. Si deseas conocer tu número de Erdős —si has publicado algún artículo científico— en la página *The Erdős Number Project* <https://oakland.edu/enp/> te ayudan a calcularlo. Junto a Paul Erdős, Janice L. Malouf y John Selfridge, Esther escribió el artículo «Subsets of an interval whose product is a power» (*Discrete Mathematics*, n.º 200 (1999), 137-147), así que, efectivamente, tiene número de Erdős igual a 1.