Visión retrospectiva y extensión del problema

Enrique Hernando Arnaiz

SUMA+ núm. 94
pp. 49-58
Artículo solicitado por *Suma* en abril de 2020 y aceptado en junio de 2020

> Alguien dijo que la habilidad matemática consiste en la capacidad de pensar mucho tiempo sobre un problema, y yo estoy de acuerdo. Pasas años pensando sobre lo mismo, a veces te obsesionas, te equivocas, pero aprendes mucho por el camino. Y a veces tienes suerte y resuelves el problema. A veces el problema no es muy importante, pero en el proceso de resolución se desarrollan matemáticas que sí lo son (Efim Zelmanov, Medalla Fields).

En esta sección se reproducen actividades que provienen de las sesiones realizadas por el autor con los alumnos de segundo curso de EsTalMat Castilla y León. Con este artículo el autor rinde debido homenaje a Ezequiel Santamaría, amigo y compañero. Él, junto con el autor, eligieron estas actividades y empezaron el proyecto EsTalMat en Castilla y León. ¡Qué gran maestro se están perdiendo nuestros alumnos!

A lo largo de dos años del programa EsTalMat se han resuelto muchas cuestiones. Se han trabajado muchos métodos y fases en la resolución eficiente de problemas (de matemáticas o no) y revisado variadas estrategias.

Una vez resueltos, o no, los problemas, se da más importancia a averiguar si se puede mejorar el proceso seguido (cada uno el suyo) para encontrar la solución y aprovechar el protocolo empleado al máximo, sacar conclusiones, mejorar (¿se puede?, ¿cómo?...) el modo, proceso, en que se atacan los problemas, utilizar ese mismo método o esa misma idea en otros problemas, ampliar lo averiguado aplicándolo a un problema más complejo o más general…

Sacar todo el jugo a nuestra investigación, ya que le hemos dedicado un tiempo precioso (somos personas importantes, nuestro tiempo es muy valioso…).

A esa importantísima última fase de la resolución de problemas (RdP) se le llama la «Revisión y extensión del problema». ¡Ojalá hubiese tiempo para ella más a menudo!

Con ese objetivo en mente, se divide la investigación en tres fases:

— La revisión: generar el protocolo de resolución de un problema. Evaluación y consecuencias.
— Extensión del problema: aprovechar el proceso de su resolución al máximo.
— Investigaciones matemáticas: generalizar, hacer conjeturas, comprobarlas…

Revisión

Es la cuarta fase en la resolución de problemas según el modelo de Polya (1965) y Miguel de Guzmán (2011), y la tercera en el modelo de Mason-Burton-Stacey (1988). Como se puede ver, no hay modelo que no incluya esta fase.

— ¿Puedo verificar el resultado?
— ¿Soy ordenado?
— ¿Mi proceso es eficiente?
— ¿Puedo verificar la validez del razonamiento que he hecho?
— ¿Se puede obtener el resultado de alguna forma diferente?
— ¿Puedo ver el proceso de un solo golpe?
— ¿Podré emplear en mi problema el resultado o el método de algún otro problema?
— Y al revés, ¿se podrá emplear el resultado o el método que he empleado en el mío a algún otro estilo de problema diferente?

Miguel de Guzmán (1992), en una conferencia que impartió en Burgos, con motivo de la fundación de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Castilla y León, explicó la importancia de esta fase:

> Cuando uno se pone a hacer problemas, no porque se los han propuesto y tiene prisa en resolverlos, sino porque uno quiere mejorar su propia forma de enfrentarse a ellos, lo realmente útil es que, junto a la resolución de los mismos, vayamos teniendo una forma de examinar y analizar cómo se produce el proceso de enfrentamiento entre el resolutor (yo mismo) y el problema. Pero seguro que nos estamos preguntando... ¿cómo se aprende esto? Probablemente eso no se aprende más que experimentando uno mismo la resolución de problemas y examinando sus propios procesos de pensamiento.
> Este examen de los propios procesos de pensamiento enlaza de una manera natural con la etapa más importante, que probablemente se lleva a cabo muy pocas veces en nuestra ocupación con problemas, es «la Revisión del Proceso».
> Esto consiste en examinar a fondo el camino tomado, tratar de entender por qué ha sido adecuado, mirar si podemos encontrar un camino más simple, analizar hasta dónde llega el método, sus posibilidades de aplicación a otras situaciones parecidas, reflexionar, en fin, sobre el propio proceso de pensamiento seguido.
> Como fácilmente podéis comprender, después de un par de horas de ocupación con un problema verdadero, esto no se puede hacer, a menos que uno tenga un método, pues normalmente a todos se nos olvidan los vericuetos por los que hemos ido caminando. El protocolo no es más que un acta de los procesos de pensamiento utilizados, que tenemos a nuestra disposición para su estudio. Este protocolo hay que examinarlo para diagnosticarnos y más tarde establecer un tratamiento: ¿Cómo mejoro yo aquellos puntos que me han resultado mal o aquellos en que con más facilidad caigo?, ¿qué tendencias tengo?....

ACTIVIDAD 1: ¿SOY INDUCTIVO O DEDUCTIVO? (CONOCIÉNDOSE)

Queremos investigar cómo es nuestra «personalidad» a la hora de enfrentarnos e intentar resolver un problema. Vamos a estudiar en primer lugar si somos más bien inductivos, nos gusta experimentar, ir probando, rectificando, tanteando e ir sacando conclusiones y

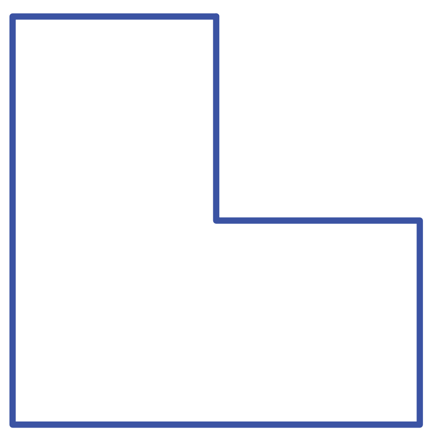

Figura 1

caminos a seguir de esta práctica; o deductivos, casi sin intentar haber trabajado el problema ya tenemos nuestras teorías y tenemos pensadas las pautas para su resolución, que luego confirmamos y comprobamos su validez.

Para esto vamos a intentar lo siguiente. Es importante que sea totalmente individual, queremos evaluar nuestra habilidad.

Se empieza con el caso 1, se dejan unos tres, cuatro minutos y si hay alumnos que no lo descubren se dice la solución en la pizarra.

Caso 1

Dividir la figura 1 en cuatro piezas exactamente iguales.

A continuación el caso 2, que requiere algo más, unos cuatro o cinco minutos, y si hay alumnos que no lo descubren se dice la solución en la pizarra.

Caso 2

Dividir la figura 2 en dos piezas exactamente iguales.

Y el útimo caso de esta actividad, el 3. También unos tres o cuatro minutos, y si hay alumnos que no lo descubren se dice la solución en la pizarra.

Caso 3

Dividir la figura 3 en cinco piezas exactamente iguales.

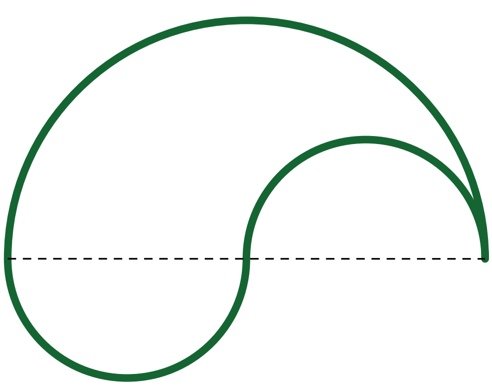

Figura 2

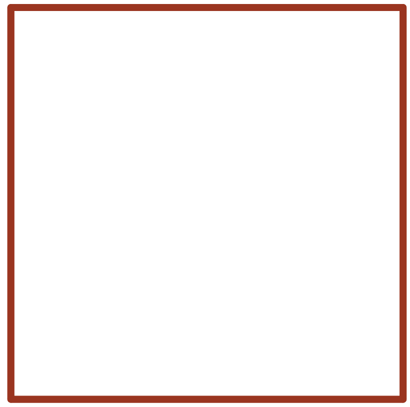

Figura 3

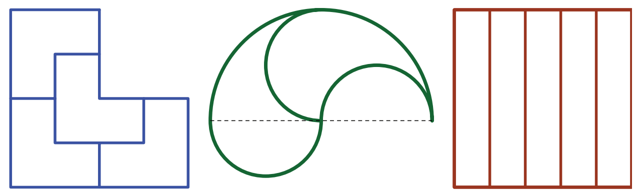

Figura 4. Soluciones casos 1, 2 y 3

En este punto vemos el resultado y se habla de esto con los alumnos. Aquellos de los alumnos que no vean lo fácil de esta última prueba y no consigan resolverla, o tarden mucho en hacerlo, parece que son más «inductivos», es decir, intentan sacar conclusiones de las experiencias anteriores. Primero experimentan y después sacan conclusiones de cómo funciona para resolver el problema. Por eso, por la experiencia de la dificultad de las dos pruebas anteriores, tardan más de la cuenta en esta o ni siquiera ven la solución.

Por el contrario, aquellos que vean rápidamente la solución son más deductivos: primero buscan teorías y sacan conclusiones y después las comprueban y deciden si son buenas, no se basan en las soluciones de las figuras anteriores.

ACTIVIDAD 2: PROTOCOLO DEL PROCESO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Miguel de Guzmán, en su libro *Para pensar mejor* nos cuenta cómo seguir el protocolo del proceso de resolución de un problema para poder mejorarlo. Nosotros vamos a intentar seguir los pasos que nos recomienda en los procesos que sigamos al intentar resolver los problemas que seguirán.

> La realización del protocolo del proceso: durante nuestra ocupación mental con un problema ocurren muchas cosas interesantes. Normalmente, cuando anotamos algo de ello, señalamos nuestros cálculos, los esquemas, figuras o diagramas que pensamos que nos van a ayudar a resolverlo. Pero para lo que aquí nos interesa hay muchos otros fenómenos que, a menos que hagamos un poderoso esfuerzo, nos pasarán desapercibidos.
>
> El mero borrador de nuestros intentos sucesivos de acercamiento a la solución no es el protocolo del proceso. Y mucho más lejos de él está, naturalmente la solución en limpio que podamos elaborar tras nuestro trabajo.
>
> El protocolo ideal del proceso debería hacerme capaz de reproducir, para su estudio, cuanto ha pasado por mi mente, a lo largo de él, en lo que se refiere
>
> — a lo que he ido realizando,
>
> — a lo que he ido pensando,
>
> — a los sentimientos y situaciones afectivas por las que he ido pasando.
>
> Una técnica concreta que nos puede ayudar en la realización del protocolo consiste en ir trabajando en borrador con orden, sin corregir nada de él, ocupándonos con ahínco, por supuesto, de resolver nuestro problema, pero procurando también señalar brevemente los aspectos de la situación de nuestro espíritu que inciden de algún modo en el proceso.
>
> Para contrarrestar que las reflexiones acerca del contenido del problema lo llenen todo, se puede acudir a la ayuda de un reloj que cada cierto intervalo de tiempo, por ejemplo cada diez minutos, nos recuerde que debemos echar una mirada a los otros aspectos del proceso, tales como nuestro estado de ánimo, las vueltas y revueltas de nuestro pensamiento, la fase del proceso en que nos encontramos, según se detallará más adelante (familiarización, búsqueda de estrategias, selección, realización, verificación).
>
> ¿Qué anotar? Se trata de dejar señalados los elementos que nos parezcan útiles para realizar el análisis del proceso. Fundamentalmente, el color afectivo de mi toma de posición ante el problema, la fase del proceso en que me encuentro, mi estado de aburrimiento, desesperación, interés, entusiasmo..., los cambios en el tipo de actividad mental ante el problema..., los orígenes de las posibles ideas que van apareciendo en mi mente...

En las siguientes actividades vamos a examinar un par de protocolos de resolución de problemas como ejemplo de lo que vamos a intentar hacer en los que nos surjan estos días. Lo importante no será la solución del problema, sino lo que anotemos de aquello que pase por nuestra cabeza mientras pensamos en su solución…

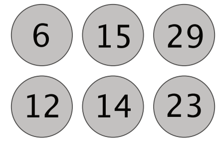

Figura 5

ACTIVIDAD 3: HUEVOS DE GALLINA Y DE PATA

Resolver el siguiente problema apuntando todo lo que podemos del proceso que seguimos en su resolución.

> Un huevero tiene ante sí seis cestas con huevos. Cada una tiene huevos de una clase, de gallina o de pata. Cada cesta tiene el número de huevos que se indica en la figura 5. El huevero dice, señalando una cesta que no acierto a ver cuál es exactamente: «Si vendo esta cesta, me quedará el doble de huevos de gallina que de pata». ¿Podrías ayudarme a averiguar de qué cesta está hablando?

Dejamos un tiempo de resolución, avisando cada tres minutos para obligarnos a ir apuntando regularmente nuestros pensamientos acerca del problema.Leemos, analizamos y evaluamos algunos de los protocolos de los chicos.

Si se desea, se puede ver el protocolo de resolución de este problema que plantea el libro *Para pensar mejor* en las páginas 115 y siguientes (apartado 9: ejemplo, análisis y evaluación del protocolo) y las comentamos.

ACTIVIDAD 4: PARTIENDO LA TABLA

> Queremos cortar una tabla, con la forma que se muestra en la figura 6, en tres partes que puedan colocarse formando un cuadrado. ¿Cómo tenemos que hacerlo?

Después de intentarlo un tiempo, obligándonos, como en la actividad anterior —es bastante difícil— comentamos el siguiente protocolo de resolución a modo de ejemplo.

Empiezo por enterarme bien del enunciado: la figura es un cuadrado rematado por la cuarta parte de este (figura 7).
Se me ocurre, en primer lugar, suponer el problema resuelto, es decir dibujar un cuadrado e intento dividirlo en tres partes que, puestas de otra forma, me den el original. No doy con pistas que sirvan de algo. Veo que el problema no se modifica en dificultad y que es «el mismo, pero con distinto collar». Dibujo la figura para intentar encontrar los cortes adecuados. Hago algunos intentos sin mucho éxito. Me doy cuenta que el problema tal vez no sea fácil y que no puede ser resuelto «con un golpe de suerte». En estos devaneos me doy cuenta de que en la figura original se destaca el punto M como medio de BC. A renglón seguido me viene la idea, que considero buena desde el principio, de que el cuadrado que busco tiene la misma área que la figura que me dan. Hallo el área de esta: una unidad para el cuadrado, más ¼ más para el resto, por lo tanto, el área buscada igual a 5/4. Esto me lleva a calcular el lado que debe tener el cuadrado.
Compruebo por el teorema de Pitágoras, que AM (figura 8) debe ser raíz de 5 partido de 2.
Tengo la impresión de que el problema está encarrilado y se me ocurre lo que sigue: si corto el triangulo AMB y lo llevo al lado AE puede que obtenga algo interesante. Lo hago (figura 9) y compruebo que el ángulo M'AM es recto, y que los ángulos 1 y 2 son iguales. Ya tengo los lados del cuadrado y un ángulo recto en A. Pienso si MD fuera igual a MA iré por buen camino. Parece como obligado que así sea, pero, de entrada, no doy con la razón inapelable. Después de «rumiar» un rato las ideas que barajo y hacer algunos garabatos, se me ocurre lo siguiente, dibujo el triángulo rayado DOM (figura 10). O es el centro del cuadrado. Por otro lado OM = ½ = ON = ND. Según esto el triángulo ODM, tiene DM = raíz de 5 partido de dos.
Veo también que los triángulos rayados en las dos figuras (figuras 10 y 11) son iguales, aunque me parece que esto no va a ser muy relevante.

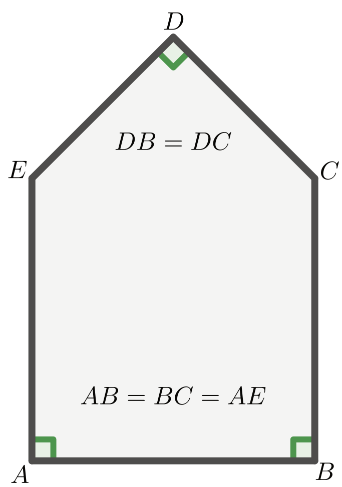

Figura 6

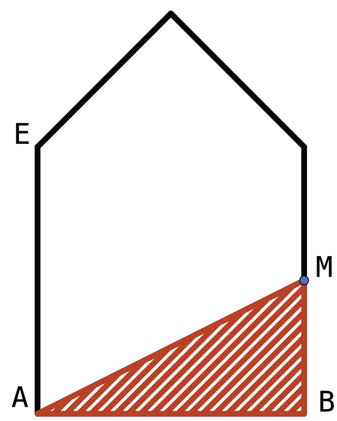

Figura 8

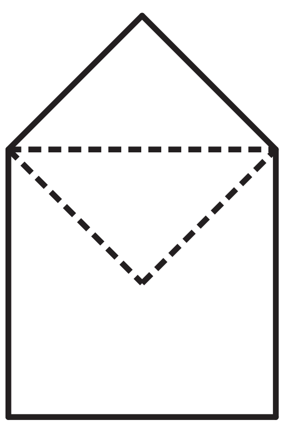
Figura 7

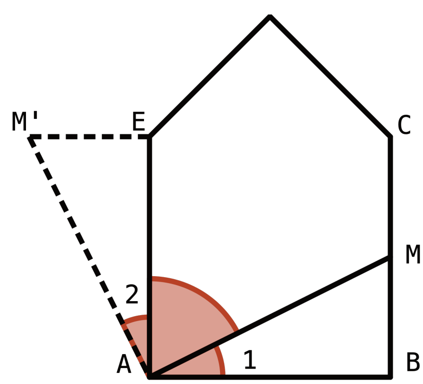

Figura 9

Hago una nueva figura para razonar que el triángulo MCD encaje sobre M'ED, ya que CM = M'E y DC = DE. Tengo un cuadrilátero con todos los lados iguales, luego es un cuadrado o un rombo. Como uno de los ángulos es recto, como ya se ha dicho, su opuesto también (por ser paralelogramo). Para los dos restantes quedan 180º y, al ser iguales, valdrán 90º cada uno. El cuadrado pedido es AMDM' y los trozos que hay que cortar, los dos rayados (Protocolo de Ezequiel Santamaría).

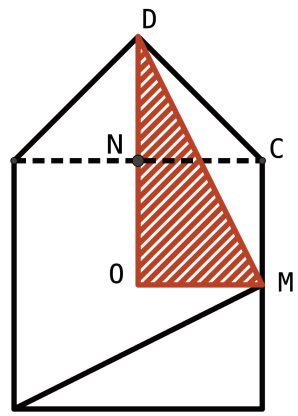

Figura 10

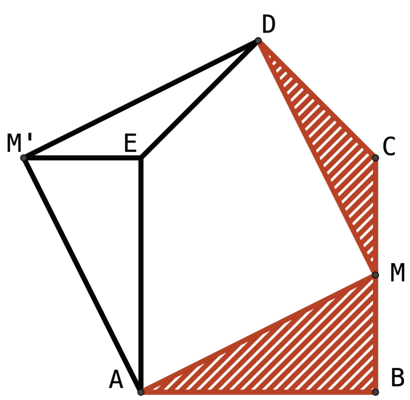

Figura 11

ACTIVIDAD 5: PESAS

Vamos con un problema curioso en el que es difícil ver un método, un proceso, preciso y concreto para llegar a la solución. Ahora nos obligamos a ir anotando todo lo que pasa por nuestras cabezas cada cinco minutos…

Calcular el juego de cuatro pesas que es necesario tener para poder pesar, en una balanza de dos platillos, cualquier cantidad entera desde 1 hasta 40 kg.

Se puede conocer más acerca de la historia y una revisión de este interesante problema en <https://culturacientifica.com/2017/02/22/problema-clasico-pesas/> (Solución: 1, 3, 9 y 27 kg).

Extensión

Consiste en mirar si se puede aprovechar lo que hemos realizado durante la resolución del problema, el protocolo seguido y las herramientas utilizadas en el proceso de resolución de otros problemas aparentemente distintos, si se puede llegar más lejos que a conseguir la solución, si se pueden sacar conclusiones paralelas…

EJEMPLO DE UN CLASE DE 2.º DE SECUNDARIA

Veamos como un típico y casi diríamos que anodino problema de divisibilidad de la primera unidad del libro de texto se convirtió en algo más gracias a su extensión por parte de un alumno. Este es el enunciado:

Una moto da una vuelta a un circuito cada 84 segundos y otra cada 96 segundos. Si salen a la vez, ¿cuántos segundos pasarán hasta que vuelvan a pasar por la línea de meta a la vez?, ¿cuántas vueltas habrá dado al circuito cada moto en ese tiempo?

Solución: $m.c.m.(98{,}84)=2^5\cdot 3\cdot 7=672$ segundos, así pues, la que tarda 96 segundos habrá dado $672:96=7$ vueltas, y la que tarda 84, $672:84=8$ vueltas. Fácil.

Alumno: Pero $96-84=12$ y $96:12=8$, $84:12=7$ ¿será una coincidencia?

El alumno ha hecho una conjetura. ¿Pasará siempre?, ¿se podrá generalizar? Probamos esa conjetura.

ACTIVIDAD 6: ¿SERÁ COINCIDENCIA?

En el ejemplo anterior: probamos con 75 y 60 segundos. ¿Pasa lo mismo? ¿Y con 16 y18? ¿Con qué otros números pasa? ¿Se cumple con cualesquiera dos números?...

Prueba con 50 y 46 segundos. ¿Qué conclusiones obtenéis acerca de cuándo ocurre y cuándo no? …

Parece que solo pasa si da la casualidad de que los dos números son múltiplos de su diferencia… ¿Se podrá utilizar el método del alumno siempre que se dé esa casualidad?…

Estamos ampliando el problema, extendiendo su aplicación y utilidad.

ACTIVIDAD 7: EL ABANICO

Es un juego que, sin más afán que la mera adivinación, se practicaba en Francia hace siglos. Es un juego que puede prolongarse más allá de lo que puede parecer. Se presenta un abanico de cinco varillas (figura 12).

Se pide a cada alumno que piense un número menor que 32.

A continuación se pregunta a cada uno:

- Está en la primera varilla? Supongamos que el alumno ha elegido el número 18: contestará que no.
- ¿Está en la segunda varilla? En el ejemplo dirá que sí.
- ¿Está en la tercera varilla? En el ejemplo dirá que no.
- ¿Está en la cuarta varilla? En el ejemplo dirá que no.
- ¿Está en la quinta varilla? En el ejemplo dirá que sí.

1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Figura 12

Entonces se «adivina»: Has pensado el número 18 (= 0·1+1·2+0·4+0·8+1·16). Se continúa adivinando el número que han pensado cuatro o cinco alumnos.

Los alumnos deben observar y tratar de adivinar el «truco» del profesor. En el momento en que alguno empieza a observar que basta con fijarse en los números que encabezan cada varilla y sumar los números correspondientes a las varillas en las que «sí» está el número pensado, van pasando a adivinar ellos números pensados por el profesor

Como actividad posterior, cabe que observen la formación de cada varilla. Todas terminan en 31: la primera empieza en 1, la segunda en 2, la tercera en 4… En la primera varilla hay solo números impares, ¿cómo son los de la segunda varilla? Es muy interesante que se discutan las diferentes leyes de formación que vayan dando los alumnos.

Posteriormente, puede surgir la idea de construir otro abanico que sirva para adivinar números de la misma manera, pero que contenga más números. ¿Cómo podría construirse? En este punto, es muy frecuente que la generalización la intenten hacer prolongando las varillas con la misma ley de formación… No rechazar la idea; que sean ellos los que, a través de discusiones y propuesta de experimentaciones, se den cuenta de la imposibilidad de que el abanico así construido sirva para adivinar números de la misma manera. Finalmente, puede ocurrir que algunos se pregunten el por qué; se les puede iniciar entonces a una investigación.

ACTIVIDAD 8: LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

> Escribe en una hoja de papel dos unos, uno encima de otro. Escribe debajo de ellos la suma de ambos.
> Vete repitiendo varias veces la operación anterior: vete escribiendo debajo el número que resulta de sumar los dos últimos números anteriores. Sigue rea-

lizando el mismo proceso hasta que hayas escrito más de diez números en total.

Esta sucesión tiene muchas propiedades para investigar. Aquí te hacemos algunas sugerencias. Si empiezas con dos unos: 1, 1, 2, 3, ...

a) ¿Qué sale si sumas de tres en tres términos?: $1+1+2$, $1+2+3$,... ¿Y si sumas de cuatro en cuatro?
b) Si sumas los cuadrados de dos en dos términos: 1^2+1^2, 1^2+2^2, 2^2+3^2,…
c) ¿Te suena cómo van evolucionando sus razones? $1/1=1$, $2/1=2$, $3/3=1{,}5$,…
d) Si vas haciendo grupos cualquiera de cuatro en cuatro, como 2, 3, 5, 8: $2\times 8=16$, $3\times 5=15$...
e) Escoge un grupo de 10 términos consecutivos. Compara la suma de los diez términos con el séptimo término de ese grupo.

Una propiedad notable de las sucesiones de Fibonacci establece que la suma final será igual al séptimo término de la sucesión multiplicado por 11, es decir, $S_{10}=11\cdot F_7$.

Hacer conjeturas. Generalizar, … Investigaciones Matemáticas

Intentamos deducir qué se cumple, lo suponemos… —a eso se le llama hacer conjeturas—, intentamos demostrarlo, buscamos casos que se cumplan en general: ¿y si hubiese preguntado para «*n*» cosas?...

ACTIVIDAD 9: CONJETURAS

Leemos el texto siguiente, extraído de *Repasa con ejercicios-Secundaria* Vol.1. Ed. Oxford, e intentamos responder a las cuestiones que se plantean acerca de lo que es una conjetura y cómo ver si es verdadera, falsa o no demostrada.

Una conjetura o hipótesis es simplemente una proposición que puede ser verdadera o falsa. Los matemáticos y los científicos están siempre buscando reglas y fórmulas que les permitan hacer los cálculos más rápidos y fáciles, o bien que les permitan establecer relaciones entre distintas áreas del conocimiento.

Imagínate que estás realizando cierta investigación y que después de trabajar en ella crees que has observado una regla. Podrías pensar o conjeturar que: «x^2 es siempre mayor que x».
O que: «la expresión x^2+x+41 da un número primo para todos los valores enteros de x».

Se pueden dar tres posibilidades para una conjetura: verdadera, falsa o no demostrada.

a) Verdadera
Para demostrar que una conjetura es cierta no basta comprobarla para unos pocos casos. Hay que comprobarla para todos los casos posibles. Cuando se demuestra que es verdadera se convierte en una ley o en un teorema (se puede trabajar después).

b) Falsa
Para demostrar que una conjetura es falsa basta con encontrar un caso que no la verifique. Este caso se denomina contraejemplo.

Ejemplo 1
Consideremos la conjetura «x^2 es siempre mayor que x».
Es cierta, por ejemplo, en los casos: $2^2>2$; $(3{,}1)^2>3{,}1$; $(-5)^2>-5$.
Sin embargo, 0^2 no es mayor que 0, ni 1^2 es mayor que 1, ni $(½)^2$ es mayor que ½.
Todos estos casos son contraejemplos y con uno de ellos ya nos basta para demostrar que la conjetura es falsa.
Ejemplo 2
Consideremos ahora la conjetura «la expresión x^2+x+41 da un número primo para todos los valores enteros de x».
Si sustituimos unos pocos valores como los de la tabla de la figura 13, tenemos como resultado números primos. Esto es así hasta $x=39$, pero cuando $x=40$, $x^2+x+41=1681$, que no es primo puesto que $1681=41\times 41$.
Hemos encontrado un contraejemplo, luego la conjetura es falsa.

c) No demostrada
Hay ciertas conjeturas que no se ha podido demostrar que sean ciertas o falsas. En estos casos, es la experiencia la que suele tomarse como referencia. Si tras mucho tiempo somos incapaces de encontrar un contraejemplo, es probable que la conjetura sea verdadera. Estas conjeturas suelen recibir el nombre de

x	1	2	3	4	5	6
x^2+x+41	43	47	53	61	71	83

Figura 13

principios. Aun así, recuerda que con encontrar un solo contraejemplo la conjetura es falsa.

Un ejemplo muy famoso es el llamado el «Último Teorema» de Fermat. Fermat fue un matemático francés del siglo XVII que formuló la siguiente hipótesis: «Para $n > 2$ no hay ningún trío de números enteros a, b, c que cumplan que $a^n + b^n = c^n$».

Durante 300 años no se pudo demostrar ni encontrar un contraejemplo. En 1993, por fin, un matemático inglés demostró el teorema.

Ejercicio 1
En los ejercicios siguientes debes indicar si la conjetura dada es falsa, utilizando un contraejemplo, o simplemente no demostrada, si no consigues hallar ningún contraejemplo.
a) $(n+1)^2 = n^2 + 1$ para todos los valores de n.
b) $(1/x)$ es siempre menor que x.
c) La raíz cuadrada de x es siempre menor que x.
d) Para cualquier valor de n, $2n$ es mayor que $n-2$.

$\Rightarrow$ Signos de implicación
En matemáticas se utilizan muchos símbolos para simplificar la escritura. Uno de ellos es el signo de implicación, $\Rightarrow$. Se utiliza mucho en las conjeturas y en las demostraciones.

Por ejemplo, la expresión «$a > b \Rightarrow a-b>0$» se puede leer como: «Si *a* es mayor que *b* entonces *a* menos *b* es mayor que 0»
O bien: «*a* mayor que *b* implica que *a* menos *b* es mayor que 0»
Recuerda que la expresión puede ser verdadera o falsa: $x=4 \Rightarrow x^2=16$ es verdadera, pero $x^2=16 \Rightarrow x=4$ es falsa porque x puede ser también –4.
Ejercicio 2
Indica si son falsas las siguientes conjeturas:
a) $x-4=3 \Rightarrow x=7$.
b) n es par $\Rightarrow n^2$ es par.
c) $a=b \Rightarrow a^2=b^2$.
d) $x>2 \Rightarrow x=3$.
e) $a+b$ es impar $\Rightarrow ab$ es par (siendo a y b números enteros).
f) $x^2=4 \Rightarrow x=2$.
g) $pq=0 \Rightarrow p=0$

ACTIVIDAD 10: INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS

Quizá la única dificultad real de las matemáticas es el miedo inicial con el que todos nos enfrentamos a un problema (sobre todo, si contiene un gran número de letras y de signos extraños). Las investigaciones permiten luchar contra el miedo ya que tienen un fondo de juego y de fomento de la curiosidad humana que hacen de las matemáticas algo más accesible a todos.

Esta relación sirve como guía de ayuda para desarrollar una investigación matemática.

a) Si el conjunto del problema te parece muy complicado, trata de resolver un caso más sencillo.
b) Dibuja tus propias figuras con cierta precisión.
c) Haz tablas con los resultados que obtengas y sé sistemático.
d) Busca regularidades o patrones.
d) ¿Hay alguna regla o fórmula que describa los resultados?
e) ¿Puedes predecir más resultados?
f) ¿Puedes demostrar alguna regla que podrías hallar?
g) Desarrolla la tarea de la investigación haciéndote preguntas como esta: «¿Qué pasaría si ...?»

Esquinas opuestas

Aquí tienes una tabla (figura 14) con números ordenados en 10 filas y 9 columnas.
En cualquier cuadrado con dos por dos números que elijas, la diferencia entre los productos de las esquinas opuestas es 9.
En cualquier cuadrado con tres por tres números que elijas, la diferencia entre los productos de los números de las esquinas opuestas es 36.
Investiga si existe alguna regla o patrón que relacione el tamaño del cuadrado con la diferencia de los productos de sus esquinas.
Si encuentras una regla, utilízala para predecir las diferencias en cuadrados más grandes. Comprueba tu regla para cuadrados 8×8 y 9×9.
¿Puedes generalizar la regla?
Ayuda: En un cuadrado 3×3, ¿qué habría pasado si

los números hubiesen estado ordenados en tablas de 6 columnas o de 7 columnas? Es decir, 1.ª fila: 1 al 6, 2.ª fila: 7 al 12…, o 1.ª fila: 1 al 7, 2.ª fila: 8 al 14…

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81
82	83	84	85	86	87	88	89	90

Figura 14

Marcador al final del primer tiempo

El resultado final de un partido de fútbol fue de 3-2, selecciona tú mismo los posibles equipos de fútbol. ¿Cuántos resultados diferentes son posibles al final del primer tiempo?

Investiga para otros resultados finales donde también sea la diferencia de un gol, por ejemplo, 1-0, 5-4, etc. ¿Existe una regla o patrón que nos diga el número de posibles marcadores en el descanso en un partido que acaba con 58-57? ¡Vaya festival de goles!, ¿no?.

Imagina que el partido acaba en un empate. Halla una regla que nos diga el número de marcadores al descanso si el resultado final fue de 63-63.

Investiga lo que ocurre para otros resultados como 3-0, 5-1, 4-2, etcétera.

Halla una regla que nos diga el número de marcadores al descanso para cualquier resultado final *a*-*b*.

Suma digital

Sea el número 134. La suma de sus dígitos o cifras es 1+3+4=8. Diremos que la suma digital de 134 es 8.

Sea el número 238. 2+3+8=13. Continuamos si es mayor que 9, se suman los dos dígitos, 1+3=4. La suma digital de 238 es 4.

Considera los múltiplos de 3 (figura 15), la suma digital es siempre 3, 6 o 9. Estos números forman un triángulo equilátero (figura 16) dentro de una circunferencia.

Investiga los patrones de las sumas digitales de los múltiplos de: a) 2 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7 f) 8 g) 9 h) 11 i) 12

Número	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
Suma digital	3	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	9

Figura 15

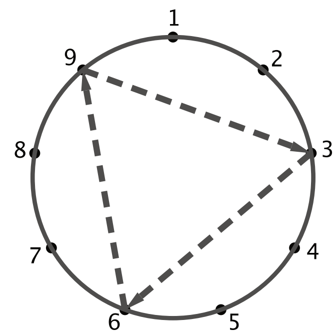

Figura 16

¿Hay alguna relación entre los números para los que el patrón de la suma digital es la misma?

¿Puedes predecir qué patrón deben seguir los múltiplos de 43?, ¿y de 62?

Y, para acabar, recuerda: en estos problemas, ¿qué habría pasado si…?, ¿y si hubiésemos cambiado…? Puedes hacerte todas las preguntas que quieras, ¡eso, e intentar responderlas, es investigar!

Referencias bibliográficas

Burton, L., J. Mason y K. Stacey (1988), *Pensar matemáticamente,* MEC, Madrid.

Cabrillo, E., y D. Rayner (1998), *Repasa con ejercicios, vol. 1: Números y Álgebra*, Oxford University Press, Madrid.

Fuente, C. de la, y J. J. Zárate (1993), «La Revisión – Extensión en la Resolución de Problemas», *Sigma*.

Guzmán, M. de (2011), *Para pensar mejor,* Pirámide, Madrid.

Polya, G. (1965), *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.

Shell Centre for Mathematical Education (1984), *Problems with Patterns and Numbers*, Universidad de Nottingham.

Enrique Hernando Arnaiz

La Merced – jesuitas, Burgos

<qsaurio@yahoo.es>