Herramienta para la mejora de la competencia matemática

Tuti Comalat Navarra
Ángel Antonio García Marrero
M.ª Cristina Naya Riveiro

SUMA+ núm. 94
pp. 59-72
Artículo solicitado por *Suma* en abril de 2020 y aceptado en junio de 2020

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria, y en cualquier etapa educativa, podría considerarse exitoso si los y las estudiantes aprenden a utilizar de forma significativa, comprensiva y hasta eficaz los conocimientos matemáticos adquiridos en la escuela en su vida diaria, sabiendo aplicarlos en cada contexto de su día a día.

Para promover este tipo de enseñanza, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) puso de manifiesto que había que fomentar una educación matemática abordando dos tipos de conocimiento matemático: los contenidos (numeración y cálculo, álgebra, geometría, medida, datos y azar) y los procesos (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación). Cuestión reafirmada por de Guzmán (2001) defendiendo un cambio de paradigma en la enseñanza de las matemáticas «[…] vale mucho más proveerse de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en ideas inertes […]».

Un intento de reflejar esta necesidad, impulsado por la primera evaluación internacional del programa PISA de la OCDE en el año 2000 (donde el concepto de competencias entra en el ámbito estatal) parecía ocurrir cuando se incorpora por primera vez el término competencia en el currículo educativo en la Ley Orgánica 2/2006 de Educación (LOE), posteriormente en la Ley Orgánica 8/2013 para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) y seguramente también se mantendrá en el Proyecto de Ley Orgánica por la que se Modifica la Ley Orgánica 2/2006. Pero como se recoge en el Informe sobre el currículo de la LOMCE publicado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) en 2014 «la noción de competencia carece de una definición conceptual y se echa de menos unas referencias explícitas sobre cómo desde la educación matemática se puede contribuir al desarrollo del resto de competencias básicas, ya que todos los currículos legislativos se centran particularmente en mostrar simplemente los contenidos», y más importante que el contenido aprendido es el proceso de adquisición del mismo.

Aun así, bajo este paradigma, y ya muchos años antes, numerosos docentes, asociaciones, agrupaciones, movimientos de renovación pedagógica, etc. (por ejemplo la labor del Grupo Cero de Valencia, del Equipo Granada-Mats, del Grup Zero de Barcelona, del Colectivo de Didáctica de las Matemáticas de Sevilla, del Colectivo Rosa Sensat, del Grupo Azarquiel de Madrid, del Grupo Octógono de Galicia...), y distintas publicaciones (por citar algunas: Niss, 2002; Goñi, 2008; Planas y Alsina, 2009) han diseñado orientaciones para ayudar a incorporar en las prácticas de aula actividades que enriquecen y fomentan la competencia matemática, es decir, diseñar tareas que impliquen diferentes procesos matemáticos con la presencia en mayor o menor medida de recursos como materiales manipulativos, digitales, y destacando en esta publicación el papel que puede tener en esto la calculadora.

A continuación, se presentan cuatro actividades para realizar con la calculadora donde se muestra cómo este recurso facilita y contribuye a mejorar y fomentar las competencias básicas de la etapa, y en particular de la competencia matemática. Esta presentación se realiza atendiendo al desarrollo de las competencias básicas curriculares realizado en Cataluña (Sarramona, 2014). Cabe señalar que el Departamento de Enseñanza de la Generalitat ha definido un modelo de desarrollo de las competencias básicas en la etapa de educación primaria que orienta el desarrollo del currículo del área de matemáticas. Así, las competencias matemáticas de la educación primaria incorporan cuatro dimensiones competenciales que se corresponden con los procesos inherentes al trabajo matemático: resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones y comunicación y representación. Cada una de estas dimensiones está integrada por diferentes competencias y unos contenidos clave que contribuyen en mayor medida al desarrollo de las competencias.

Las actividades que se presentan se realizan en el grupo de trabajo del seminario *La calculadora como recurso didáctico en Educación Primaria* de la FESPM en colaboración con la División Educativa CASIO España.

Actividades para mejorar la competencia matemática en el aula

Las dos primeras actividades que se presentan hacen referencia a las dimensiones de «razonamiento y prueba y comunicación y representación».

Razonar es indispensable en la construcción del conocimiento matemático y por lo tanto ha de formar parte del aprendizaje de las matemáticas. Probar conjuntamente con razonar dan sentido al conocimiento matemático, pues el trabajo de la capacidad de razonar ha de tener como objetivo que el alumnado lo aplique en todos los ámbitos de su vida de una forma lógica, ya que cuando los razonamientos se pueden comprobar aumenta la confianza y la seguridad en la resolución de situaciones problemáticas, sean matemáticas o no. Así, el alumnado ha de entender que rechazar un razonamiento en muchas ocasiones puede tener un aspecto positivo: el de buscar otras vías y también que, validar una afirmación, no es el final, sino el inicio de nuevas argumentaciones.

Dentro de esta dimensión se encuentra la competencia «hacer conjeturas matemáticas adecuadas en situaciones cotidianas y comprobarlas». La conjetura se entiende como una anticipación de los hechos, que generalmente se obtiene a partir de la observación, de la exploración y de la búsqueda de hechos matemáticos que surgen de afirmaciones basadas en suposiciones. Por ello, hacer conjeturas forma parte del proceso de abstracción que implica el descubrimiento y la expresión de relaciones, propiedades y de patrones o regularidades.

La práctica habitual de la expresión de ideas matemáticas entre el alumnado, tanto oralmente como por escrito, ayuda al estudiante a organizar sus ideas y a ser claros, convincentes y precisos en el uso del vocabulario y símbolos matemáticos. Escuchar atentamente los argumentos de los compañeros y las compañeras proporciona oportunidades de reflexión y mejora del propio conocimiento; ya que permite reafirmar el pensamiento propio de uno mismo, ser consciente de lo que se sabe y establecer conexiones.

Dentro de la dimensión de «comunicación y representación» se encuentran dos competencias que también se abordan en estas actividades: «expresar ideas y procesos matemáticos de manera comprensible utilizando el lenguaje verbal (oral y escrito) y usar las herramientas tecnológicas con criterio, de forma ajustada a la situación, e interpretar las representaciones matemáticas que ofrecen».

Se destaca el uso de la calculadora como la herramienta que favorece la realización de algoritmos no habituales, agiliza el proceso de cálculo, permite explorar los números y las operaciones, experimentar relaciones numéricas y buscar propiedades de los números y las operaciones.

Se plantean las actividades como aquellas en las que después de la práctica exhaustiva con la calculadora, se llegará a elaborar una conclusión que nos hará más fácil operar.

Las dos últimas actividades presentadas profundizan principalmente en la dimensión de «resolución de problemas y conexiones».

La resolución de problemas es una de las metodologías y tareas más importantes del estudio y aprendizaje de las matemáticas, ya que se puede y se debe enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas porque, entre otras cuestiones, ofrece la oportunidad de enfrentar al alumno/a a un reto que tiene que resolver, buscar el camino para su resolución, experimentar diversos procedimientos o técnicas, descubrir una posible solución, aplicar sus conocimientos y adquirir confianza en las propias capacidades.

Dentro de esta dimensión se trabajarán estas competencias: «Traducir un problema en una representación matemática y emplear conceptos, herramientas y estrategias matemáticas para resolverlo; dar y comprobar la solución de un problema de acuerdo con las preguntas planteadas y preguntar y generar problemas de tipo matemático».

Para construir el conocimiento de forma integrada y conectarlo con la realidad fuera del aula es imprescindible conectar contenidos con la intención de encontrar y aplicar relaciones. Por ello, siempre en el proceso de enseñanza y aprendizaje, para adquirir un aprendizaje significativo, es conveniente establecer relaciones y conexiones entre los distintos contenidos matemáticos.

Esta dimensión trabaja las competencias «establecer relaciones entre diferentes conceptos, así como entre los diversos significados de un mismo concepto e identificar las matemáticas implicadas en situaciones cotidianas y escolares y buscar situaciones que se puedan relacionar con ideas matemáticas concretas».

El papel de la calculadora en estas actividades por un lado facilita el desarrollo de sus cálculos, fomenta la focalización del alumnado en las estrategias de resolución de problemas y no en el cálculo, beneficia la selección de la aproximación de la solución y conecta distintas representaciones matemáticas.

Multiplicación y división por la unidad seguida de ceros

En un aula de educación primaria, ¿cuántas veces no hemos dictado aquello de «para multiplicar por la unidad seguida de ceros multiplicamos las cifras que no son cero y añadimos tantos ceros como tenga la unidad? Hemos puesto unos ejemplos y acto seguido hemos hecho unos cuantos ejercicios. Pero, ¿y si hacemos que lo descubran ellos?».

Generalmente, esta actividad si solo afecta a números naturales se puede trabajar desde el tercer curso de educación primaria, pero en este ejemplo y por la presencia de la expresión decimal de números racionales, está indicada para cuarto o quinto curso.

Esta experiencia se ha implementado en la Escuela Guinardó SCCL de Barcelona diseñada para trabajar con el modelo de calculadora CASIO SL-310UC, pero sería válido cualquier modelo de calculadora básica. Cabe destacar, que la experiencia se realizó en este período tan excepcional de la COVID-19, ya que el confinamiento se presentó cuando el grupo de aula estaba asentando la expresión decimal de un número racional, su relación con su expresión fraccionaria y empezando a introducir las operaciones de suma y resta de expresiones decimales. El grupo de estudiantes está acostumbrado a usar la calculadora como una herramienta habitual en su aprendizaje.

El objetivo de la actividad es obtener conclusiones sobre cómo podemos multiplicar y dividir de forma rápida un número natural o decimal por potencias de 10 a través del manejo de la calculadora.

Con esta actividad se trabajan los contenidos pertenecientes a los siguientes bloques:

- Numeración y cálculo: comprensión y uso de los diferentes significados de las operaciones con números decimales. Exploración y comprensión de propiedades de las operaciones y elaboración de conjeturas. Desarrollo de estrategias de cálculo mental con números naturales y la expresión decimal de un número racional.
- Relaciones y cambio: comprensión y análisis de patrones, relaciones y cambios. Análisis de las propiedades de los números y de las operaciones.

Dada la excepcionalidad de la situación en la que vivimos, la metodología y temporalidad implementadas en la actividad han sido muy diferentes a las que hubiesen tenido en el aula habitual de clase. Pues ahora han tenido una semana para desarrollarla y poder interactuar con la docente, mientras en la escuela, presencialmente, le hubiésemos dedicado dos sesiones de aula a cada una de las actividades: una para la realización de los ejercicios y otra para la discusión de las conclusiones y la elaboración de un enunciado final.

Figura 1. Modelo de calculadora usada en el el aula

La actividad se ha realizado a través de la plataforma Google Classroom y utilizando un documento compartido en un sitio web accesible para todos. En general, la realización de esa actividad en el aula, permite a los estudiantes recibir la retroalimentación tanto de sus compañeros y compañeras como de su maestro/a, donde todas las aportaciones colaboran para elaborar una afirmación consensuada sobre la resolución de la actividad. Pero en estas circunstancias la actividad presentó una debilidad, y es que cada estudiante ha recibido únicamente la retroalimentación del docente. Puesto que es una actividad que ya se ha implementado en el aula durante otros cursos académicos, posteriormente, en el análisis de la experiencia se detallarán cuestiones que en otras ocasiones han surgido en el aula ordinaria.

La actividad que se presenta al alumnado es la siguiente:

1. Realiza las siguientes operaciones con la calculadora:

$234 \times 10 =$	$980 \times 10 =$	$45 \times 10 =$
$8 \times 10\,000 =$	$65 \times 100 =$	$43 \times 1\,000 =$
$5 \times 1\,000 =$	$76 \times 1\,000 =$	$129 \times 1\,000 =$
$3 \times 10 =$	$100 \times 6 =$	$10\,000 \times 32 =$
$20 \times 100 =$	$100 \times 23 =$	$1\,000 \times 432 =$
$40 \times 100 =$		

Si miras los resultados, ¿qué observas?

2. Realiza las siguientes operaciones con la calculadora:

$0{,}52 \times 10 =$	$2{,}31 \times 1\,000 =$	$0{,}005 \times 100 =$
$5{,}32 \times 1\,000 =$	$1{,}35 \times 100 =$	$0{,}002 \times 1\,000 =$
$35{,}7 \times 100 =$	$0{,}54 \times 1000 =$	$12{,}3 \times 10 =$
$3{,}02 \times 100 =$	$1{,}35 \times 10 =$	$123{,}4 \times 10 =$
$3{,}504 \times 100 =$	$0{,}003 \times 10 =$	$2{,}54 \times 100 =$
$0{,}32 \times 100 =$		

   Si miras las cifras decimales de los resultados, ¿qué observas?

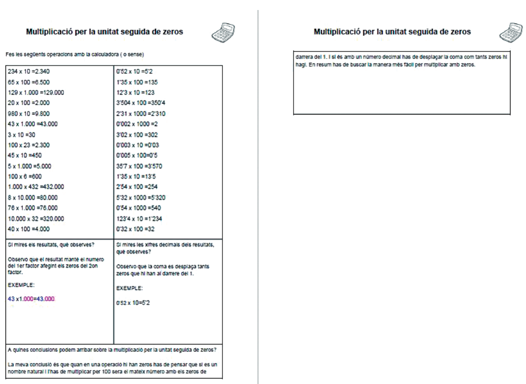
3. ¿A qué conclusiones podemos llegar sobre la multiplicación por la unidad seguida de ceros?

La estructura de la actividad está diseñada para que el alumnado primero interactúe a través del manejo con la calculadora tomando datos, para buscar, indagar y deducir un patrón o una regularidad, y con una pregunta que le ayude a reflexionar. Así en dos ocasiones, para luego poder concluir lo que se busca como objetivo de la actividad.

En la figura 2 se presenta la resolución de la actividad por parte de un/a estudiante.

Presentamos, a continuación, un breve análisis de la resolución de la actividad teniendo en cuenta la respuesta dada por parte de un/a estudiante.

La respuesta a la primera pregunta es: «Observo que el resultado mantiene el número del primer factor añadiendo los ceros del segundo factor».



Multiplicació per la unitat seguida de zeros

Fes les següents operacions amb la calculadora (o sense)

234 x 10 =2.340	0'52 x 10 =5'2
65 x 100 =6.500	1'35 x 100 =135
129 x 1.000 =129.000	12'3 x 10 =123
20 x 100 =2.000	3'504 x 100 =350'4
980 x 10 =9.800	2'31 x 1000 =2'310
43 x 1.000 =43.000	0'002 x 1000 =2
3 x 10 =30	3'02 x 100 =302
100 x 23 =2.300	0'003 x 10 =0'03
45 x 10 =450	0'005 x 100=0'5
5 x 1.000 =5.000	35'7 x 100 =3'570
100 x 6 =600	1'35 x 10 =13'5
1.000 x 432 =432.000	2'54 x 100 =254
8 x 10.000 =80.000	5'32 x 1000 =5'320
76 x 1.000 =76.000	0'54 x 1000 =540
10.000 x 32 =320.000	123'4 x 10 =1'234
40 x 100 =4.000	0'32 x 100 =32
Si mires els resultats, què observes? Observo que el resultat manté el numero del 1er factor afegint els zeros del 2on factor. EXEMPLE: 43 x1.000=43.000	Si mires les xifres decimals dels resultats, què observes? Observo que la coma es desplaça tants zeros que hi han al darrere del 1. EXEMPLE: 0'52 x 10=5'2

A quines conclusions podem arribar sobre la multiplicació per la unitat seguida de zeros?

La meva conclusió és que quan en una operació hi han zeros has de pensar que si es un nombre natural i l'has de multiplicar per 100 sera el mateix número amb els zeros de

Multiplicació per la unitat seguida de zeros

darrera del 1. I si és amb un número decimal has de desplaçar la coma com tants zeros hi hagi. En resum has de buscar la manera més fàcil per multiplicar amb zeros.

Figura 2. Ejemplo de resolución de la actividad por parte de un/a estudiante

Es evidente que cuando se refiere al primer factor se está refiriendo al factor que no es la unidad seguida de ceros. Posiblemente con una conversación en el aula otro/a alumno/a hubiera precisado más y podríamos haber redefinido la afirmación. También en clase habríamos precisado que no únicamente los ceros provienen de la unidad y que haría falta generalizar un poco más.

En la segunda pregunta se tiene la siguiente respuesta: «Observo que la coma se desplaza tantos ceros como hay detrás del uno».

En el diálogo en el aula seguramente nos hubiésemos preguntado ¿hacia dónde se desplaza?, ¿por qué hay resultados con coma y otros no?

En las respuestas de alguna compañera, se añade: «Observo que el resultado es mayor que el factor multiplicado»; lo que nos permitiría hablar de si multiplicar siempre es hacer los números más grandes (que se trabajaría en la multiplicación de números decimales).

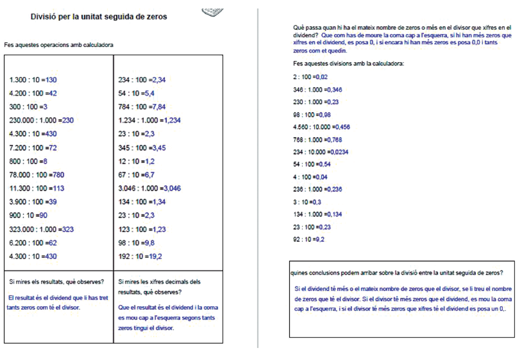
Y se recoge en las conclusiones generales:

> Mi conclusión es que cuando en una operación hay ceros, tienes que pensar que, si es un número natural y lo tienes que multiplicar por 100, será el mismo número con los ceros de detrás del uno. Y si es un número decimal, tienes que desplazar la coma tantos ceros como haya. En resumen, tienes que buscar la manera más fácil para multiplicar con ceros.

En el aula, se hubiese realizado una puesta en común, y con esta respuesta tendríamos que concretar cuestiones como ¿qué quiere decir el mismo número?, ¿hacia dónde va la coma?, ¿qué pasa cuando no hay números para desplazar la coma?

Pero, aun así, nos quedamos con la conclusión a la que ha llegado: *tenemos que buscar la manera más fácil para multiplicar con ceros*. Pues como nos planteábamos en el objetivo de esta actividad, hemos encontrado un método con el que las matemáticas, y podríamos añadir, mediante la utilización de la calculadora, nos facilitan la vida.

Un trabajo similar se puede realizar con la actividad *División por la unidad seguida de ceros*, recogiendo en la figura 3 el ejemplo resuelto por un/a estudiante.



Divisió per la unitat seguida de zeros

Fes aquestes operacions amb calculadora

1.300 : 10 =130 4.200 : 100 =42 300 : 100 =3 230.000 : 1.000 =230 4.300 : 10 =430 7.200 : 100 =72 800 : 100 =8 78.000 : 100 =780 11.300 : 100 =113 3.900 : 100 =39 900 : 10 =90 323.000 : 1.000 =323 6.200 : 100 =62 4.300 : 10 =430	234 : 100 =2,34 54 : 10 =5,4 784 : 100 =7,84 1.234 : 1.000 =1,234 23 : 10 =2,3 345 : 100 =3,45 12 : 10 =1,2 67 : 10 =6,7 3.046 : 1.000 =3,046 134 : 100 =1,34 23 : 10 =2,3 123 : 100 =1,23 98 : 10 =9,8 192 : 10 =19,2
Si mires els resultats, què observes? El resultat és el dividend que li has tret tants zeros com té el divisor.	Si mires les xifres decimals dels resultats, què observes? Que el resultat és el dividend i la coma es mou cap a l'esquerra segons tants zeros tingui el divisor.

Què passa quan hi ha el mateix nombre de zeros o més en el divisor que xifres en el dividend? Que com has de moure la coma cap a l'esquerra, si hi han més zeros que xifres en el dividend, es posa 0, i si encara hi han més zeros es posa 0,0 i tants zeros com et quedin.

Fes aquestes divisions amb la calculadora:

2 : 100 =0,02
346 : 1.000 =0,346
230 : 1.000 =0,23
98 : 100 =0,98
4.560 : 10.000 =0,456
768 : 1.000 =0,768
234 : 10.000 =0,0234
54 : 100 =0,54
4 : 100 =0,04
236 : 1.000 =0,236
3 : 10 =0,3
134 : 1.000 =0,134
23 : 100 =0,23
92 : 10 =9,2

quines conclusions podem arribar sobre la divisió entre la unitat seguida de zeros?

Si el dividend té més o el mateix nombre de zeros que el divisor, se li treu el nombre de zeros que té el divisor. Si el divisor té més zeros que el dividend, es mou la coma cap a l'esquerra, i si el divisor té més zeros que xifres té el dividend es posa un 0,.

Figura 3. Actividad para trabajar la división por la unidad seguida de ceros realizada por un/a estudiante

Multiplicación de números racionales a partir de su expresión decimal

Esta experiencia, como la actividad anterior, se ha implementado en un aula de quinto curso de educación primaria de la Escuela Guinardó SCCL de Barcelona diseñada para trabajar con el modelo de calculadora CASIO SL-310UC, pero sería válido cualquier modelo de calculadora básica.

El objetivo propuesto de la actividad es ayudar a descubrir que las multiplicaciones con la expresión decimal de un número racional no tienen gran complejidad si se conoce y domina la multiplicación entre números naturales. Se podría afirmar que si se comprende una también sabes la otra.

Del mismo modo que en el caso anterior, los contenidos que se trabajan con esta actividad son de los siguientes bloques:

— Numeración y cálculo: Comprensión y uso de los diferentes significados de las operaciones con números decimales. Exploración y comprensión de propiedades de las operaciones y elaboración de conjeturas. Desarrollo de estrategias de cálculo mental con números naturales y decimales.
Además, en esta actividad se hace muy evidente la diferenciación entre los conceptos de cifra y número y entre la parte decimal y entera de un número decimal, además de recordar el concepto de factor.

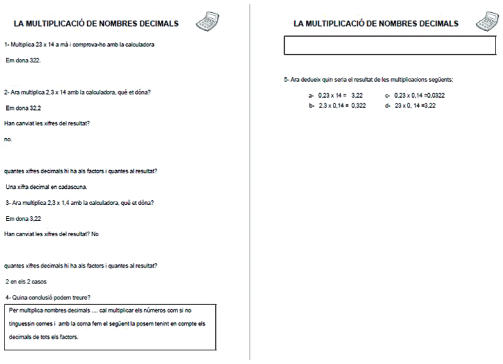
— Relaciones y cambio: Comprensión y análisis de patrones, relaciones y cambios. Análisis de las propiedades de los números y de las operaciones.

La actividad que se presenta en el aula al alumnado es la siguiente:

1. Multiplica 23×14 manualmente y comprueba el resultado con la calculadora.
2. Ahora multiplica $2{,}3 \times 14$ con la calculadora, ¿qué resultado has obtenido?
   ¿Han cambiado las cifras del resultado?
   ¿Cuántas cifras decimales hay en los factores y cuantas en el resultado?
3. Ahora multiplica 2,3 x 1,4 con la calculadora, ¿qué resultado has obtenido?
   ¿Han cambiado las cifras del resultado?
   ¿Cuántas cifras decimales hay en los factores y cuántas en el resultado?
   ¿A qué conclusión podemos llegar?
   Para multiplicar números decimales…
4. Ahora deduce cual sería el resultado de las multiplicaciones siguientes:
   a) $0{,}23 \times 14 =$
   b) $2{,}3 \times\ 0{,}14 =$
   c) $0{,}23 \times 0{,}14 =$
   d) $23 \times 0,\ 14 =$

La estructura de esta actividad sigue un formato de presentación como la anterior, está diseñada para que el alumnado a través de la interacción con la calculadora registre datos para ayudarle a indagar ciertas regularidades y, a través de una serie de preguntas intencionadas, se busca que descubran la conclusión de la propiedad y la característica de la operación aritmética estudiada; terminando con la presentación de nuevos casos para verificar la aplicación y comprensión de dicha regla o propiedad.

En la figura 4 se presenta la actividad realizada por un/a estudiante.



LA MULTIPLICACIÓ DE NOMBRES DECIMALS

1- Multiplica 23 x 14 a mà i comprova-ho amb la calculadora

Em dona 322.

2- Ara multiplica 2,3 x 14 amb la calculadora, què et dóna?

Em dona 32,2

Han canviat les xifres del resultat?

no.

quantes xifres decimals hi ha als factors i quantes al resultat?

Una xifra decimal en cadascuna.

3- Ara multiplica 2,3 x 1,4 amb la calculadora, què et dóna?

Em dona 3,22

Han canviat les xifres del resultat? No

quantes xifres decimals hi ha als factors i quantes al resultat?

2 en els 2 casos

4- Quina conclusió podem treure?

Per multiplica nombres decimals .... cal multiplicar els números com si no tinguessin comes i amb la coma fem el següent la posem tenint en compte els decimals de tots els factors.

LA MULTIPLICACIÓ DE NOMBRES DECIMALS

5- Ara dedueix quin seria el resultat de les multiplicacions següents:

a- 0,23 x 14 = 3,22
b- 2,3 x 0,14 = 0,322
c- 0,23 x 0,14 =0,0322
d- 23 x 0, 14 =3,22

Figura 4. Ejemplo de resolución de la actividad por un/a estudiante

Teniendo en cuenta las respuestas dadas por el alumnado y la experiencia de aula, en general las preguntas 1, 2 y 3 no presentan ninguna dificultad, pero hay que reconocer que algunos/as estudiantes tuvieron que rehacer sus respuestas debido a la confusión entre número y cifra o dígito, al no reconocer el valor de posición de las cifras decimales (al no identificarlas como aquellas que van detrás de la coma).

Una vez superada esta dificultad, las conclusiones fueron las esperadas: «para multiplicar números decimales hay que multiplicar los números como si no tuviesen comas y con la coma hacer lo siguiente, ponerla teniendo en cuenta los decimales de los dos factores».

En la actividad 5, se espera que el alumno conteste sin necesidad de utilizar la calculadora ya que debe aplicar el conocimiento adquirido para resolver estas operaciones de una forma rápida.

En el aula, una buena opción para acabar de consolidar el aprendizaje al que hemos llegado sería proponer al alumnado que a partir del producto de dos números de dos cifras (o tres), por ejemplo 45×63, se inventen diferentes productos donde tengan que utilizar otros números generados a partir de las cifras de estos, pero en distintas posiciones según su valor, por ejemplo: $0{,}45 \times 6{,}3$; $4{,}5 \times 0{,}65$; etc., y se lo pasen al compañero/a de al lado para que las resuelvan.

La temporalización de esta actividad difiere según donde se lleve a término, en clase en gran grupo aula o en casa. En general, en clase con la dedicación de dos sesiones es suficiente, pero durante el confinamiento tuvieron una semana para completar el trabajo.

Un mural en el patio

Esta actividad se ha experimentado en dos aulas de sexto curso de educación primaria del Colegio Escuelas Pías de Tenerife diseñada para trabajar con cualquier modelo básico de calculadora. Este grupo de estudiantes normalmente tienen entre su material de trabajo una calculadora, y son totalmente autónomos en su uso y manejo.

El objetivo de la actividad es profundizar en el concepto de proporcionalidad, mostrándoles la utilidad de las matemáticas como herramienta de resolución de problemas reales de su entorno.

Con esta actividad se trabajan los siguientes contenidos específicos:

- — Reconocer la necesidad de medir y establecer unidades de medida para las magnitudes.
- — Reconocer el metro y el metro cuadrado como las unidades de medida principales de longitud y de superficie.
- — Calcular área de polígonos.
- — Trabajar con escalas en planos, calculando distancias a partir de medidas reales.
- — Realizar operaciones numéricas con proporciones.
- — Realizar mediciones de elementos de uso cotidiano.
- — Conocer y comprender el significado de proporcionalidad de magnitudes.
- — Aplicar las aproximaciones en las medidas y estimaciones a situaciones de la vida cotidiana.
- — Clasificar en una tabla un conjunto de datos.

La realización de esta actividad en el aula se programa en dos sesiones.

La actividad que se presenta al alumnado es la siguiente:

Al profesor de matemáticas se le ha ocurrido que tenemos que realizar un mural en el patio del colegio. A continuación, se presenta una serie de cuestiones e indicaciones que te ayudarán a realizar esta tarea poco a poco.

a) Tenemos que dibujar el mural de la figura 5 en el patio del colegio.

b) Tenemos que comprar pintura azul y blanca. Con esos dos colores podemos obtener todas las tonalidades del mural. Tendremos que darle 2 capas.

c) ¿Cuánto medirán en la realidad? Teniendo en cuenta que el croquis que nos ha dado hay que pasarlo a escala 1:100.
Vamos a organizarnos para que no se nos olvide nada.

d) El dibujo que nos da el/la profesor/a tiene las medidas, pero no está a escala. Tenemos que dibujarlo en un papel a escala 1:100 para poderlo dibujar correctamente en el patio.

e) Hacemos los cálculos para ver cuánto espacio nos va a ocupar en la realidad. Para ello, tenemos que calcular las medidas de la totalidad del mural. Es decir, cuánto es en la realidad 24 cm del plano a escala 1:100. Y con la altura igual.

f) Ahora calculamos la cantidad de pintura que tenemos que comprar teniendo en cuenta que hay que darle dos capas. Pero el rendimiento de la pintura es diferente en cada capa. En la primera capa el rendimiento de la pintura es el indicado en cada bote. En la segunda capa, el rendimiento aumenta un 25%. Acuérdate de redondear siempre por exceso para que no nos falte pintura.
1. Rendimiento pintura azul 4 m^2 por bote.
2. Rendimiento pintura blanca 8,5 m^2 por bote.
3. ¿Cuántos litros de pintura azul tengo que comprar? ¿Cuántos botes? ¿Cuánto dinero necesito?

g) La pintura blanca solo la vamos a usar para las pocas nubes que hay en el mural y para obtener las distintas tonalidades de azul. Por ello, con solo comprar 1/5 de la cantidad de azul será suficiente. Ten en cuenta que también se vende en botes de 4 litros. ¿Cuántos litros tendré que comprar? ¿Cuántos botes? ¿Cuánto dinero necesito?

Figura 5. Imagen del mural que se quiere realizar

h) Ahora vamos a calcular el área de las velas del velero. Ya tendrás las medidas reales calculadas, que son las que debes usar. Te he puesto en la figura 6 todas las medidas para que puedas calcularlo usando el área del triángulo.
1. ¿Cuál es el área de la vela de la izquierda de la figura 6 (vela 1)?
2. ¿Cuál es el área de la vela central de la figura 6 (vela 2)?
3. ¿Cuál es el área de la vela de la derecha de la figura 6 (vela 3)?

i) Recuerda que debes dibujar cada triángulo que forma el cuadrilátero de cada vela.

j) Para finalizar, termina el trabajo poniendo en la tabla 1 los cálculos anteriores. He puesto dos veces cada vela ya que las hemos dividido en dos triángulos, para hacer más fáciles los cálculos.

La actividad en el aula se presenta como se muestra en la figura 7.

En la realización de las actividades se encontró como dificultad el lenguaje utilizado, pues se tuvo que adaptar por contener vocabulario de uso no común para el alumnado. Fue de gran ayuda realizar en el patio y

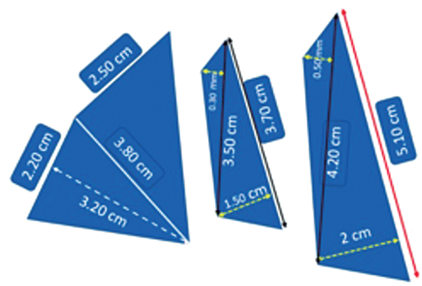


Figura 6. Imágenes de las velas

	Base		Altura		Área (m^2)	
	Plano	Realidad	Plano	Realidad	Plano	Realidad
Vela 1						
Vela 1						
Vela 2						
Vela 2						
Vela 3						
Vela 3						

Tabla 1

Figura 7. Modelo de actividad que se presenta a los/as estudiantes

dibujar con tiza a tamaño real el mural. Este hecho les permitió tomar conciencia de la cantidad de pintura a comprar, ya que en las primeras hipótesis de trabajo realizadas se quedaban muy por debajo de lo real.

El alumnado en el aula trabaja por parejas la actividad, siendo el nivel competencial del alumnado muy similar. Resulta curioso observar cómo los diferentes grupos abordan la resolución del problema de una manera diferente. Se puede ver algún ejemplo de resolución en la figura 8.

Se aprecian algunas diferencias basadas en la toma de decisiones a la hora de afrontar el problema. Algunos grupos optaron por hacer los cálculos por separado, otros optaron por buscar maneras de agrupar los datos para hacer menos cálculos. Con el tema de redondear y entender que no nos venden medio bote de pintura fue necesario debatir por qué era necesario redondear al alza.

Surgen espacios de debate en cuanto a la precisión que exigimos en las clases, cuando en la vida real, en ocasiones, es necesario realizar aproximaciones.

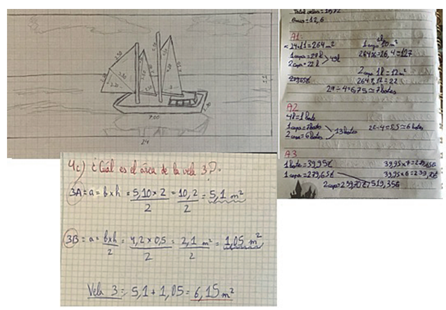


Figura 8. Ejemplo de solución realizada por estudiantes

Un café muy caro

La motivación para el diseño de esta actividad es investigar cómo la comodidad de obtener un café inmediato está por encima de modelos de ahorro. En las campañas de publicidad no se hace referencia al costo medioambiental que supone.

La actividad se desarrolló en dos aulas de sexto curso de educación primaria del Colegio Escuelas Pías de Tenerife para trabajar con la calculadora.

El objetivo de la actividad es descubrir cómo consiguen «convencer» al consumidor de pagar un precio desorbitado por un kilo de café, para despertar su pensamiento crítico.

Los grupos de aula donde se lleva a cabo este trabajo están acostumbrados a trabajar en equipo y, aunque les costó tiempo terminarlo, la ayuda que precisaron fue muy poca. La implementación en el aula se realizó durante las sesiones de una semana de trabajo desde su presentación hasta la entrega del producto final. Se realiza en parejas; la primera sesión se dedicó a presentar el trabajo y a un pequeño recordatorio de áreas y volúmenes y estadística.

La última sesión la dedicaron a terminar el trabajo y a su entrega. Resultó enriquecedor conocer el precio que puede alcanzar un kilo de café presentado en cápsulas de algunas marcas.

Los contenidos específicos que se trabajan con esta actividad son:

- Reconocer la necesidad de medir y establecer unidades de medida para las magnitudes.
- Calcular áreas y volúmenes de objetos cotidianos.
- Realizar operaciones numéricas con proporciones.
- Conocer y comprender el significado de proporcionalidad de magnitudes.
- Aplicar las aproximaciones en las medidas y estimaciones a situaciones de la vida cotidiana.
- Clasificar en una tabla un conjunto de datos.
- Hallar la media.
- Dibujar diagramas de barras.

La actividad al alumnado se presenta como:

1. ¿Cuánto nos cuesta el café que tomamos en casa desde que nos hemos comprado la cafetera de cápsulas? Los precios de las cafeteras de tipo A son: 55,00€, 69,00€, 102,00€, 78,41€, 85,00€; y los precios para una cafetera de tipo B son: 41,00€, 39,99€, 33,90€, 31,85€, 44,00€ y 37,99€.
   A. Calcula la media del precio de cada una de las marcas de cafetera.
   B. Dados los precios de las cápsulas TIPO A: 120 cápsulas a 21,94€, 50 cápsulas a 28,89€, 40 cápsulas a 48,95€, 60 cápsulas a 17,70€ y 240 cápsulas a 68,99€; y los precios de las cápsulas TIPO B son: 48 cápsulas a 11,99€, 90 cápsulas a 23,58€, 70 cápsulas a 17,70€, 96 cápsulas a 16,99€, 95 cápsulas a 23,70€ y 100 cápsulas a 13,99€. Calcula el precio medio de las cápsulas.
   C. De todas estas opciones, ¿cuál es la opción más barata de cada marca? ¿Y la más cara de cada marca? Explica en qué argumentos basas tus respuestas.
   D. Pasamos los datos a la tabla2.
   E. Realiza un diagrama de barras de cada marca utilizando la misma escala en el eje vertical (también llamado «eje y» o «eje de ordenadas»). Traza también una línea horizontal, en otro color, que indique la media del precio medio de las cápsulas de esa marca.
2. Abordamos ahora las áreas y los volúmenes. Sabemos que las cápsulas tienen diferentes formatos de presentación al público para su compra y consumo. Vamos a estudiar algunos de los formatos que nos podemos encontrar en el mercado, con el fin de ver cuál de todos es más respetuoso con el medio ambiente.
   A. Dibuja el desarrollo plano del envase de la figura 9. Pon todas sus medidas y calcula su área total y su volumen (contiene 10 cápsulas).
   B. Dibuja el desarrollo plano del envase de la figura 10. Pon todas sus medidas y calcula su área total y su volumen (contiene 22 cápsulas).

Precio cafetera		
Precio cápsulas medio		
Gasto cápsulas familias 4 cafés diarios durante 1 año		
Gasto en kilos de café normal durante 1 año		

Tabla 2

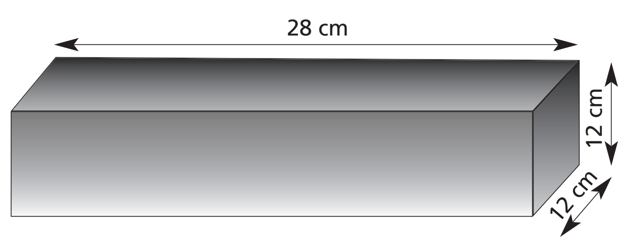


Figura 9. Envase 1

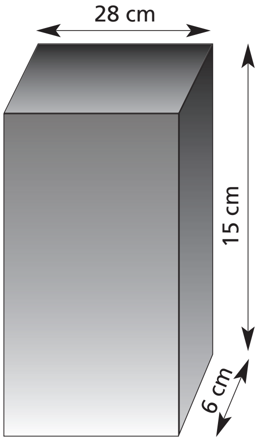


Figura 10. Envase 2

C. Con los datos obtenidos en las dos preguntas anteriores, tienes suficiente información para responder a estas preguntas:
   - *a*) ¿Cuál de los dos formatos es más respetuoso con el medio ambiente? Será más respetuoso el envase que permita contener un mayor número de cápsulas en comparación con la cantidad de cartón usado para su fabricación. Justifica tu respuesta con las operaciones necesarias.
   - *b*) Coste medioambiental.
   - *c*) Si cada cápsula contiene 5 g de café, ¿cuántas puedo rellenar con un kilo de café molido si no se derrama nada?
   - *d*) Si pudiera venderlas al precio medio que calculamos en el ejercicio 1B, ¿cuánto dinero obtendrías?
   - *e*) El precio medio de un kilo de café molido en el 2019 es de 9€. ¿Cuánto cuesta un kilo de café de estas cápsulas?
   - *f*) El número de personas ocupadas el primer trimestre de 2020 se sitúa en 19 681 300. Si suponemos que 1/8 de estas personas consumiera 2 cápsulas de café al día, ¿Cuántas cápsulas suponen en un mes? ¿Qué volumen ocuparían si las pudiéramos depositar en recipientes de 1 m^3? Ahora es el momento de usar los cálculos del volumen. (Volumen de una cápsula 30 cm^3).

Reflexión final sobre el coste medioambiental del uso de este tipo de formato para tomar café.

Esta actividad se presenta al alumnado como se recoge en la figura 11.

Los grupos de alumnado donde se lleva a cabo este trabajo están muy familiarizados con esta metodología de trabajo, cooperan entre ellos y tienen siempre a mano una calculadora para que cada uno/a decida de forma autónoma el momento de cuándo y cómo usarla. Esta actividad es muy completa y larga para dar una solución, pero aun así hay que señalar la muy poca ayuda solicitaron. La temporalización para resolver la actividad se corresponde a todas las sesiones de la materia de Matemáticas de una semana del curso escolar.

La actividad se ha realizado en parejas, la primera sesión se dedicó a presentar el trabajo y a un pequeño recordatorio de áreas y volúmenes y estadística, luego ya empezaron de forma autónoma su resolución. La última sesión la dedicaron a terminar el trabajo y a su entrega, ya que formó parte de su evaluación. Resultó muy enriquecedor conocer el precio que puede alcanzar un kilo de café presentado en cápsulas de algunas marcas.

Esta tarea nace con la idea de ser conscientes de lo que pagamos por un producto muy consumido en nuestra sociedad en la actualidad y que a priori, no parece tener un precio muy alto. Pero esta tarea resultó mucho más rica de lo pretendido inicialmente, pues generó un debate sobre el coste medioambiental del producto que habría que sumarlo al coste económico del producto, posponiendo la presentación de las conclusiones sobre la tarea. Además, incentivó la búsqueda de información relativa al reciclaje de cápsulas de aluminio, localizando una campaña publicitaria que una de las marcas había intentado implantar para paliar las críticas recibidas en los medios de comunicación relativas a su reciclaje, potenciando y fomentando el pensamiento crítico entre el alumnado, y resaltando el papel que nunca hay que perder de vista en la enseñanza de potenciar, en nuestro caso una educación matemática crítica.

Esta actividad proporciona la oportunidad de que hace surgir en el aula la reflexión y resalta el papel de las matemáticas como instrumento de análisis, perspectiva que muy a menudo como docentes no trabajamos, abordando la enseñanza de las matemáticas descontextualizadas de la realidad que vive el alumnado. Por ello, es necesario un enfoque donde los problemas planteados nos inviten a aprender matemáticas para poder resolverlos, y no al revés, y la calculadora en este tipo de problemas es una buena herramienta que favorece mucho nuestro trabajo.

Figura 11. Ficha de presentación de la actividad «Un café muy caro»

Conclusiones

Se han presentado cuatro actividades para mejorar las distintas dimensiones de la competencia matemática donde el manejo de la calculadora es importante para cumplir este objetivo. Prescindir de la calculadora en la escuela es abandonar la idea de enseñar matemáticas de manera consciente y continuar con la permanencia histórica de una enseñanza matemática meramente reproductiva y sin comprensión. Pues en general, es esencial generar y promover situaciones de enseñanza y aprendizaje en las que se estimule la identificación del valor de conceptos y procedimientos y la resolución de problemas que precisen de la toma de decisiones para favorecer que el alumnado llegue a comprender y evaluar argumentos matemáticos, proponer y resolver problemas y expresar de manera personal contenidos matemáticos (Escamilla, 2008) y, como se ha recogido en las actividades propuestas, la calculadora puede ser un recurso que ayude en todas estas facetas.

Resulta paradójico que un objeto que forma parte de nuestro día a día docente para hacer todo tipo de cálculos básicos (calcular medias de notas, planificar salidas, verificación de ejercicios…), la tengamos denostada como herramienta pedagógica entre nuestro alumnado.

En 5.º y 6.º curso de educación primaria el uso de la calculadora nos permite abordar cálculos sencillos, rápidos y sin errores con cantidades grandes, pequeñas, con números racionales, etc., a la vez que nos brinda la posibilidad de reflexionar sobre su cálculo. Su poder como instrumento de investigación es un terreno, aún hoy, totalmente desaprovechado.

Nadie duda de la necesidad de conocer y tener interiorizadas diferentes estrategias para realizar las operaciones básicas. No hablamos de conocer un determinado algoritmo para dividir, hablamos de *saber dividir*. Este leve matiz en la redacción supone un cambio enorme al que nos enfrentamos. Dedicamos incontables horas durante la etapa educativa de educación primaria a repetir cansinamente una u otra forma de realizar cualquier operación matemática, olvidándonos de su verdadero significado.

En todos los currículos de nuestras comunidades autónomas aparece, de manera reiterada, la frase: «en entornos cercanos al alumno». Entornos cercanos son aquellos que suscitan o despiertan su interés. Ya no nos valen los problemas de *compramos 120 melones a 70 céntimos el kilo*; esta redacción no es un entorno cercano al alumno por usar el verbo *comprar*. Tenemos que hacer aquellas preguntas que susciten la curiosidad del alumnado, que le resulte atractivo encontrar su solución, que les haga reflexionar sobre aspectos realistas y sociales del uso de las matemáticas. Porque las matemáticas deberían centrarse en el desarrollo de las competencias básicas con la vista puesta en ayudar al alumnado a ser ciudadanos libres y autónomos capaces de tomar decisiones bien fundamentadas sobre sus propias vidas (Torra, 2008).

Dedicamos incontables horas durante la etapa educativa de educación primaria a repetir cansinamente una u otra forma de realizar cualquier operación matemática, olvidándonos de su verdadero significado.

Sin duda, empezar a usar la calculadora en nuestras aulas supone un cambio de mentalidad, un cambio en nuestra didáctica, un cambio en las preguntas que hacemos. Es poder dedicar el preciado tiempo del aula a desarrollar capacidades generales de razonamiento matemático y a la generalización de conceptos basados en la investigación de pautas y regularidades numéricas.

Desarrollar todo esto requiere por parte del profesorado dedicar tiempo a trabajar la estimación (pues es algo que normalmente no se hace), convertir el cálculo mental en el eje de nuestra sesión de clase, potenciar el planteamiento de hipótesis de trabajo, fomentar la creatividad en la búsqueda de soluciones, permitir y valorar diversas soluciones a los problemas planteados, dominar las operaciones básicas con números de uso común en nuestra vida. La utilización de la calculadora en el aula va a permitir comprobar con rapidez las diversas hipótesis, corroborar la exactitud de las estimaciones y, sobre todo, nos ahorra el cálculo tedioso de operaciones, enemigo de cualquier motivación, y nos permite centrarnos en aspectos más profundos del aprendizaje matemático y más interesantes y productivos. Además, no hay que olvidar que la calculadora fomenta el papel que puede jugar el error como forma de aprendizaje, ya que esta herramienta ayuda a comprobar rápidamente si hemos errado y dónde, para poder hablar de ello y hacer conjeturas.

Referencias bibliográficas

ESCAMILLA, A. (2008), *Las competencias básicas. Claves y propuestas para su desarrollo en los centros. Colección Crítica y fundamentos,* Graó, Barcelona.

GUZMÁN, M. de (2001), «Tendencias actuales de la educación matemática». *Sigma*, n.º 19, 5-25.

GOÑI, J. M.ª (2008), *32−2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática,* Graó, Barcelona.

HARGRAVES, A. (2001), *Aprender a cambiar,* Octaedro, Barcelona.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000), *Principles and Standards for School Mathematics,* NCTM, Reston.

NISS, M. (2002), *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project,* Roskilde University, Roskilde.

PLANAS, N., y Á. ALSINA, (2009), *Educación matemática y buenas prácticas,* Graó, Barcelona.

SERRAMONA, J. (2014), «Competencias básicas y currículum. El caso de Cataluña», *Teoría de la Educación. Revista Interuniversitaria,* n.º 26 (2), 205-228.

TORRA, M. (2008), «Las competencias básicas en Educación Infantil y Primaria», en M. M. Hervás (coord.), *Competencia matemática e interpretación de la realidad*, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Subdirección General de Información y Publicaciones, Madrid, 75-85.

Tuti Comalat Navarra
Escola Guinardó SCCL, Barcelona
<tuticomalat@gmail.com>

Ángel Antonio García Marrero
Colegio Escuelas Pías, Tenerife
<aagm38@me.com>

M.ª Cristina Naya Riveiro
Universidade da Coruña
<cristina.naya@udc.es>