

Geometría fractal: la geometría de la naturaleza

Juan Matías Sepulcre Martínez

SUMA+ núm. 95
pp. 17-25

Artículo recibido en *Suma* en septiembre de 2018 y aceptado en agosto de 2019

A lo largo de 2018, declarado Año Internacional de la Biología Matemática (proclamado por la European Mathematical Society y la European Society for Mathematical and Theoretical Biology), se realizaron distintas actividades para poner de manifiesto las aplicaciones, cada vez mayores, de las matemáticas a la biología. El presente artículo, suscitado precisamente por esta celebración, está dedicado a las aplicaciones de la geometría fractal a la biología.

Palabras clave: Geometría fractal, Matemáticas y biología, Matemáticas y naturaleza, Curvas fractales, Modelos matemáticos fractales, Función de Weierstrass.

La relación entre las matemáticas y la biología tomó un impulso decisivo a principios del siglo XX, acentuándose en las últimas décadas. En particular, la búsqueda de modelos matemáticos en la dinámica de poblaciones, estudio de enfermedades (por ejemplo, crecimiento de tumores) y protocolos de la quimioterapia hacen de la biomatemática un campo nuevo y excitante. En especial, el estudio de la dinámica de poblaciones establece modelos muy simples para estimar el comportamiento de una población en el

Fractal Geometry: the Geometry of Nature // On the occasion of the International Year of Mathematical Biology (established by the European Mathematical Society and the European Society for Mathematical and Theoretical Biology), several activities were carried out in 2018 to highlight the growing applications of mathematics to biology. This article, inspired by this celebration, is focused on fractal geometry and some of its applications to biology and nature.

Keywords: Fractal geometry, Mathematics and biology, Mathematics and nature, Fractal curves, Weierstrass function.

tiempo, dando lugar así a uno de los mejores ejemplos de relación entre el orden y el caos, el cual desemboca en el concepto de fractal que trataremos más adelante.

El actual crecimiento de las relaciones entre matemáticas y biología no ha de hacer olvidar que algunos encuentros muy relevantes son ya muy antiguos. Citemos, por ejemplo, el modelo de Fibonacci para el crecimiento de conejos, el de Malthus para el de la población humana, el de Verhulst para el de algunos

tipos de bacterias o el de Gompertz para el de los tumores. En el primer cuarto del siglo XX, la propuesta de las ecuaciones de Lotka-Volterra para describir dinámicas de sistemas biológicos en las que dos especies interactúan, una como presa y otra como depredador, fue esencial en este contexto, como se puede ver en Hernández (2016). Otro ejemplo clásico es el modelo creado en 1952 por Hodgkin y Huxley, quienes estudiaron la transmisión eléctrica en células nerviosas mediante ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que aproximan las características eléctricas de células excitables como las neuronas o los miocitos cardíacos. Especial interés tiene un trabajo de Robert May (1976) en el cual se demuestra que un fenómeno biológico complejo no requiere necesariamente de un modelo matemático complicado. Para profundizar algo más en estos temas se puede consultar Murray (2002) y De Guzmán (1993).

El actual crecimiento de las relaciones entre matemáticas y biología no ha de hacer olvidar que algunos encuentros muy relevantes son ya muy antiguos.

En este mismo contexto, la filotaxis, que consiste en el estudio de la distribución de las hojas a lo largo de un tallo, de las semillas en un fruto o de las flores en una inflorescencia, da lugar a interesantes relaciones matemáticas como las proporciones, las construcciones áureas o la sucesión de Fibonacci. De hecho, un modelo propuesto por Helmut Vogel en 1979 sirvió para calcular el ángulo que proporciona la máxima exposición a la luz vertical a los órganos laterales de los vegetales que, según dice la experiencia, crecen manteniendo un ángulo constante (Prusinkiewicz y Lindenmayer, 1996). Otros fenómenos naturales en los que la proporción áurea y la sucesión de Fibonacci juegan un papel importante se pueden también observar en el número de pétalos de determinadas flores, o en la espiral áurea que algunos insectos trazan cuando se acercan a un punto de luz o cuando las aves de presa se lanzan a cazar (Albujer, 2014).

En definitiva, hoy contamos con una gran variedad de modelos matemáticos en el terreno de la biología, y más concretamente en campos como la neurofisiología, ecología, biología del desarrollo y genética de poblaciones, por mencionar solo algunos ejemplos. En este contexto, el interés principal de este documento se encuadra en la geometría fractal, una herramienta matemática de reciente creación a través de la cual examinaremos una importante conexión entre las matemáticas y la naturaleza. De hecho, muchos modelos y procesos biológicos vienen caracterizados por la coexistencia de escalas diferentes, con un patrón general que se repite una y otra vez, y es precisamente en este punto en el que las técnicas de la geometría fractal nos pueden ayudar enormemente a modelar correctamente los patrones y procesos observados en la naturaleza.

La curva patológica de Weierstrass como antecedente de la teoría de los objetos fractales

En esta sección mostraremos algunos antecedentes de la geometría fractal.

En 1829 el matemático alemán Lejeune Dirichlet (1805-1859) consideró una función real de variable real que lleva su nombre y que asigna el valor 1 a los números racionales y el valor 0 a los irracionales. Es decir,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Como bien es sabido, esta función demuestra que no todas las funciones son continuas en algún punto, algo que echaba por tierra la concepción que hasta entonces se tenía de función, ya fuera de forma explícita o implícita, como producto de expresiones analíticas o expresiones que se podían representar como curvas.

Por otra parte, la interpretación geométrica podría hacer pensar que una función continua en un intervalo de la recta real debe ser derivable excepto, a lo sumo, en una cantidad finita de puntos de tal intervalo. En efecto, resulta bastante difícil imaginarse la gráfica

de una función que no cumpla dicha propiedad y que presente un punto anguloso o pico en cada uno de los puntos de la gráfica. Pues bien, el primer ejemplo de función sin estas características fue creado en 1875 por Karl Weierstrass (1815-1897), y consiste en una suma infinita de funciones coseno que da lugar a una función continua pero sin tangente en ninguno de sus puntos (figura 1). Concretamente, Weierstrass construyó su función de este modo:

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad x \in \mathbb{R},$$

con $0 < a < 1$ y $b > 1$ un entero impar tal que $ab > 1 + 3\pi/2$.

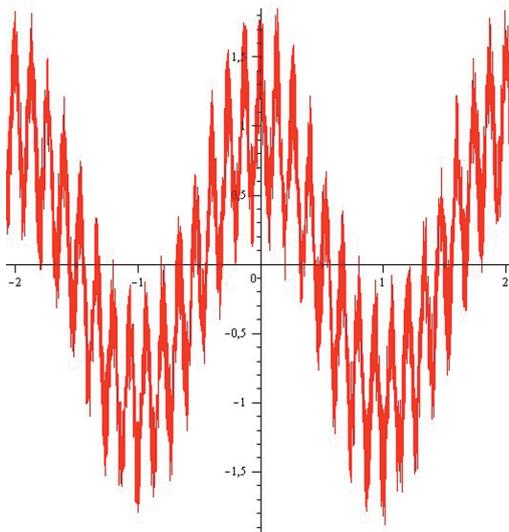


Figura 1. Comportamiento tipo fractal de la función de Weierstrass

Posteriormente fueron apareciendo variantes de la función de Weierstrass y otros ejemplos catalogados como de muy *irregulares*, con propiedades geométricas y analíticas sorprendentes, lo que provocó cierta incredulidad y reprobación. En aquella época, a diferencia de lo que ocurre hoy en día, los ordenadores no podían ayudar a visualizar este tipo de gráficas, y estos ejemplos patológicos fueron considerados en principio como curiosidades o entretenimientos de poca importancia. En 1893 el matemático francés Charles Hermite (1822-1901) escribió una carta al

matemático holandés Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894) en la cual decía que: «Me alejo con pánico y terror de las malditas funciones que no tienen derivadas». Otro gran matemático, Henri Poincaré (1854-1912), calificó como *monstruos* a estas funciones, y de la fabricada por Weierstrass dijo que era un atropello contra el sentido común (Sepulcre, 2017).

Sin embargo, dichos monstruos geométricos o curvas patológicas fueron los primeros modelos de lo que hoy llamamos teoría de los objetos fractales. Sus propiedades supusieron una gran alarma pues se llegaba a resultados que, efectivamente, violentaban el sentido común, lo cual obligó a los matemáticos a prestar especial atención a los fundamentos del análisis —el lector puede indagar en el artículo de Sepulcre (2017) acerca del proceso de aritmetización llevado a cabo a lo largo del siglo XIX—. Actualmente, la existencia de tales funciones es fundamental, no solo para la teoría de fractales, sino también para otras jóvenes áreas de investigación tales como la teoría del caos, ondulaciones y movimientos brownianos.

Algunas curvas fractales representativas

La geometría fractal, como tal, nace en 1975, pero muchas de sus aplicaciones y conceptos eran conocidos desde mucho antes en contextos diferentes. Por ejemplo, el grafo de la función de Weierstrass tiene un comportamiento que hoy se considera como fractal. Pero ¿qué entendemos por fractal? En realidad, este término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot (1924-2010) en 1975 para definir un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular se repite a diferentes escalas (Mandelbrot, 1997). De hecho, el término fractal proviene del vocablo latino *fractus* que se traduce como quebrado o fragmentado.

En 1904 el matemático sueco Helge von Koch (1870-1924) descubrió una curva fractal, que hoy llamamos *el copo de nieve de Koch*, con propiedades similares a la de Weierstrass. Partimos de un triángulo equilátero de lado unidad y dividimos cada lado en

tres partes iguales de longitud $\frac{1}{3}$. A continuación sustituimos el segmento central por dos segmentos de tamaño idéntico de tal forma que se construya un diente (ver la segunda imagen de la figura 2). Repetimos la operación con cada uno de los cuatro segmentos incluidos en cada uno de los lados, y la iteración indefinida nos proporciona el copo de nieve de Koch.

La curva ideada por Koch era continua y cerrada, pero no derivable en ninguno de sus puntos (como también ocurría con la de Weierstrass). Además, encierra un área finita pero su perímetro es infinito. Hoy en día sabemos que esta curva sirve como modelo de un copo de nieve y también ayuda a describir la irregularidad de las costas.

Anteriormente, en 1890, otro resultado inesperado fue proporcionado por el matemático y filósofo italiano Giuseppe Peano (1858-1932). Construyó una curva fractal continua que llenaba un cuadrado sin pasar dos veces por el mismo punto. Con ello demostró que una línea, de dimensión euclídea 1, puede constituirse en un plano, de dimensión euclídea 2.

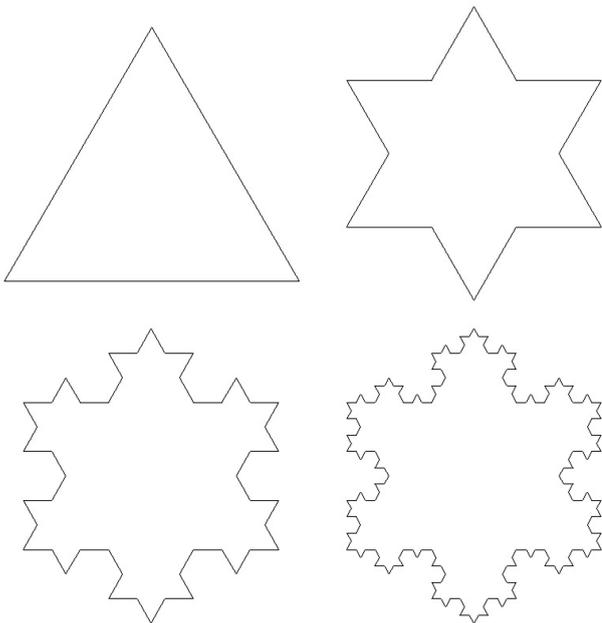


Figura 2. Primeros pasos en la construcción de la curva de Koch

Para hacernos una idea de una de tales curvas, hagamos la siguiente construcción: partimos de un cuadrado de lado 1, consideramos su diagonal, la cual, de forma similar a la curva de Koch, se divide entre tres y el tercio central se reemplaza por siete segmentos formando una figura poligonal autointersectante como la que vemos en la segunda imagen de la figura 3, en la que aparecen cuadrados de lado $\frac{1}{3}$. Este proceso se repite en cada iteración y su límite es la curva de Peano.

Actualmente, muchos llaman curva de Peano a todo tipo de curva continua, obtenida como límite de una sucesión uniformemente convergente de curvas continuas, que recubre todo el plano o, más específicamente, que es un conjunto denso del plano.

Un año después, en 1891, David Hilbert (1862-1943) propuso otra curva fractal continua que también recubre el plano. Para construirla se considera una curva generadora en forma de U (cuya disposición inicial la podemos elegir nosotros). Si primeramente dividimos el cuadrado en 4 nuevos cuadrados, se trata de unir sus centros con la U inicial. En la se-

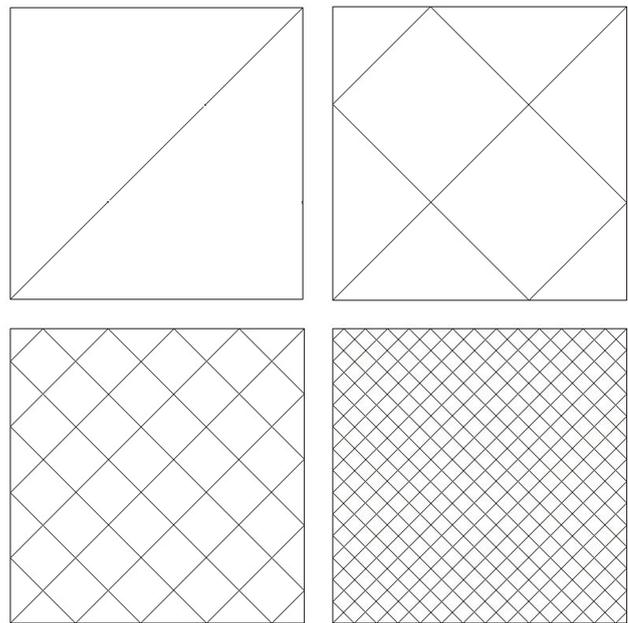


Figura 3. Construcción de una curva no inyectiva que recubre el cuadrado unidad

gunda iteración, cada uno de los 4 nuevos cuadrados se subdivide en otros 4 cuyos centros se unen a su vez por nuevas curvas en forma de U, las cuales se unen entre sí mediante segmentos según el orden indicado al recorrer la curva resultante del paso anterior. Iteración tras iteración, las curvas siempre comienzan y terminan cada vez más cerca de los vértices inferiores izquierdo y derecho (algunas de estas curvas aparecen en la figura 4). Pues bien, la curva de Hilbert es el límite de este proceso de iteración. Además de una construcción más sencilla que la proporcionada por la figura 3, esta curva tiene la ventaja de carecer de autointersecciones.

A diferencia de la curva de Weierstrass, las de von Koch, Peano y Hilbert presentan una definición más geométrica, pues pueden construirse partiendo de una figura inicial a la que se aplican una serie de construcciones sencillas. De esta forma, la serie de figuras obtenidas se aproxima a una figura límite que es lo que hoy llamamos conjunto fractal. Pero igual que la función de Weierstrass, muchas veces tales conjuntos eran vistos como objetos artificiales, catalogados como *monstruos*, por emplear el demolidor calificativo de Poincaré.

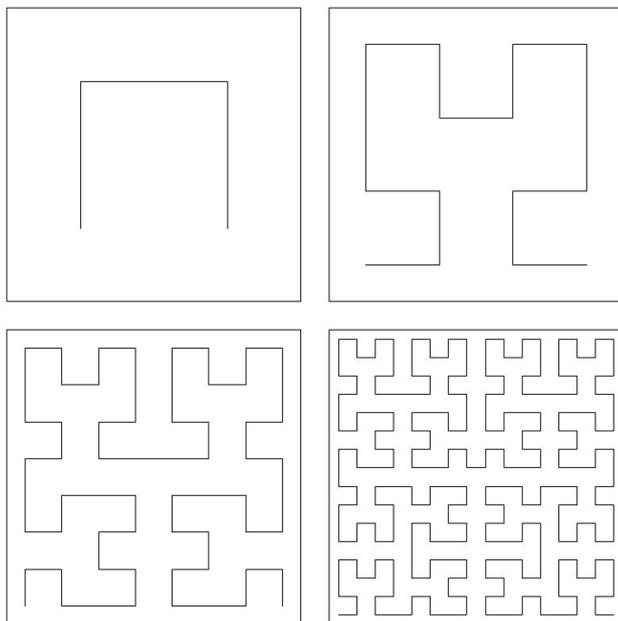


Figura 4. Construcción de la curva de Hilbert

Hoy en día también sabemos que la estructura de una molécula de ADN recuerda al patrón regular y matemático dado por una curva de Peano, que puede servir además para describir ciertos retículos de plantas, redes fluviales e incluso cortes cerebrales. Su construcción se sustentaba en un resultado obtenido en 1878 por George Cantor (1845-1918), quien demostró la existencia de funciones biyectivas del intervalo cerrado unidad sobre el cuadrado unidad, lo que implica que en el intervalo $[0,1]$ hay tantos puntos como en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, contradiciendo así el principio de Euclides según el cual «el todo es mayor que cada una de sus partes». Por cierto, las moléculas de ADN son lo bastante largas y flexibles como para ser objeto de estudio desde el punto de vista de la topología. Entre las configuraciones posibles de este ácido nucleico aparecen con frecuencia los nudos y enlaces topológicos (Bates & Maxwell, 2005).

Otra peculiar curva fue ideada en 1966 por el físico John Heighway, y también rellena un área plana. Para construirlo se han de sustituir segmentos por los ángulos rectos con los que cada uno de ellos formaría un triángulo. Algo así como doblar por la mitad una y otra vez una larga tira de papel y luego abrir los doblamientos en ángulo recto. A esta curva se le suele denominar *el dragón de Heighway* debido a su semejanza con un dragón, denominación que heredan todas las curvas de apariencia similar que fueron apareciendo después, y en especial aquellas que llenan una región teniendo una curva fractal como borde.

Mucho más conocido en el contexto matemático es el conjunto que ideó Georg Cantor en 1883, llamado precisamente *conjunto de Cantor*, que a pesar de tener una interpretación geométrica menos vistosa que las anteriores, se considera de vital importancia entre los monstruos matemáticos o primeros fractales que aparecieron. Se trata de un subconjunto de puntos del intervalo $[0,1]$ que se construye de este modo: partimos del intervalo unidad, y en la primera iteración le quitamos el intervalo abierto central de longitud $\frac{1}{3}$, quedando así los intervalos cerrados $[0, \frac{1}{3}]$ y $[\frac{2}{3}, 1]$. A continuación, a cada uno de tales nuevos intervalos se le quita a su vez el intervalo abierto central, que ahora tendrá longitud $\frac{1}{9}$, quedando así cua-

tro intervalos de longitud $\frac{1}{3}$. Repitiendo el proceso, el paso n -ésimo nos lleva a 2^n intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^n}$. Pues bien, una de las aplicaciones de este tipo de conjuntos en otros campos (Pickover, 2002) está en que esta estructura fractal de Cantor aparece en los anillos de Saturno.

Otro de los fractales más estudiados es el de *conjuntos de Mandelbrot*, cuya definición se puede dar en términos de números complejos y sucesiones. Este conjunto compacto y conexo es algo así como una cardioide (así llamada por su semejanza con un corazón) junto con infinitos discos tangentes, proporcionando una de las imágenes visuales más enigmáticas y bonitas en el plano complejo. Además, este conjunto suele proponerse como paradigma de los sistemas caóticos discretos.

Otros modelos matemáticos fractales en la naturaleza

Una de las principales propiedades de los objetos fractales es la *autosemejanza*, propiedad que hace referencia a una cierta invariabilidad con relación a la escala. Precisamos esta idea a continuación.

Una transformación de semejanza (definida sobre un espacio métrico E con una distancia d) es una aplicación $\phi : E \rightarrow E$ tal que existe $r > 0$ verificando que $d(\phi(x), \phi(y)) = r \cdot d(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in E$, esto es, que multiplica todas las distancias entre puntos por un mismo número real positivo r .

Un subconjunto compacto $F \neq \emptyset$ (de \mathbb{R}^n) es auto-semejante si existen N transformaciones de semejanza ϕ_j con $j = 1, 2, \dots, N$ ($N \geq 2$) en \mathbb{R}^n con factores de escala $r_j \in (0, 1)$ tales que $F = \bigcup_{j=1}^N \phi_j(F)$.

Dicho más intuitivamente, un conjunto auto-semejante es aquel que se puede descomponer o expresar como unión de copias a escala del mismo conjunto. La autosemejanza aparece en la propia naturaleza, por ejemplo en la estructura y distribución de las protuberancias nubosas que se repiten a diferentes escalas, en la formación de masas coralinas, en la estructura

de algunas clases de plantas o árboles, o en otros fenómenos como las olas del mar.

Consideremos ahora otro fractal representativo, el llamado *triángulo de Sierpinski* descrito por el matemático polaco Waclaw Franciszek Sierpinski (1882-1969) en la segunda década del siglo XX. Se puede ver en la figura 5 la construcción de tal triángulo a partir de triángulos equiláteros (aunque el objeto fractal se puede construir a partir de cualquier triángulo). Si partimos de un triángulo equilátero de lado unidad, es claro que tomando los puntos medios de cada lado podemos construir un triángulo equilátero invertido de lado $\frac{1}{2}$. A continuación repetimos el proceso con cada uno de los tres triángulos de lado $\frac{1}{2}$ que nos quedan (en color negro). Si repetimos indefinidamente este proceso obtenemos el triángulo de Sierpinski. Como se puede deducir fácilmente, el triángulo de Sierpinski está formado por tres copias auto-semejantes de sí mismo (en el sentido de la definición dada anteriormente).

El conocido *tapete* o *alfombra de Sierpinski* es una variante de lo que se acaba de ver, pero construido a partir de un cuadrado. No obstante, también se pueden construir extensiones del triángulo al caso de tres

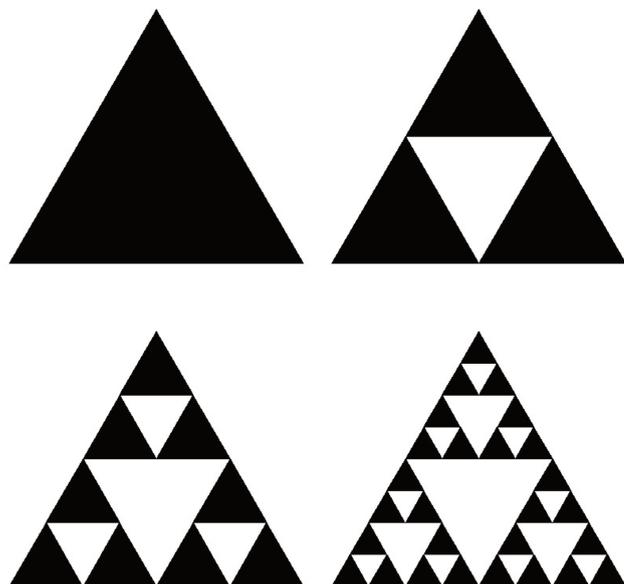


Figura 5. Construcción del triángulo de Sierpinski



Figura 6. Fotos de la hoguera Séneca-Autobusos (2018)

dimensiones por ejemplo a partir de tetraedros (pirámides triangulares) o incluso con pirámides de base rectangular, como las que aparecieron en 2018 en la hoguera de Séneca-Autobusos, ganadora ese año en la categoría especial de las Hogueras de San Juan de Alicante (ver la figura 6).

A medida que se creaban las herramientas matemáticas necesarias para explicar los objetos fractales, mejor se vislumbraba sus semejanzas con procesos y formas de la naturaleza. Ya en la década de 1970, Benoît Mandelbrot describió de forma intuitiva numerosas aplicaciones de estos objetos al estudio de las ciencias aplicadas. Posteriormente, especialistas de distintas áreas de investigación han analizado ciertos fenómenos naturales mediante modelos matemáticos fractales, buscando modelos de este tipo que aproximen satisfactoriamente objetos reales (por ejemplo, una costa o la red capilar del sistema venoso) en toda una franja de escalas limitada por ciertos valores máximo y mínimo.

Es cierto que un modelo matemático está configurado para aproximar convenientemente las propiedades del objeto real, por lo que no es insólito que a veces se niegue la existencia de fractales en el mundo real. Sin embargo, hablar por ejemplo de la dimensión fractal de una costa no es más ni menos desatinado que hablar del radio de la Tierra, porque la exploración científica de la realidad se hace mediante

modelos teóricos aproximados. En cualquier caso, hay muchos modelos fractales que se adaptan satisfactoriamente al estudio de determinados fenómenos. Hecha esta precisión, queda ahora claro qué sentido tiene decir que un objeto real posea, por ejemplo, una determinada dimensión fractal (concepto muy importante en dicha teoría que generaliza el concepto de dimensión ordinaria para objetos geométricos que no admiten espacio tangente). No existe una única dimensión fractal, sino una serie de dimensiones que frecuentemente, pero no siempre, resultan equivalentes. Entre estas encontramos la proporcionada por Félix Hausdorff (1868-1942), basada en la consideración de recubrimientos abiertos del conjunto fractal. Esto supone una generalización métrica del concepto de dimensión de un espacio topológico, permitiendo así definir una dimensión no entera para un objeto fractal. Antes del descubrimiento de los fractales habría sido impensable hablar de una dimensión fraccionaria.

El gran auge experimentado recientemente por la geometría fractal se debe en buena parte a la utilización del ordenador, ya que es especialmente eficaz a la hora de repetir los procesos sencillos que paradójicamente suelen usarse para definir los objetos fractales. Esto se aprecia claramente en los ejemplos antes citados (curva de Koch, las curvas de Peano y Hilbert, el triángulo de Sierpinski), cuyas gráficas presentadas en este artículo han sido realizadas mediante el programa Maple.

Veamos a continuación más ejemplos de aplicaciones al mundo de la biología.

En el campo de la biología (y también en el de física-química) se estudian cuerpos formados por agregación de partículas pequeñas (en relación al tamaño total del cuerpo), algo que sucede en los agregados metálicos obtenidos por electrodeposición de los iones de metal contenidos en una disolución (electrolisis), o en los procesos de agregación de las inmunoglobulinas en disolución. Algunos de ellos producen agregados de aspecto dendrítico. Un problema natural surge de que en todos estos fenómenos es importante vigilar cuál es la densidad media con que la sustancia agregada se extiende por el espacio que lo abarca, algo que requiere de ciertas leyes matemáticas.

Otro fenómeno con aspectos similares al de la agregación y que llamó la atención de muchos investigadores es conocido como digitación viscosa, que se produce cuando un líquido de baja viscosidad (baja consistencia espesa y pegajosa) desplaza a un líquido viscoso en un medio capilar (o poroso). Por ejemplo, cuando se recupera petróleo mediante la inyección de agua en un campo petrolífero. Hay un dispositivo, conocido como células de Hele-Shaw, que permite estudiar un modelo bidimensional de digitación viscosa. Consiste esencialmente en el flujo de un líquido viscoso entre dos placas o láminas paralelas ligeramente separadas entre sí. Así, se inyecta agua u otro medio de baja viscosidad, líquido o gaseoso, por un pequeño orificio practicado en el centro de una de las láminas. Si se utiliza aire para desplazar glicerina se obtiene un resultado de aspecto fractal (de aspecto más dendrítico) que se extiende radialmente en forma de dedos. Si se utilizan fluidos con baja tensión superficial en la interfase, se obtiene un resultado notablemente parecido al de los agregados que hemos mencionado anteriormente, tanto en su aspecto como en su dimensión estimada.

También han sido estudiados los fenómenos de digitación viscosa en medios porosos. Un modelo bidimensional se construye disponiendo una capa de esferas de vidrio distribuidas al azar entre dos placas

de Hele-Shaw o en un recipiente tridimensional transparente, y desplazando un fluido viscoso por inyección de fluidos poco viscosos. Se obtienen por este procedimiento estructuras fractales muy parecidas en forma y dimensión a los agregados. Con todo, en este fenómeno interviene de forma decisiva la disposición aleatoria de los poros porque en redes regulares de poros la digitación no es fractal.

Consideremos ahora el siguiente modelo matemático, llamado proceso de agregación por difusión limitada, particularmente apropiado para ciertos procesos de agregación y digitación viscosa. Consiste en suponer que, de un punto elegido al azar de entre los de una circunferencia, salga un monómero que describa un movimiento errático (o browniano) hasta que llegue al centro de la circunferencia, en cuyo momento se detenga. En ese instante, un nuevo monómero se desprende de la circunferencia y se mueve de igual modo hasta tropezar con la trayectoria del anterior, y así sucesivamente. Si en su movimiento algún monómero se aleja excesivamente, lo eliminamos y generamos uno nuevo. Esto es muy sencillo de simular en un ordenador, aunque obviamente requiere mucho tiempo de cálculo (especialmente en las primeras fases), pero lo interesante de este experimento es que se acaban produciendo estructuras de tipo fractal tipo árbol. Esto es fácil de comprender de forma intuitiva: los monómeros vagabundos tienen más probabilidades de tropezar con una de las puntas del agregado que de sortearlas todas y llegar hasta el tronco, de manera que el crecimiento tiende a producirse en los extremos de las ramas.

Unas figuras creadas por el físico alemán Georg Christoph Lichtenberg (1742-1799) pueden ser otro buen ejemplo de fenómeno relacionado con los procesos de agregación descritos anteriormente. Son imágenes producidas por descargas eléctricas ramificadas o arborescentes sobre la superficie o en el interior de materiales aislantes, y sus patrones ramificados y autosemejantes exhiben propiedades fractales.

Otro ejemplo más conocido de conexión entre la geometría fractal y la biología se produce con el brócoli o coliflor Romanescu, ya que cada una de sus flores re-

produce el mismo patrón a diferentes escalas (ver figura 7). Otros patrones matemáticos tipo fractal se pueden apreciar en las hojas de los helechos, en algunos equinodermos como los erizos y las estrellas de mar, en las conchas de moluscos marinos y terrestres, en los rayos, en las fronteras de separación entre diferentes medios físico-biológicos (como en el perfil de una nube, ciertas líneas costeras u orillas de un río) o en los sistemas pulmonar, cardiovascular y nervioso en los animales. De hecho, es precisamente el parecido con un fractal lo que hace que nuestros pulmones puedan maximizar su superficie, y por ende su buen funcionamiento, siguiendo un patrón de crecimiento relativamente sencillo (en efecto, se estima que, aunque su volumen es de 4-6 litros, su superficie ronda los 140 metros cuadrados).

En definitiva, la geometría fractal es un campo matemático de investigación que abarca muchas y diversas áreas, y que crece a buen ritmo. Además de constituir, como hemos visto en este artículo, una herramienta de gran potencia en el terreno de la biología y la química, se puede utilizar para afrontar el estudio de fenómenos complejos relacionados con las comunicaciones (a través del modelado del tráfico en redes), la geología (modelado de formaciones geológicas, patrones sísmicos o fenómenos de erosión), la economía (análisis bursátil y de mercado), la astrofísica (perfiles de las nubes de partículas) e incluso las propias matemáticas (convergencia de métodos numéricos). Gracias a ella también se pueden comprimir imágenes (mediante el llamado proceso de transformación fractal) para que ocupen menos espacio mediante programas de ordenador, y también tiene un importante papel en los efectos especiales del cine, ya que me-



Figura 7. Estructura fractal del Romanesco

dante estructuras fractales podemos crear paisajes y escenarios muy semejantes a la realidad (la película española *La isla mínima* es un ejemplo de ello).

Referencias bibliográficas

- ALBUJER, A. (2014), «Los números de la naturaleza», en Mulero, J., L. Segura y J. M. Sepulcre, (eds.), *Las matemáticas de nuestra vida*, Publicaciones Universidad de Alicante, Alicante, 11-22.
- BATES, A. D., y A. MAXWELL (2005), *DNA topology*, Oxford University Press, Oxford.
- DE GUZMAN, M. y otros (1993), *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Ed. Labor, Barcelona.
- HERNÁNDEZ, M. E. (2016), «Matemáticas aplicadas a la biología», *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n.º 14, 117-131.
- MANDELBROT, M. (1997), *La geometría fractal de la naturaleza*, Tusquets editores., Barcelona.
- MAY, R. M. (1976), «Simple mathematical models with very complicated dynamics», *Nature*, n.º 261, 459-467.
- MURRAY, J. D. (2002), *Mathematical Biology I*, (3.ª ed.), Interdisciplinary Applied Mathematics 17, Springer-Verlag, Nueva York.
- PICKOVER, C.A. (2002), *La maravilla de los números*, Ediciones Robinbook, Barcelona.
- PRUSINKIEWICZ, P., y A. LINDENMAYER (1996), *The algorithmic beauty of plants*, (2.ª ed.), Springer-Verlag, Berlin.
- SEPULCRE, J. M. (2017), *Weierstrass. La gestación del análisis moderno*, Colección: Genios Matemáticos, Editorial RBA, Barcelona.

Juan Matías Sepulcre Martínez

Universidad de Alicante
<JM.Sepulcre@ua.es>