

CRÓNICA DE UNA CLASE NO ANUNCIADA

Platos rotos

Miquel Albertí Palmer

SUMA núm. 94
pp. 41-48

Artículo solicitado por *Suma* en abril de 2020 y aceptado en junio de 2020

Cada uno de estos últimos cursos académicos se ha hecho una conferencia sobre arqueología dirigida al alumnado de 1.º de la ESO en el *Institut Vallès* de Sabadell. La realiza Ot Ordeig, arqueólogo de la *Universitat de Barcelona*. Como profesor, me ha tocado acompañar a mis alumnos a algunas de estas sesiones en las que todos, alumnado y profesorado acompañante, hemos prestado mucha atención.

El profesor Ordeig suele insistir en que la arqueología se diferencia de lo que algunas películas populares puedan dar a entender y que su objetivo no es desenterrar dinosaurios fosilizados (figura 1). El interés de la arqueología son los restos humanos, estén bajo tierra o en el fondo del mar.

Además de acompañar su amena exposición con imágenes de excavaciones realizadas por él mismo junto a otros equipos de arqueólogos en diferentes lugares de Cataluña, trae algunas piezas recuperadas

durante su labor. Esto incluye objetos tan diversos como monedas, balas de cañón, cuentas de collares o fragmentos de cerámica.



Figura 1. El profesor Ordeig definiendo la arqueología: *La arqueología es una disciplina científica que tiene por objetivo estudiar los restos que han dejado los humanos para comprender el pasado*

Matemáticas en la arqueología

Al regresar al aula de matemáticas no puedo dejar escapar la oportunidad de relacionar las matemáticas con la arqueología. Una vez los alumnos, algunos de ellos por lo menos, se han cautivado por lo visto y escuchado, no me parece razonable que se olviden del tema simplemente porque un timbre ha puesto fin a la conferencia. Por eso, de acuerdo con el proyecto L'INSiTU procuro incitar un diálogo basado en la charla. Pero la pregunta de inicio no es una cuestión simple y superficial como sería preguntarles qué les ha parecido, sino profundizar directamente en la relación con las matemáticas. Eso sí, de forma abierta:

- Profesor: ¿Podrías decir qué cosas de matemáticas han salido en la conferencia?
- Ell@s: Tiene que medir.
- Ell@s: Y poner fechas a lo que encuentra.
- Ell@s: Usar el jalón.
- Ell@s: Encontrar ángulos.
- Ell@s: Hacer escalas para saber las estaturas de los esqueletos.
- Ell@s: Usar el láser para las distancias.

Los arqueólogos de hoy en día utilizan rayos láser para conocer distancias inaccesibles. Las escalas a las que se refería ese alumno era lo que en matemáticas llamamos proporcionalidad geométrica (figura 2).

- Profesor: Ot también ha mencionado las cuadrículas. ¿Tienen algo que ver con las matemáticas?
- Ell@s: Bueno, tienen cuadrados.

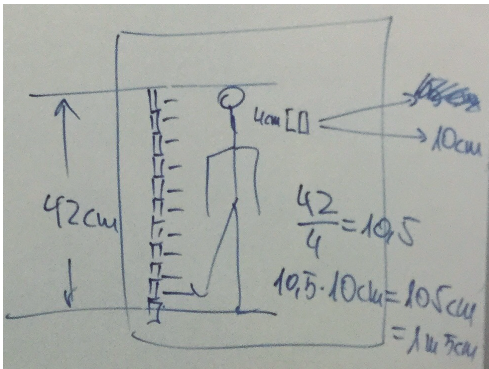


Figura 2. Recreación arqueológica en el aula utilizando un jalón para hallar la estatura de un cuerpo

- Ell@s: Para hacerlas hay que saber los ángulos.
- Ell@s: Hay paralelas y perpendiculares, y ángulos de noventa grados.

Un problema matemático del arqueólogo

Como me temía, nadie ha mencionado un problema matemático con el que los arqueólogos se topan frecuentemente cuando hallan fragmentos de vasijas, platos o enseres circulares (figura 3):

- Profesor: ¿Se os ocurre algún problema o cuestión matemática que tenga que resolver el arqueólogo?
- Ell@s: ... (permanecen en silencio)
- Profesor: ¿No habéis visto fragmentos de platos o de vasijas dentro de los *tuppers* que ha traído el profesor Ordeig (figura 3)?
- Ell@s: Sí.
- Profesor: ¿Y qué ha dicho de los platos que encontraban?
- Ell@s: Lo grandes que eran, el tamaño.
- Ell@s: Sí, daba la medida.
- Profesor: La medida, ¿de qué?
- Ell@s: Del plato.
- Ell@s: Lo grande que es el plato.
- Profesor: ¿Y qué medida hay que dar para saber cómo es de grande un plato?
- Ell@s: El diámetro.
- Profesor: Y si solo tenemos un fragmento del plato, ¿cómo sabe el arqueólogo cuál es el diámetro del plato entero?

Otra vez se hace el silencio tras mi pregunta, pero esto no significa un cese de pensamiento. Les invito



Figura 3. Algunas piezas corrientes que aparecen en las excavaciones

a pensar cómo puede averiguarse el diámetro de un plato redondo a partir de un pequeño fragmento.

La clase se pone a pensar. Algunos dibujan un círculo y quienes la recuerdan de su etapa de primaria, sacan a colación la fórmula del perímetro de una circunferencia. Pero claro, para obtener el perímetro, que no es lo que buscamos, se necesita el diámetro o el radio. Algunos proponen hallar el radio midiendo la distancia desde un punto del borde circular del fragmento del plato hasta su centro. Pero lo más corriente es que el centro no forme parte del fragmento. En cualquier caso, esta observación plantea un problema anexo:

—Profesor: ¿Cómo saber dónde está exactamente el centro de un círculo?

Dan vueltas sobre lo mismo sin llegar a ningún resultado. Por eso les hago la siguiente propuesta:

—Profesor: El arqueólogo trabaja con el fragmento de plato real que ha encontrado. Puede tocarlo, moverlo, pesarlo, sentirlo entre sus dedos. Os he planteado un problema sobre un plato del que no tenéis ningún fragmento, habéis estado pensando solamente con la imaginación. ¿Creéis que os serviría de ayuda tener en vuestras manos un trozo de plato?

—Ell@s: ¡Sí!

La afirmación es unánime. Y yo sé que las ideas que se nos ocurren trabajando *in situ* manipulando los objetos tangibles de los que queremos conocer algo

resulta muy productivo y creativo. Es el papel de la cognición en la práctica de Jean Lave (1988). De seguir únicamente por el camino del diálogo razonado no llegaremos a buen puerto. Se diría que no hay ideas sobre las que dialogar y que hace falta que suceda algo para que las inspire. Por eso les digo:

—Profesor: Voy a buscar unos fragmentos de platos y os dejaré más tiempo para que penséis alguna solución al problema.

En la sala de profesores hay un armario en uno de cuyos cajones hay un montón de platos de plástico. Tomo un puñado de ellos y vuelvo al aula. Una vez allí pido unas tijeras con las que recorto los platos en pedazos pequeños y los reparto entre los 24 alumnos que componen la clase. Con esos pedazos de platos rotos empiezan a realizar algunas pruebas. Los hay que han recibido fragmentos que parecen alcanzar el centro del plato. Se afanan en buscar ese centro para obtener el radio a partir de él, pero no acaban de conseguirlo (figura 4). Otros, transfieren al papel el perfil del plato obteniendo arcos circulares, pero tampoco vislumbran solución alguna (figura 5).

Mientras van trabajando, abro GeoGebra en mi tableta e inserto un recorte de la fotografía de los materiales que ha traído el arqueólogo en el que se aprecia un fragmento de cerámica de perfil circular. Luego, señalo tres puntos encima de dicho arco y uso la aplicación «circunferencia que pasa por tres puntos del programa». Y ahí está (figura 6): la circunferencia

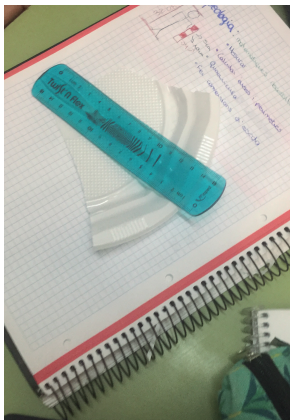


Figura 4. Buscando el centro del plato y su radio

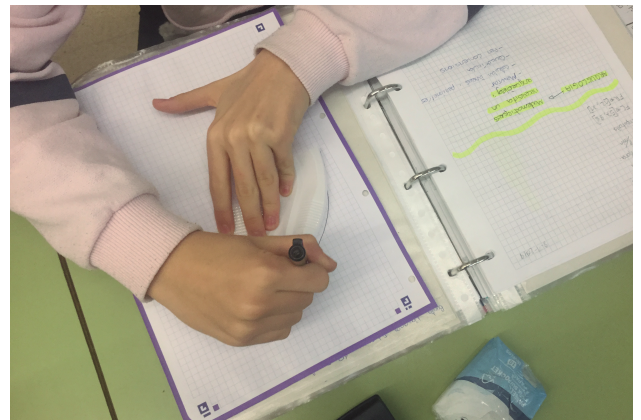


Figura 5. Transfiriendo al papel el perfil de un plato

que pasa por esos tres puntos sería un modelo de la forma del plato completo. Hallar el diámetro sería ya cuestión de proporcionalidad.

No he acabado todavía de hacer esto cuando oigo a alguien gritar:

—Ell@s: ¡Ya lo tengo!

Conectando sucesivas copias del arco del fragmento, una al final de la otra, como cuando desplazamos una regla para construir un segmento más largo que ella, alguien había logrado cerrar la circunferencia. En realidad, casi la había cerrado porque la circunferencia entera no cabía en la hoja DIN A4. La figura 7 reproduce dicho proceso con el perfil de un vaso.

Una vez recompuesto el círculo a partir del arco, había que determinar su diámetro. Eso planteaba otro problema porque no se sabía dónde estaba exactamente el centro, lo que incitó un nuevo diálogo.

—Ell@s: Podemos trazar una línea que pase por el centro, de lado a lado, y la medimos.

—Ell@s: Pero si no sabes el centro, ¿cómo va a pasar por ahí?

—Ell@s: Se puede hacer aproximadamente. Al final

todo será aproximado, ¿no?

—Profesor: Aunque el resultado sea aproximado, ¿no podríamos encontrar un modo de hacerlo mejor, más riguroso?

—Ell@s: Pero sin el centro, no se puede encontrar la línea que pase por él.

—Profesor: A ver. ¿Sabéis cómo se llama la línea que va de un punto a otro de una circunferencia?

—Ell@s: Cuerda, me acuerdo de primaria.

—Profesor: Bien. ¿Cuántas cuerdas pueden hacerse?

—Ell@s: Muchas.

—Ell@s: Infinitas.

—Profesor: ¿Y todas son distintas?

—Ell@s: Sí.

—Profesor: ¿En qué son distintas?

—Ell@s: En el ángulo.

—Ell@s: No, unas son más largas y otras más cortas.

—Ell@s: Sí, pero están repetidas.

—Ell@s: No pueden estar repetidas, todas serán distintas. Si empiezas cerca, luego se van haciendo más largas.

—Ell@s: Pero las del otro lado serán las mismas.

—Profesor: ¿Cuáles del otro lado?

—Ell@s: ¡Ah, claro! Hay una más larga. Y no está repetida.

—Ell@s: Es el diámetro, la más larga de todas.

—Profesor: Entonces, ¿se puede definir el diámetro sin hablar ni conocer el centro del círculo? ¿Cuál será la definición?

—Ell@s: La cuerda más larga.

—Profesor: Pues así podéis hallar el diámetro del plato.



Figura 6. Reconstrucción de un plato circular con GeoGebra

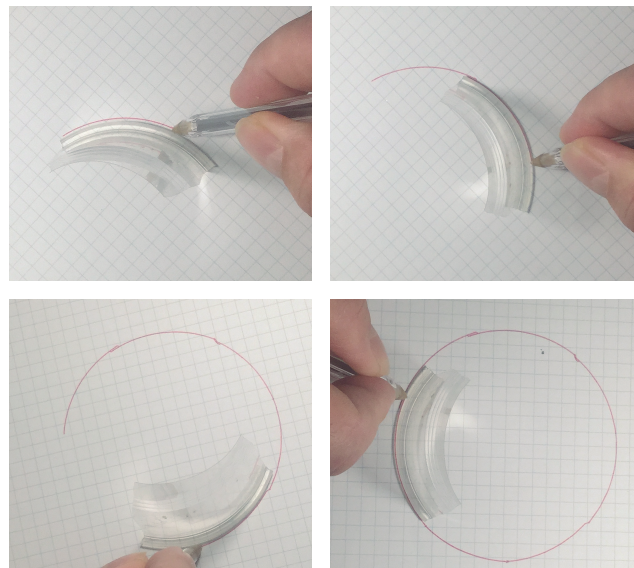


Figura 7. De arco en arco se cierra la circunferencia de un vaso

Lo hicieron y obtuvieron un resultado de 24,4 cm. Pero entonces alguien hizo una observación:

- Ell@s: Pero el plato medirá un poco menos.
- Ell@s: ¿Por qué?
- Ell@s: Porque el dibujo en el papel es más ancho. El borde del plato no es el mismo que el del lápiz.
- Profesor: ¿Qué significa esto?
- Ell@s: Que al perfilar lo hacemos más grande.
- Ell@s: Sí, hay un poquito de distancia entre el plato y la punta del lápiz.
- Profesor: ¿Qué distancia?
- Ell@s: Un milímetro o dos, aproximadamente.
- Profesor: Entonces, ¿cuánto hay que restar al diámetro obtenido?
- Ell@s: Pues eso, dos milímetros.
- Ell@s: No, son cuatro. Por el otro lado también hay dos milímetros de más. Serán, aproximadamente, 24 cm de diámetro.

Teníamos pendiente todavía el problema de hallar el centro del círculo de un arco circular. Les mostré cómo hacerlo doblando el papel para trazar dos mediatrices distintas en sendos pares de puntos del arco (figura 8). Pero no profundizamos en las justificaciones matemáticas del fenómeno, solo les mostré la técnica aprovechando las hojas de papel.

Se había hallado una definición de diámetro poco corriente en la que no intervienen ni el radio ni el centro del círculo y a través de la cual pudo encontrarse este. Tratando de medir el grosor del círculo, un grupo de estudiantes llegó a la conclusión de que el diámetro sería el mayor de todos los grosores obtenidos al fijar el punto 0 de la regla en un punto de la circunferencia



Figura 8. Centros de los arcos circulares de unos platos hallados con la intersección de dos mediatrices

e ir girando el otro extremo hasta obtener la mayor longitud. Sin usar términos técnicos definieron así el diámetro de un círculo como la mayor de todas sus cuerdas (figura 9). Una vez hecho esto, les bastó con dividirlo por dos para conocer el radio y marcar en su punto correspondiente el centro del círculo.

Acabada la clase me dirigí a la biblioteca donde el profesor Ordeig había concluido la charla con otro grupo. Me acerqué a él y antes de comentarle que habíamos tratado el problema del plato roto en clase le pregunté cómo lo resolvían ellos, los arqueólogos. Me confirmó que lo hacen como los alumnos, desplazando el fragmento hasta recomponer el círculo entero. Después, se mide el diámetro. Nuestro modelo de resolución era afín a la realidad que lo había inspirado.

Conclusiones

MATEMÁTICAS DEL ARQUEÓLOGO

Esencialmente se trata de un inventario de los instrumentos de medida que utiliza (regla, jalón, cinta métrica, transportador de ángulos, láser de distancias) y de los problemas matemáticos identificados a los que se enfrenta (trazo de cuadrículas, ángulos rectos, paralelas y perpendiculares, determinar longitudes mediante proporcionalidad geométrica, localización espacial y reconstrucción de círculos a partir de un arco).

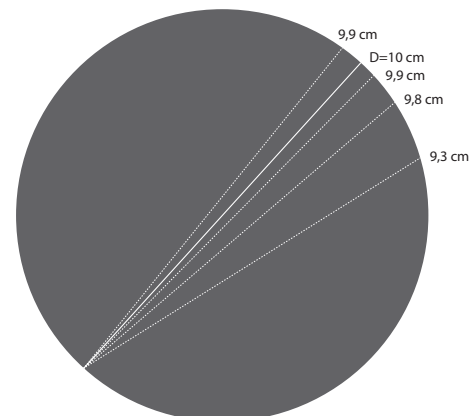


Figura 9. El diámetro de un círculo o circunferencia es la mayor de todas sus cuerdas

PROBLEMAS INSPIRADOS EN EL PLATO ROTO

Existen diversas formas de recomponer un plato roto, siendo tres las presentadas aquí: por traslación de un arco hasta completar el círculo como cuando se traslada un regla para trazar con ella un segmento más extenso, hallando el centro mediante dos mediatrices, ya sea con papel y lápiz o con papiroflexia y con la aplicación del círculo que pasa por tres puntos del programa GeoGebra.

Estas resoluciones plantean cuestiones matemáticas más profundas, algunas de las cuales van más allá de 1.º de la ESO. Una es la concepción de la recta como circunferencia de radio infinito. Otra, el hecho de que un arco circular se cierre siempre sobre sí mismo al ser trasladado consecutivamente. La tercera, justificar que el punto de intersección de las mediatrices es precisamente el centro del círculo. La cuarta, que dicho centro no depende de los puntos del arco escogidos. Quinta, que hacen falta tres y solo tres puntos para determinar una circunferencia. Y sexta, hallar el centro de un círculo ya trazado.

DIÁLOGO FILOSÓFICO Y PRÁCTICA SITUADA

Jean Lave (1988) tenía razón: en la práctica el pensamiento está al servicio de la acción. Algunos estudiantes lograron resolver el problema cuando tuvieron un fragmento del plato roto en sus manos y pudieron manipularlo *in situ*. Solo entonces se les ocurrió trasladar su arco al papel. Haciéndolo se dieron cuenta de que sus acciones eran muy similares a las que se llevan a cabo al trazar un segmento con una regla. Así cerraron el círculo y el problema.

Ni la práctica situada ni el diálogo filosófico, por sí solos, son suficientes para alcanzar conclusiones sobre cuestiones que tengan que ver con eso que llamamos realidad tangible. Vemos también que los arqueólogos comparten una serie de técnicas matemáticas con las que llevan a cabo su trabajo. Según Wenger (1999), constituirían una comunidad de práctica al compartir un lenguaje propio, instrumentos específicos y estrategias desarrolladas para resolver los problemas a los que se enfrentan. Pero resulta muy difícil o casi imposible que un grupo de clase se convierta en una comunidad de práctica. Tampoco creo que tenga que

ser este el espíritu que la guíe. Sin embargo, no habría nada que objetar a dedicar más clases no anunciadas para llegar a desarrollar todo el conocimiento que se puso en juego en esa sesión y justificar la validez de sus argumentos.

Profundizando más en la cuestión veríamos como los estudiantes se sienten abocados a crear nuevos términos para concretar lo que ocurre durante su práctica, pues el hecho de que la serie de arcos acabe por cerrarse o no depende de lo que los adultos matemáticos convinieron en llamar grado de curvatura. Curvatura es el término y establecer su grado significa buscar un modo objetivo de cuantificarla, lo que nos lleva a Scribner (2002).

Esta experiencia matemática vivida por los estudiantes pone de manifiesto que el diálogo filosófico y la práctica situada deben combinarse y retroalimentarse para desarrollar un aprendizaje constructivista. Se necesitan y se complementan mediante incitaciones: las conclusiones del diálogo incitan una puesta a prueba en la práctica; y la práctica, incita un diálogo por el cual se obtienen nuevas preguntas y nuevas conclusiones.

«EQUITRIZ» ANTES QUE MEDIATRIZ

Hagamos un ejercicio mental consistente en transcribir en palabras escritas el proceso doblar una hoja de papel.

Marquemos dos puntos P y P' en una hoja de papel y doblémosla llevando uno encima del otro: $P = P'$. Presionemos la arruga creada alisándola en toda su extensión. Aparece un pliegue rectilíneo. El punto A del pliegue más cercano a $P = P'$ es aquel que hace que el segmento AP sea perpendicular al pliegue, cosa que sabemos gracias al recíproco del teorema de Pitágoras.

Pero, ¿por qué es rectilíneo el pliegue? Marquemos otro punto B del pliegue y unámoslo a $P = P'$ con un segmento. Si desdoblamos ahora el papel veremos que BP y BP' forman un triángulo isósceles con PP' . Lo mismo valdría para cualquier otro punto del pliegue rectilíneo, el cual se compone de la sucesión de vértices de todos los triángulos isósceles con base PP' , esto es, de puntos situados en su altura común. Matemáticamente, esto equivale a decir que los puntos del plano equidistantes de dos puntos dados forman una línea recta.

Dicha línea recta recibe el nombre de mediatriz, pero ese término tiene otras connotaciones geométricas que en este fenómeno resultan secundarias. Aquí lo primordial es la equidistancia. Merecería llamarse «equitriz», pues esta es su naturaleza intrínseca. Si bien es verdad que coincide con la mediatriz del segmento PP' no es así como se ha construido. Alisando el papel doblado se traza la equitriz.

Imaginemos ahora que hemos trazado un arco circular en un papel. Marquemos un par de puntos cualesquiera sobre dicho arco y doblemos el papel hasta llevarlos uno encima del otro. Presionemos ahora la arruga hasta conseguir la equitriz de ese par de puntos. Escojamos ahora otro par de puntos diferente y repitamos la operación. Tendremos dos equitrices que se cortan en un punto. Ese punto de corte equidista de los dos primeros y de los dos segundos por estar en ambas equitrices. Luego es el centro del arco circular sobre el que se tomaron los dos pares de puntos.

No se han ilustrado adrede los tres párrafos anteriores con imágenes ni se han utilizado términos geométricos más precisos que habrán acudido rápidamente a la mente del lector. La intención era triple. Por una parte, mostrar lo difícil que resulta describir un fenómeno sin un lenguaje que permita abreviarlo y precisar sus detalles sin ambigüedades. Por otra, porque este sería el lenguaje que usaría una persona que reflexionase por primera vez con este fenómeno tan corriente como es doblar una hoja de papel y sobre el que en algún momento de la ESO valdría la pena incitar un diálogo filosófico y una práctica situada. El fenómeno ha sido incitado aquí por la arqueología, pero la reflexión lo ha llevado al ámbito matemático. Por último, obsérvese lo difícil que resulta expresar con palabras, aunque se hiciese con un lenguaje técnico más efectivo, lo que la mente piensa o imagina, lo que el ojo ve y lo que la práctica inspira. ¿No es este un ejercicio lingüístico e, incluso, literario? ¿No deberían potenciarse más las actividades descriptivas de fenómenos corrientes en la materia de Matemáticas? ¿Y en la materia de Lengua? ¿De ambas, quizá?

Posiblemente los arqueólogos no necesiten hallar los centros de los fragmentos de platos circulares que encuentran junto a los restos humanos que estudian; pero el matemático, sí; en matemáticas, sí; en la educación matemática, sí. Solo así avanzaremos en la

comprensión de fenómenos reales como el de doblar una hoja de papel. Ahora bien, debemos ser conscientes de que aprender a distinguir causa de consecuencia y de lo necesario que es asignar nombres a los objetos y a las relaciones entre ellos requiere tiempo. Es nuestra responsabilidad apropiarnos de él.

GRADO DE CURVATURA

El círculo suele definirse a partir del radio: el conjunto de los puntos del plano que equidistan de otro llamado centro. Pero, ¿puede definirse también a partir de su curvatura? Pensemos en un polígono de n lados convexo no necesariamente regular. La suma de sus ángulos interiores es:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi \cdot (n - 2).$$

Si todos los ángulos son iguales, como ocurre en los polígonos regulares:

$$n \cdot \alpha = \pi \cdot (n - 2) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi \cdot (n - 2)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi.$$

Luego cuando los lados del polígono regular tienden a infinito, sus ángulos interiores tienden a ser planos. Aventuramos así el caso límite de un polígono circular con infinitos vértices: otra definición de círculo.

Pero la práctica llevada a cabo con los platos rotos prueba que si la curvatura de una curva es constante en todos sus puntos, entonces acaba por cerrarse y la figura que la cierra, la unión de los arcos curvilíneos sucesivos es también una circunferencia. Si la curva es nulamente curvilínea, podría tratarse incluso de un segmento. En tal caso, la sucesión de arcos nunca nos devolverá al punto de partida. Podemos asignar números al grado de curvatura de manera que si los arcos se cierran el grado de curvatura k sea un número positivo. De lo contrario, será nulo ($k = 0$) como correspondería a un segmento rectilíneo.

¿Y cómo establecer una gradación curvilínea o curvatura? Es evidente que un arco circular es más cerrado que otro si el radio de este es mayor que aquel.

Por tanto, el grado de curvatura debe ser inversamente proporcional (o algo similar) al radio del arco. Algunas opciones plausibles serían definir el grado de curvatura k de un arco de radio r como:

$$k = \frac{1}{r}, k = \frac{1}{r^2}, \dots, k = \frac{1}{r^n}.$$

Pero quizá debamos tener en cuenta otro aspecto. Las longitudes de los arcos, pongamos de 90° , de una curva de radio r y otra de radio $2 \cdot r$ cumplen la misma relación que sus radios (figura 10): el segundo arco posee longitud doble que el primero, aunque sus amplitudes sean idénticas.

Sería razonable que las relaciones entre las curvaturas pudiesen someterse a dicha relación entre los radios y las longitudes, aunque a la inversa. Como consecuencia de ello, lo mejor sería definir el grado de curvatura como inversamente proporcional al radio constante de la curva: $k = 1/r$. Así preservamos nuestra intuición: el grado de curvatura aumenta a medida que la curva se cierra y al revés, el grado de curvatura de un segmento es nulo ($r = \infty$, $k = 0$) y una curva de curvatura doble que otra posee la mitad de su radio.

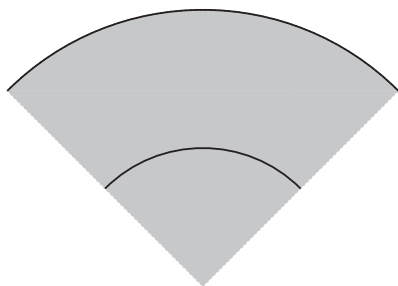


Figura 10. Aceptamos que un arco de radio doble se aprecia la mitad de curvado que otro de la misma amplitud pero con radio mitad

Más adelante, en el estudio de las funciones y de las curvas diferenciables en el plano convendrá asignar también un signo al grado de curvatura para conocer los puntos de inflexión en que la curva cambia de tendencia doblándose hacia un lado u otro de su trayectoria. Y resultará extraordinario merced al cálculo diferencial poder averiguar cuál es el radio del círculo que gobierna la orientación de la curva en cualquiera de sus puntos, como si del volante de un conductor se tratase.

Merece la pena observar que el grado de curvatura es una creación. No hemos descubierto ese grado de curvatura. Nada impediría definirlo de otro modo, pero se ha optado por este porque concuerda más que las otras opciones con nuestra intuición visual. Si en el futuro hubiese que revisarlo por hallar curvas cuya percepción visual no encajase en dicha concepción de la curvatura, no habría problema. Por tanto, el grado de curvatura no «es» así, sino que se ha definido de esta manera, se ha decidido que «sea» así.

Referencias bibliográficas

- LAVE, J., y ROGOFF, B. (1984), *Everyday Cognition: Its Development in Social Context*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.
- LAVE, J. (1988): *Cognition in Practice. Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life*, Cambridge University Press, Cambridge.
- SCRIBNER, S. (2002), «La mente en acción: una aproximación funcional al pensamiento», en Cole, M.; Engeström, y Vásquez, O. (eds.): *Mente, Cultura y Actividad*, Oxford University Press.
- WENGER, E. (1999), *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity*, Cambridge University Press.

Miquel Albertí Palmer

Institut Vallès, Sabadell (Barcelona)
<alberti.miquel@gmail.com>