Taller de máquinas de cálculo con fichas de dominó

Carmen Casares Antón

SUMA+ núm. 95
pp. 43-50
Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2018 y aceptado en enero de 2020

En este artículo se describe el desarrollo de un taller de matemáticas que se realizó en el periodo extraordinario de junio en la Comunidad de Madrid.
El taller consistía en la elaboración de calculadoras con fichas de dominó. Para conseguirlo el profesor guio a los estudiantes por la senda de los sistemas de numeración, los algoritmos de la suma y el producto, y las puertas lógicas.

Palabras clave: Máquina de cálculo, Dominó, Puertas lógicas, Números binarios, Aritmética modular.

Mathematical activities of calculators with dominoes pieces // This article describes the development of a math workshop that took place during the extraordinary period of June in Madrid.
The activity consisted of the elaboration of calculators using dominoes pieces. In order to achieve this, the teacher guided the students through numbering systems, the algorithms for addition and multiplication, and logical gates.

Keywords: Adding machine, Dominoes, Logic gates, Binary numbers, Modular arithmetic.

El objetivo principal del taller era construir máquinas de cálculo sencillas con fichas de dominó. Para lograrlo se eligieron como objetivos secundarios los siguientes:

— aprender nociones básicas sobre el sistema binario y la aritmética modular,
— profundizar en los algoritmos de las operaciones aritméticas, y,
— entender el funcionamiento de las puertas lógicas y su aplicación al cálculo.

El taller se desarrolló en tres sesiones de 50 minutos.

Durante la primera sesión con los alumnos, y partiendo de los contenidos del currículum de la ESO sobre sistemas de numeración, se introdujeron los números binarios con sus dos símbolos, 0 y 1, para representar los números cero y uno, y el sistema posicional para escribir cualquier otro número con esos dos símbolos únicamente. Al principio los alumnos se extrañaban cuando se nombraba el dos o el tres y se escribía 10 o 11, pero al final de la clase distinguían perfectamente los números de su expresión decimal y binaria: dos $= 2_{10} = 10_2$ (para distinguir la notación decimal y binaria se incluirá, cuando sea necesario, un subíndice). Y disfrutaron cuando se les enseñó a escribir el mismo número en sistema decimal y binario con la correspondiente conversión:

$$10011_2 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2^0 = 19_{10}.$$

Lo que más les sorprendió fue que la representación binaria de un número decimal se leyera, a la inversa y junto con el último cociente, en los restos de las divisiones sucesivas entre 2.

$$\begin{array}{rrrrr}
19 & \underline{\lfloor 2} & & & \\
1 & 9 & \underline{\lfloor 2} & & \\
 & 1 & 4 & \underline{\lfloor 2} & \\
 & & 0 & 2 & \underline{\lfloor 2} \\
 & & & 0 & 1
\end{array}$$

Durante la exposición se les animó a que practicaran sus nuevas habilidades.

Practica:

Escribe en el sistema decimal los números binarios 101_2, 1010_2 y 110001_2.

Escribe en el sistema binario los números decimales 6_{10}, 27_{10} y 31_{10}.

Si los números siguientes son menores que diez, indica cuáles de ellos están escritos en sistema binario, en sistema decimal o en ambos:

0, 1, 6, 7, 9, 10, 11 y 1001.

En la segunda sesión, y una vez interiorizado el nuevo sistema de numeración, los alumnos se enfrentaron al siguiente reto: ¿cómo se generaliza el algoritmo de la suma para números binarios?

Para sumar números enteros en el sistema decimal se utiliza la tabla siguiente de la suma de números de un cifra:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Pues de igual manera se procede con el sistema binario. Como $1 + 1 = 2_{10} = 10_2$ la tabla que corresponde a la suma en binario es:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Y la suma de dos números se realiza con el mismo algoritmo que el del sistema de numeración decimal:

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
+ & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1^{*} & 0
\end{array}$$

(*) En esta columna es necesario recordar que la suma es una operación binaria, luego $1+1+1 = (1+1)+1 = 10_2 + 1 = 11_2$.

Enseguida los alumnos aprendieron que al sumar en binario uno más uno, que es dos y se escribe 10, tenían que dejar el 0 en la columna y añadir un 1 en la columna inmediatamente a la izquierda. La generalización del algoritmo de la suma a binario se volvió adictiva y costó que los estudiantes dejaran de calcular para pasar a la siguiente fase del taller.

Se exponen algunas de las tareas que se les encomendó.

Practica:

Suma los números binarios 1010_2 y 110002_2.

Escribe en el sistema binario los números trece y nueve. Súmalos en binario y comprueba pasándolos a decimal que su suma es veintiuno.

Pero en realidad, aunque las máquinas de cálculo utilizan códigos binarios de ceros y unos, la aritmética que subyace en su diseño es la aritmética de congruencias o aritmética modular $(\mathbb{Z}_2)$.

El reloj analógico es un sencillo ejemplo de aritmética modular $(\mathbb{Z}_{12})$ que establece equivalencias entre las horas cuya diferencia es múltiplo de doce. Por ese motivo muestra con igual representación las 2 de la mañana y las 14 horas, o 2 de la tarde:

$$14 \equiv 2(\bmod 12).$$

Y exactamente 24 o 36 horas después de las 11 vuelve a ser las 11:

$$11 + 36 \equiv 11(\bmod 12).$$

De manera análoga se puede establecer una aritmética de congruencias, o modular, entre números que cuya diferencia es múltiplo de dos $(\mathbb{Z}_2)$. En esa aritmética son equivalentes el 0, el 2, el 4… , los números pares:

$$0 \equiv 2 \equiv 4(\bmod 2).$$

Y forman una clase (residual) diferente a la que forman el 1, el 3, el 5…, los impares:

$$1 \equiv 3 \equiv 5(\bmod 2).$$

Con estas equivalencias las tablas de la suma y el producto serían

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Esta es la aritmética que aplican convenientemente los circuitos de las calculadoras y otras máquinas programables para reproducir la aritmética habitual.

La segunda sesión continuó con la construcción de la primera puerta lógica (XOR) hecha como un camino con fichas de dominós.

Las puertas lógicas son dispositivos, normalmente electrónicos, que cuando reciben una señal, o varias, devuelven otras y que permiten implementar en circuitos operaciones lógicas y matemáticas. Las señales recibidas, que se denominan entradas, son una de las dos opciones binarias, 1 o 0, y las señales devueltas, que se denominan salidas, también son una de las opciones de un código binario.

En este taller las puertas lógicas eran caminos trazados con fichas de dominó. Los caminos tenían una o dos fichas entrada que se activaban simultáneamente. Si la entrada era 0, se dejaba la ficha de pie; si la entrada correspondiente era 1, se empujaba la ficha para tumbarla. Según el trazado del laberinto, y la opción pulsada en las entradas, la ficha de la salida caería o permanecería de pie, devolviendo un 1 o un 0 respectivamente.

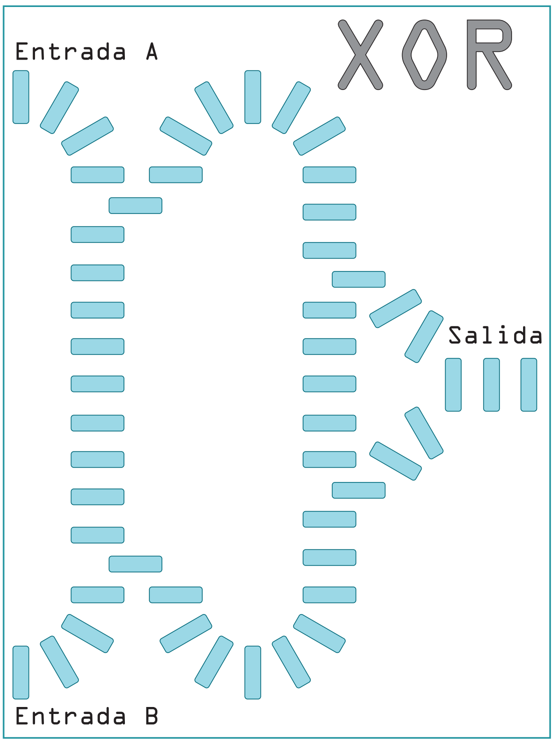

Figura 1. Trazado de dominó para la puerta lógica XOR

Se expone una propuesta de tareas sobre la primera puerta para orientar la investigación de los estudiantes.

Ahora te toca a ti:

Construye el camino que corresponde a la puerta lógica XOR y úsalo para completar la tabla:

Entrada A	Entrada B	Salida
0	0	0
0	1	
1	0	
1	1	

Describe a continuación por qué cuando tumbas la entrada A y no la B la ficha de salida no se cae.

Compara los resultados de la tabla con los resultados de la suma de números binarios en aritmética modular: ¿la tabla para esta puerta lógica coincide con la tabla de la suma?, ¿en qué aritmética?

Los alumnos observaron que las salidas que se aprecian en la tabla de la puerta XOR corresponden a las que se leen en la tabla de suma de dígitos en aritmética de congruencias que se ha construido antes:

$$\begin{aligned} 0+0 &\equiv 0 \pmod 2 \\ 0+1 &\equiv 1 \pmod 2 \\ 1+0 &\equiv 1 \pmod 2 \\ 1+1 &\equiv 0 \pmod 2. \end{aligned}$$

Y concluyeron, con acierto, que esta puerta lógica sumaba las entradas, pero como en la aritmética modular.

Los alumnos advirtieron, eso sí, que la máquina era poco práctica porque se destruía en cada uso y eso obligaba a montarla cada vez que se realiza una operación. Sin embargo entendieron cómo funciona esa puerta lógica y por qué se utiliza para sumar.

La tercera sesión se centró en el producto.

La tabla del producto para las dos únicas cifras del sistema binario es:

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Y coincide con la tabla del producto en aritmética modular (módulo 2).

Y el producto de dos números escritos en sistema binario se realiza con el mismo algoritmo que el del sistema de numeración decimal:

$$\begin{array}{rcccccc} & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \times & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

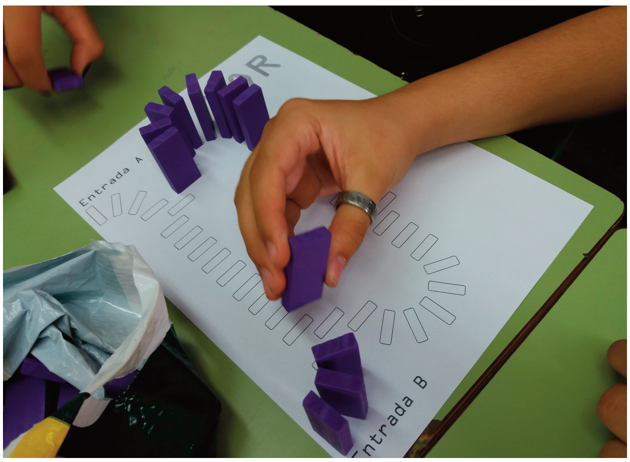

Figura 2. Construyendo la puerta XOR

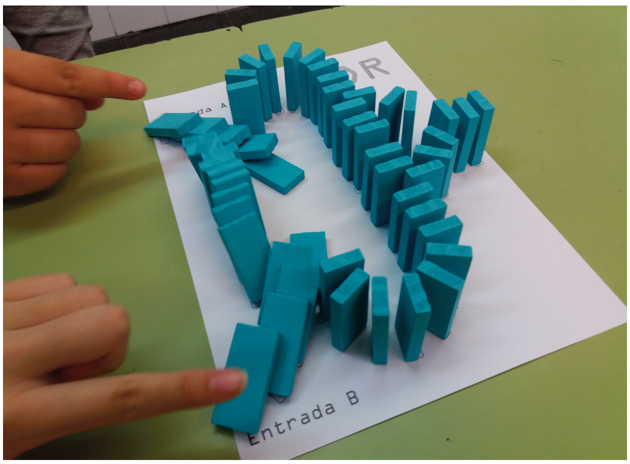

Figura 3. 1 + 1 = 0

Los alumnos se ejercitaron en el algoritmo del producto con propuestas como la siguiente:

> *Practica:*
>
> Multiplica los números binarios 1010_2 y 111_2.

Como las bases del taller se habían fijado en las sesiones anteriores, la explicación teórica fue más leve y pudieron centrarse en el montaje del nuevo camino para el producto, la puerta lógica AND, que tenía un trazado más complicado.

> *Ahora te toca a ti:*
>
> Construye el camino que corresponde a la puerta lógica AND y úsalo para completar la tabla siguiente:
>
> | Entrada A | Entrada B | Salida |
> |---|---|---|
> | 0 | 0 | 0 |
> | 0 | 1 | |
> | 1 | 0 | |
> | 1 | 1 | |
>
> Describe a continuación por qué cuando tumbas la entrada A y la B la última ficha no cae.
>
> Compara con los resultados de las operaciones y contesta con lo aprendido: ¿la tabla para esta puerta lógica coincide con la tabla del producto?

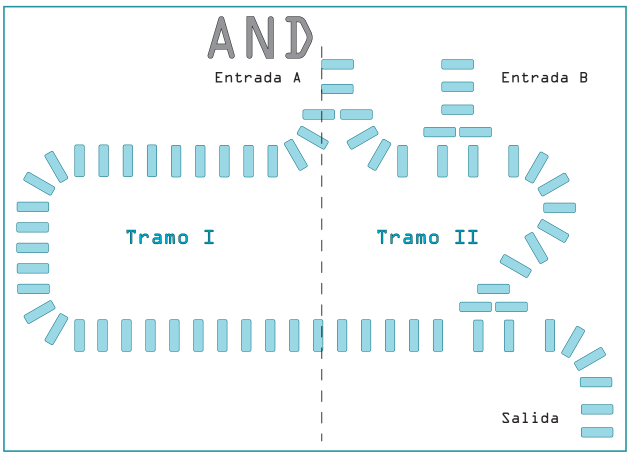

Figura 4. Trazado de dominó para la puerta lógica AND (El trazado ocupa un DIN A3. La línea discontinua divide el trazado en dos tramos de tamaño DIN A4)

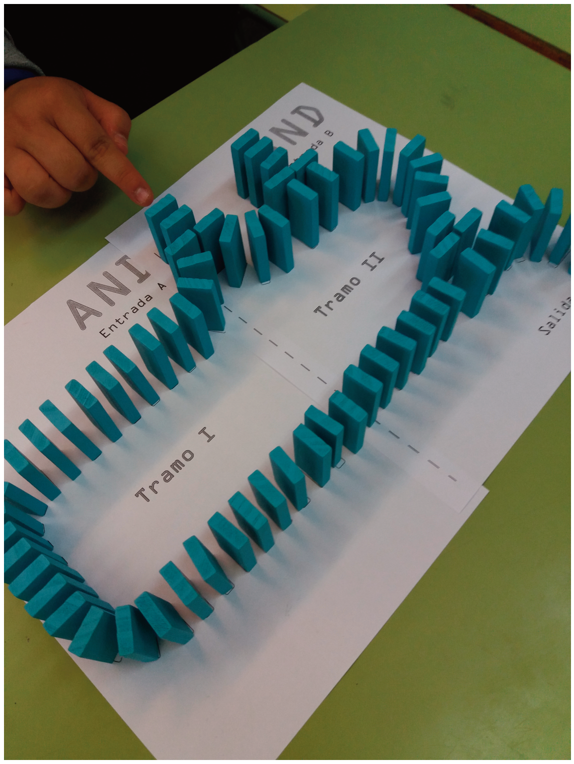

Figura 5. Trazado de la puerta AND

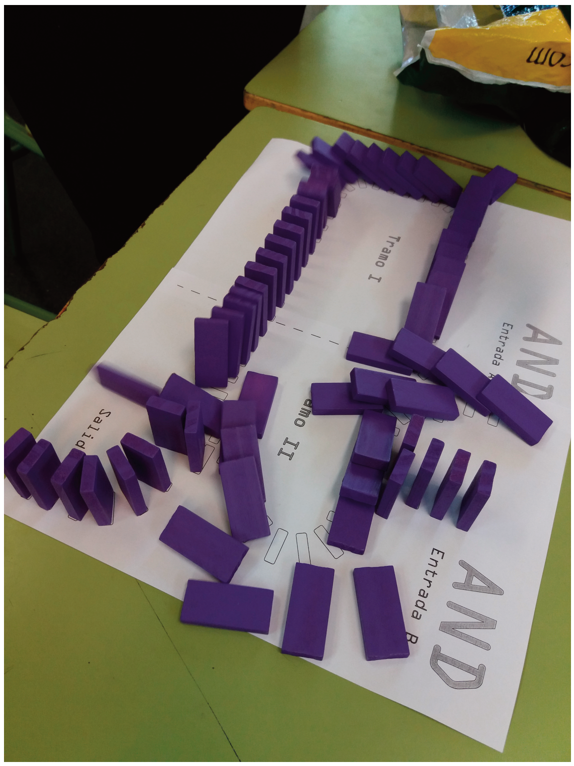

Figura 6. $1 \times 0 = 0$

El taller debía concluir con la construcción de un último circuito, que correspondía realmente a una máquina de sumar en binario dos números entre cero y uno, con resultados posibles cero, uno o dos. El circuito correspondiente a esta calculadora se muestra en la figura 7.

El circuito SUMA necesita cuatro tramos impresos en DIN A4. Incluye dos salidas para que puedan leerse las dos cifras que corresponden al resultado de sumar uno mas uno en binario.

Para este circuito se propusieron las actividades siguientes:

Ahora te toca a ti:

Construye el circuito SUMA. ¿Cuántas salidas tiene?

Como su nombre indica este circuito suma los números cero y uno entre sí. Pero lo hace en binario. En cada entrada introducimos uno de los dos números cero o uno (dejando de pie o tumbando la ficha). El resultado final puede ser un número entre cero y dos, pero en binario dos se escribe con dos dígitos, $2_{10}=10_2$ y en ese caso necesitamos dos salidas. ¿Cuál de las dos salidas del circuito corresponde al dígito 1 y cuál al 0 en ese caso?

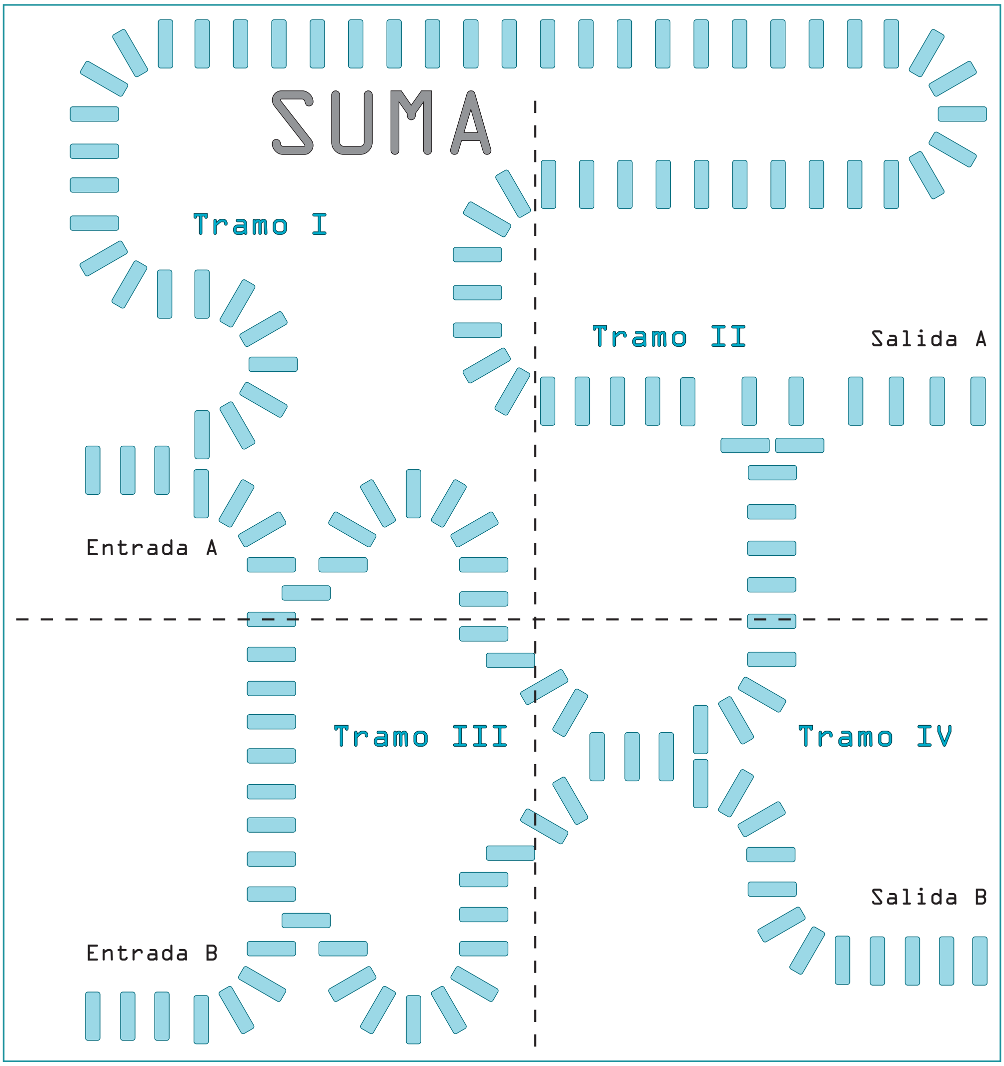

Figura 7. Trazado de dominó para la suma binaria
(El trazado ocupa un DIN A2. La línea discontinua divide el trazado en cuatro tramos de tamaño DIN A4)

La realización de este último circuito no fue posible por falta de tiempo.

Sin embargo, al finalizar la tercera sesión los alumnos habían construido algunas máquinas de cálculo, de las que señalaron dos inconvenientes:

- El primero es que sumaban y multiplicaban, según sus palabras, solo los números cero y uno (las puertas lógicas operan en realidad con las clases de equivalencia, par e impar, de $\mathbb{Z}_2$).
- El segundo es que se destruían cada vez que se usaban.

Pero concluyeron el taller satisfechos porque habían construido sus primeras calculadoras y, sobre todo, porque habían comprendido en profundidad los algoritmos de suma y producto que le enseñaron sus maestros de primaria.

El taller puede ampliarse con el estudio y construcción de otras puertas lógicas y otros trazados, con sus correspondientes actividades asociadas.

El trazado de la puerta lógica **OR** se puede observar en la figura 8.

Ahora te toca a ti:

¿Qué ocurre cuando tumbas una de las fichas de las entradas?, ¿y si tumbas simultáneamente las dos?

Completa, con esta información, la tabla para la puerta lógica OR.

Entrada A	Entrada B	Salida
0	0	0
0	1	
1	0	
1	1	

La puerta **NOT** corresponde al cálculo del opuesto. Se ofrece en la figura 9 un diseño para esa puerta con planta y alzado para poder construirla correctamente.

Ahora te toca a ti:

¿Cuántas entradas tiene esta puerta? ¿Y cuántas salidas?

¿Cuál crees que es el mayor inconveniente de la puerta que se ha construido con fichas de dominó?

Pero dicho trazado es poco práctico porque no puede integrarse en otros circuitos de cálculo.

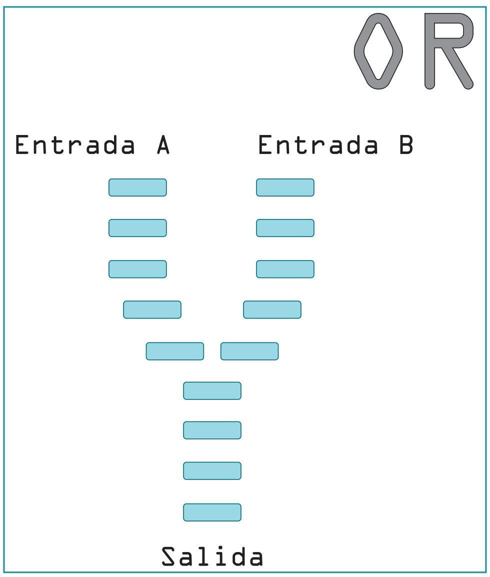

Figura 8. Trazado de dominó para la puerta lógica OR

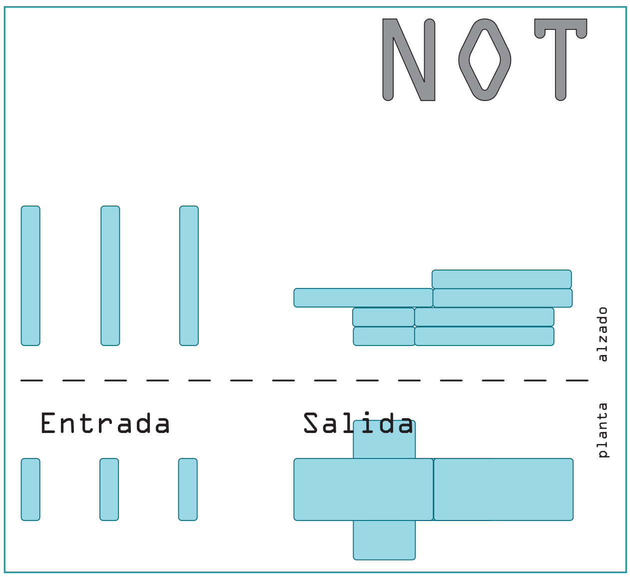

Figura 9. Trazado de dominó para la puerta lógica NOT

Plantillas

En los siguiente enlaces se encuentran los archivos con los plantillas en formato DIN A4 para construir los caminos con fichas de dominó. Los planos están ajustados a fichas de dominó cuyas dimensiones en cm son $4{,}5 \times 2 \times 0{,}7$ que pueden adquirirse por internet.

OR:
<https://mediateca.educa.madrid.org/js/pdf/web mediateca_viewer.php?id=j9u5z1g8l9m3hdc>.

XOR:
<https://mediateca.educa.madrid.org/js/pdf/web/mediateca_viewer.php?id=7nfskhe64one5tx8>.

AND (tramos I y II):
<https://mediateca.educa.madrid.org/js/pdf/web/mediateca_viewer.php?id=soaesps89sldbdz2>.
<https://mediateca.educa.madrid.org/js/pdf/web/mediateca_viewer.php?id=8yanqrlrx2q1y5jm>.

NOT:
<https://mediateca.educa.madrid.org/js/pdf/web/mediateca_viewer.php?id=7illaweniqkkw1uls>.

SUMA DE UNA CIFRA:
<https://mediateca.educa.madrid.org/js/pdf/web/mediateca_viewer.php?id=jrndvnz2qc5r9rgv>.
<https://mediateca.educa.madrid.org/js/pdf/web/mediateca_viewer.php?id=6yp3vjqix2s4ahus>.
<https://mediateca.educa.madrid.org/js/pdf/web/mediateca_viewer.php?id=5l16lkawzxznekmo>.
<https://mediateca.educa.madrid.org/js/pdf/web/mediateca_viewer.php?id=z8c19otalwo8j5wa>.

Referencias bibliográficas

Los trazados de dominó para las puertas lógicas que se muestran a lo largo del artículo se han realizado inspirándose en otros que aparecen en los siguientes enlaces:

THINK MATHS (s. f.), *Domino computer worksheets,* <https://www.think-maths.co.uk/downloads/domino-computer-worksheets>.

VASILIAUSKAS, A. (22 de septiembre de 2013), Building logic gates from domino, *Agnius Vasiliauskas coding sandbox*, <http://coding-experiments.blogspot.com/2013/09/building-logic-gates-from-domino.html>.

Carmen Casares Antón
IES Juan de la Cierva, Madrid
<ccasaresanton@educa.madrid.org>