

Proporcionalidad aritmética en libros de texto de 4.º de ESO

Carlos Ibáñez Freire
Sergio Martínez Juste

SUMA núm. 95
pp. 51-58

Artículo recibido en *Suma* en abril de 2019 y aceptado en enero de 2020

En este trabajo se realiza un estudio del tratamiento dado a la proporcionalidad aritmética en diferentes libros de texto de 4.º de ESO. Para ello, se desglosan y caracterizan los contenidos relacionados mediante un análisis a priori. Entre otros resultados, se observa una clara predilección por enfocar la enseñanza hacia la automatización de procedimientos. Realizamos una reflexión sobre si el planteamiento de enseñanza de los textos promueve una comprensión profunda de la proporcionalidad y contrastamos los resultados con otros análisis de libros de texto sobre el mismo tema.

Palabras clave: Proporcionalidad aritmética, Libros de texto, Análisis didáctico, Educación secundaria.

Los conceptos relacionados con la proporcionalidad permiten modelizar muchos fenómenos de gran relevancia: situaciones de compraventa, trueques, conversión entre unidades monetarias, repartos, variaciones porcentuales, ofertas, mezclas y aleaciones, disoluciones, relaciones físicas fundamentales, etc. Su estudio, aunque puede ser abordado desde un enfoque algebraico, suele suponer la culminación de la aritmética escolar. Por tanto, el desarrollo del llamado *razonamiento proporcional* debe ser un objetivo fundamental de la educación obligatoria.

Arithmetic proportionality in 4.º ESO textbooks //

In this work, we conduct a study of the treatment given to the arithmetic proportionality in different 4.º ESO textbook. In order to do that, the contents are itemized and characterized by an 'a priori' analysis. Among other results, there is a clear predilection for focusing teaching towards the automation of procedures. We make a reflection about textbook potential to assist in teaching aimed at building comprehensive knowledge and we compare the results with other textbooks analysis focused on arithmetic proportionality.

Keywords: Arithmetic proportionality, Textbooks, Didactical analysis, Secondary education.

Los decretos ministeriales suponen un primer nivel de concreción curricular, sin embargo, los contenidos suelen aparecer poco desglosados y detallados, y «los libros de texto determinan en la práctica la enseñanza más que los decretos de los diferentes gobiernos» (Schubring, 1987: 41). Por lo que resulta interesante analizar las propuestas de enseñanza de los libros de texto para evaluar en qué medida estos contribuyen a un aprendizaje profundo de los contenidos (Shield y Dole, 2013).

En este trabajo analizamos el tratamiento dado a la proporcionalidad aritmética en libros de texto de 4.º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas, única opción de este curso donde está presente explícitamente este contenido. Los objetivos de nuestro análisis son: por un lado detectar posibles deficiencias en los procesos de enseñanza-aprendizaje que pudieran derivarse de un uso literal de los libros de texto, para que los docentes en ejercicio podamos ser conscientes de dichas carencias e intentar solventarlas al implementar propuestas de enseñanza de la proporcionalidad; por otro, supone un ejemplo de uso del análisis didáctico como herramienta que los profesores de secundaria podemos utilizar para realizar estudios críticos de textos escolares enfocados en un tema determinado.

Promover la comprensión de la proporcionalidad

Como indican Cramer y Post (1993) una de las claves para promover la comprensión de la proporcionalidad es que los estudiantes se enfrenten a un diverso tipo de tareas. Los autores proponen tres categorías de problemas de proporcionalidad simple directa según la tarea matemática que se debe desempeñar:

- Problemas de *valor perdido*: Si tres entradas de cine cuestan 23,70 €, ¿cuánto costarían cinco entradas?
- Problemas de *comparación cuantitativa*: En el cine A, tres entradas cuestan 23,70 € y, en el cine B, cinco entradas cuestan 37,50 €, ¿cuál es más barato?
- Problemas de *comparación cualitativa*: Un grupo de amigos va al cine A y otro al cine B. El grupo del cine A es más numeroso que el del cine B. El grupo del cine B ha pagado, en total, menos por las entradas. ¿Qué cine es más barato?

Es importante, además, que las tareas propuestas sean ricas y no rutinarias (Singh, 2000) y que la enseñanza no se centre en dar técnicas específicas para cada tipo de problema. Los métodos de resolución no deben presentarse de forma algoritmizada, ya que esto esconde la naturaleza de los conceptos que se quieren

trabajar (Van Dooren y otros, 2008; Solar y Zamorano, 2006). Las estrategias de resolución pueden tener diferentes grados de sofisticación algebraica. Desde resoluciones aritméticas, basadas en el trabajo con los conceptos de razón y constante de proporcionalidad, hasta modelizaciones funcionales. La enseñanza de la proporcionalidad debe tener en cuenta conectar las diferentes facetas de esta estructura matemática.

En este sentido, la explicitación y el trabajo significativo con la razón externa (razón entre cantidades relacionadas de cada una de las magnitudes involucradas) o, en general, con la constante de proporcionalidad, es un elemento central para la comprensión de la proporcionalidad (Arican, 2018) y para poder conectar el mundo aritmético con el funcional (Burgos y Godino, 2019).

Categorías para analizar la proporcionalidad en libros de texto

El análisis de libros de texto es una herramienta imprescindible para determinar las prácticas educativas reales, debido al alto impacto sobre los contenidos impartidos en las aulas que tienen estos materiales (Maz y Rico, 2015). Además, estos análisis pueden dar información sobre las ventajas e inconvenientes de determinadas orientaciones didácticas (González, 2009) o poner de manifiesto la existencia de errores matemáticos (Fernández, Caballero y Fernández, 2013).

Existen numerosos estudios que analizan libros de texto usando como contenido específico la proporcionalidad (Gairín y Oller, 2012; Guacaneme, 2002; Martínez, Muñoz y Oller, 2014, 2015; Martínez y otros, 2017; Pino y Blanco, 2008; Shield y Dole, 2013). Algunos de ellos usan los descriptores del análisis de contenido, una de las etapas del análisis didáctico, para establecer un sistema de categorías de análisis (Rico, Marín y Lupiáñez, 2008). Así, el contenido puede describirse a partir de la *estructura conceptual*, la *fenomenología* y los *sistemas de representación* utilizados.

La *estructura conceptual* la determinan los conceptos y procedimientos matemáticos, junto con sus relaciones y propiedades. Oller (2012) organiza los contenidos

de la proporcionalidad en cinco categorías: razón y proporción, proporcionalidad directa (PD), proporcionalidad inversa (PI), proporcionalidad compuesta (PC) y aplicaciones de la proporcionalidad (repartos, porcentajes, interés simple y compuesto, mezclas).

Para la primera categoría, Gairín y Oller (2012) distinguen si las razones se definen entre números o entre cantidades de magnitud. Además, caracterizan los significados que los textos otorgan a la razón y cómo se argumenta la relación de proporcionalidad: por razones externas (constancia), implícitamente proporcional (invarianza), multiplicativa («a doble, doble, ...»), aumentos y disminuciones (argumento erróneo del tipo «a más, más») o explícitamente funcional ($y = kx$).

Martínez y otros (2014, 2015, 2017), generalizan características de la PD a la PI y la PC. Los autores se centran en los tipos de problemas y las estrategias de resolución. Así, generalizan la clasificación de Cramer y Post (1993), a las situaciones de PI y PC, distinguiendo problemas de valor perdido, comparación cualitativa y comparación cuantitativa. Los métodos de resolución pueden agruparse en torno a tres estrategias: cálculo de la constante de proporcionalidad, establecimiento de una proporción o aplicación de una regla de tres. Los diferentes argumentos para caracterizar una relación de PD pueden, también, extrapolarse a las situaciones de PI y PC. En este caso debe cambiarse la caracterización por razones externas por la caracterización a través de la constante de proporcionalidad.

La *fenomenología* estudia las situaciones y contextos reales que originan la estructura conceptual. Además de contextos generales encontramos categorías concretas para la proporcionalidad aritmética. Oller y Gairín (2016) en un análisis de libros históricos detectan diferentes contextos: intercambios, repartos, préstamos, mezclas y aleaciones. Martínez y otros (2015) proponen contextos específicos para la PC: producción o consumo en un marco de trabajo cooperativo, costes económicos o temporales de una actividad, situaciones que involucran magnitudes de la física.

Por último, los *sistemas de representación* incluyen las expresiones, signos, símbolos o gráficos mediante los

que se presenta un determinado contenido matemático. Valverde, Castro y Molina (2013) identifican diferentes tipos de representaciones para los conceptos relacionados con la proporcionalidad: simbólicas, verbales, algebraicas-funcionales, cartesianas, gráficas, tabulares e icónicas.

Metodología

Realizamos un análisis de la unidad didáctica dedicada a la proporcionalidad aritmética en tres libros de texto de 4.º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. Identificaremos mediante *Libro 1* el texto de Vallejo y Fuentes (2016), por *Libro 2* el de García y Ortega (2016) y por *Libro 3* el texto de Mira (2016). Los tres pertenecen al periodo educativo actual que entró en vigor en el curso 2016-2017. Todos se corresponden con editoriales ampliamente extendidas por el territorio nacional y de reconocido prestigio.

Se ha estructurado el análisis según los indicadores del análisis de contenido: estructura conceptual, fenomenología y sistemas de representación. Dentro de cada indicador se han utilizado los trabajos mencionados en la sección anterior para guiar y concretar el análisis y para realizar la discusión de los resultados obtenidos.

Resultados del análisis

SOBRE LA ESTRUCTURA CONCEPTUAL

Razón y proporción

En la tabla 1 se recoge si los libros de texto, al definir el concepto de razón, lo hacen como relación entre números o entre cantidades de magnitud.

Ninguno de los textos distingue entre cantidades de magnitud y números. En los libros en los que se define

	Libro 1	Libro 2	Libro 3
Definen razón (y proporción)	No	Sí	No
Entre números o magnitudes	Ninguno	Ninguno	Ambas

Tabla 1. Aparición de definiciones para el concepto de razón

la razón, no se trata la distinción entre razón interna (entre valores de una misma magnitud) y la razón externa (entre valores de dos magnitudes relacionadas).

En el *Libro 2* se identifica el concepto de razón con una fracción entre dos números a la que no se otorga significado. La proporción se define de forma descontextualizada:

Se dice que los números a , b , c y d forman una proporción si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En el *Libro 3* se interpreta del siguiente modo la razón: « a/b significa que por cada b unidades se tienen a unidades». No aparecen otras interpretaciones como la comparación multiplicativa o el tanto por uno. Las tareas propuestas en los dos textos para trabajar el concepto de razón son ejercicios descontextualizados.

Relaciones de PD

Todos los libros presentan alguna caracterización de relación simple directa (tabla 2).

La caracterización por aumentos y disminuciones, presente en el *Libro 1*, es un argumento erróneo que identifica relaciones crecientes con relaciones directamente proporcionales:

A más metros, más dinero. }
A menos metros, menos dinero. }
El coste de un trozo de cable es directamente proporcional a su longitud.

En el *Libro 2* no se utiliza inicialmente la caracterización por aumentos y disminuciones, sin embargo, esta aparece cuando se resuelven problemas de PC:

Magnitudes: números de grifos (G), número de horas (H) y precio en euros (€).
Si G aumenta \Rightarrow € aumenta \Rightarrow la proporción es directa.
Si H aumenta \Rightarrow € aumenta \Rightarrow la proporción es directa.

En los textos se presentan dos tipos de problemas en los que se utilizan las anteriores caracterizaciones: problemas en los que hay que decidir si hay PD entre dos magnitudes y problemas de valor perdido. No se encuentran problemas de comparación en ningún texto.

Las estrategias de resolución para problemas de valor perdido que se utilizan en cada libro se pueden observar en la tabla 3.

De las estrategias anteriores, los textos parecen priorizar la regla de tres, quedando los otros métodos en un segundo plano. En el *Libro 2* la estrategia de proporciones, por ejemplo, se presenta después de la regla de tres en vez de usarse para justificarla:

Para resolver problemas de proporcionalidad directa se emplean las proporciones o la regla de tres simple. En el ejemplo anterior:

$$\frac{5}{40} = \frac{10}{x} \Rightarrow 40 \cdot 10 = 5 \cdot x \Rightarrow 5x = 400 \Rightarrow x = 80$$

El método de reducción a la unidad aparece de forma secundaria, con poco detalle, tras la utilización de la regla de tres y añadiendo elementos algebraicos innecesarios. Por ejemplo en el *Libro 3* podemos leer:

Otra forma de resolver este problema es calculando los gramos de harina que se necesitan para una persona:

$$x = \frac{450}{6} = 75 \text{ g.}$$

Para hacer una tarta de una ración se necesitan 75g de harina y para hacerla 8 raciones, utilizaremos 8 veces esa cantidad, es decir, $75 \cdot 8 = 600$ g.

Este segundo método se denomina *reducción a la unidad*.

	Libro 1	Libro 2	Libro 3
Razones externas	No	No	No
Multiplicativa	No	Sí	Sí
Aumentos y disminuciones	Sí	No	No
Explícita funcional	No	No	No
Implícita funcional	No	Sí	No

Tabla 2. Principales formas de caracterizar la PD

	Libro 1	Libro 2	Libro 3
Regla de tres	Sí	Sí	Sí
Reducción a la unidad	No	No	Si
Proporciones	No	Sí	No

Tabla 3. Estrategias de resolución de problemas de valor perdido PD

Relaciones de PI y PC

El tratamiento de la PI es análogo al de la PD, teniendo en cuenta las particularidades de cada tipo de relación proporcional.

La caracterización de la PC se realiza en el *Libro 1* mediante ejemplos. En el *Libro 2* se definen los problemas de PC como «problemas en los que intervienen tres o más magnitudes relacionadas dos a dos por una relación de PD o PI». Esta caracterización no es estrictamente correcta (no supone que el resto de las magnitudes deban permanecer constantes). En el *Libro 3* no se trata la PC.

En cuanto a los problemas de PC, el *Libro 1* trata problemas de valor perdido de tipo directa-directa y directa-inversa. La estrategia de resolución empleada es la regla de tres compuesta. En el libro se proponen, posteriormente, problemas de PC inversa-inversa. Es decir, tras presentar estrategias algorítmicas de resolución específicas para dos tipos de problemas se plantean problemas que requieren modificar dichas estrategias. En el *Libro 2* se tratan los tres tipos de problemas de valor perdido con tres magnitudes. La estrategia de resolución presentada es la regla de tres compuesta que, según el texto, resulta de aplicar sucesivamente varias reglas de tres simples.

Ningún libro presenta problemas de PC con más de tres magnitudes, ni problemas de comparación.

Porcentajes

En el *Libro 1* se introduce el porcentaje de forma descontextualizada y los problemas se resuelven mediante reglas de tres. Después, se identifica el porcentaje con una fracción de denominador 100 que no se interpreta como razón. Se trabajan problemas de aumentos y disminuciones y de variaciones porcentuales encadenadas. Los métodos de resolución se basan en aplicar fórmulas o la regla de tres. Las fórmulas no se justifican, sino que se ilustran mediante ejemplos resueltos. Para el encadenamiento de variaciones porcentuales se sugiere realizar varios problemas simples consecutivos.

En el *Libro 2* se introduce el porcentaje como tanto por cien. Posteriormente se define el cálculo del

porcentaje de una cantidad. Sin embargo, la notación utilizada es ambigua. El símbolo % se usa para denotar al numeral que debería acompañarlo. Se explicitan todos los tipos de problemas asociados al porcentaje y se facilitan las correspondientes fórmulas como método de resolución sin justificación:

Para calcular el porcentaje (%) de una cantidad total (C) se aplica la siguiente expresión:

$$\% \text{ de } C = \frac{\% \cdot C}{100}.$$

En el *Libro 3*, se define directamente el tanto por ciento de una cantidad, $t\%$ de $C = \frac{t}{100} \cdot C$, sin atender al significado propio del porcentaje. Para los cálculos, se sugiere aplicar una regla de tres, o usar una fracción de denominador 100 con significado de operador. Para el cálculo de aumentos y disminuciones porcentuales y el encadenamiento de porcentajes se dan fórmulas específicas sin justificar.

Interés simple e interés compuesto

Los tres libros introducen el interés simple y compuesto de forma contextualizada. Para ello, definen en primer lugar los términos asociados (capital, rédito, tiempo, interés) y después dan fórmulas para cada tipo de interés. Para justificar el interés simple, en el *Libro 1* y el *Libro 2*, se relacionan los problemas con uno de PC.

Se observan diferencias a la hora de interpretar los enunciados. Aunque en la mayoría de los problemas se especifica el tipo de interés que se desea calcular, en el *Libro 1* se presupone que el interés es compuesto a no ser que se diga lo contrario, mientras que, en *Libro 3*, se presupone lo contrario. Además, se supone que los intereses se cobran de forma continua, sin embargo, esto no suele suceder en realidad y, además, es incorrecto si se trata del interés compuesto.

Repartos proporcionales

Solo aparecen en el *Libro 1* y *Libro 2*. En los repartos directos se sugiere resolver atendiendo al significado de las operaciones, se divide la cantidad a repartir entre el total de las participaciones y luego se reparte de forma proporcional a las participaciones individuales. Para repartos inversos se da una fórmula sin justificación. Además, son problemas artificiales en

los que se explicita siempre que el reparto debe hacerse de forma inversamente proporcional.

Mezclas y aleaciones

Solo aparecen en el *Libro 1* y se resuelven dando significado a las operaciones. En general, se busca el coste total y se divide entre el peso total o, para aleaciones, se busca la cantidad de un metal por cada unidad del total de aleación. No aparecen mezclas de más de dos productos. En los problemas considerados como más difíciles se ponen ayudas que evitan la reflexión de los alumnos y condicionan la forma de resolución.

SOBRE LA FENOMENOLOGÍA Y LAS SITUACIONES-PROBLEMA

Los libros cuentan con un texto introductorio al principio de la unidad que podría verse como una justificación de la necesidad de desarrollar estos conceptos. Sin embargo, en estas situaciones introductorias no encontramos problemas que deban resolver los alumnos para que experimenten la necesidad de construir los contenidos y procedimientos asociados a la proporcionalidad. En el transcurso de la unidad, en el *Libro 1* y el *Libro 3*, no se plantean problemas introductorios para los contenidos trabajados. Los libros presentan, en primer lugar, los conceptos y procedimientos, para luego ejemplificarlos con problemas resueltos. Por otra parte, en el *Libro 2*, sí se plantean problemas antes de introducir algunos de los contenidos.

La resolución de los problemas no precisa de un análisis del tipo de proporcionalidad o del tipo de problema del que se trata ya que, casi todos los problemas están etiquetados bajo una categoría que marca el contenido que se trabaja. Por ejemplo, en el *Libro 3*, los problemas se clasifican bajo etiquetas como *proporcionalidad compuesta*. Además, en los problemas de repartos e intereses, se especifica en el enunciado de qué tipo es el reparto o el interés. En los diferentes problemas de cada categoría solo cambia el contexto, la posición de la incógnita y la estructura numérica.

Algunos problemas presuponen hipótesis erróneas. Por ejemplo, en el *Libro 3* se considera una relación de PD entre los concejales asignados y los votos obtenidos en las elecciones, lo cual no es cierto con el

sistema d'Hondt. En el *Libro 2* se considera una relación de PD entre el consumo de combustible y la velocidad de un vehículo. Encontramos también problemas que requieren de conocimientos de física no triviales. Por ejemplo, se presentan las relaciones entre presión y profundidad, presión y volumen de un gas, dioptrías y distancia, temperatura del congelador y tiempo que tardan en congelarse los alimentos.

SOBRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

En general, predominan las representaciones algebraicas. Los textos plantean fórmulas para los diferentes tipos de problemas, en las que deben sustituirse los datos proporcionados y hallar la incógnita mediante razonamientos algebraicos. En menor medida aparecen sistemas de representación tabular. No se detecta tampoco el uso de representaciones gráficas de las funciones lineales e hiperbólicas, dentro de la unidad, que conecten el mundo aritmético y la modelización funcional.

Discusión e implicaciones

En el análisis realizado hemos detectado una carencia de tareas diversas, ricas y no rutinarias. Aunque se trabajan diferentes tipos de problemas alrededor de la proporcionalidad, se trata de problemas estereotipados alrededor de cada uno de los conceptos que se presentan. No se trabajan, por ejemplo, problemas de comparación. Este hecho coincide con lo observado en otros trabajos sobre libros de texto (Martínez y otros, 2014, 2015, 2017). Sería conveniente trabajar este tipo de tareas que profundizan en el significado a las operaciones entre magnitudes (qué mezcla es más dulce, qué tienda es más barata, que mezcla es más espesa, qué refresco tiene un sabor más fuerte a limón, quién trabaja más rápido...).

Así, los libros analizados trabajan los diferentes contenidos estableciendo técnicas específicas para resolver los problemas estereotipados que se proponen a partir de cada uno de ellos. Además, de entre las estrategias de resolución abunda el uso de fórmulas y de estrategias algorítmicas, como las reglas de tres simples y compuestas. Este enfoque de los libros de texto, tam-

bien indicado en otros estudios nacionales e internacionales (Shield y Dole, 2013), podría evitarse realizando un mayor esfuerzo en el trabajo significativo entre magnitudes, sin embargo, el análisis desprende un pobre tratamiento del concepto de razón que se define formalmente sin alusión a las magnitudes que la generan o a sus posibles interpretaciones y significados. Mediante propuestas de enseñanza que incidan en estos primeros conceptos clave podrían afrontarse problemas con estructuras más complejas como los de PC o los repartos proporcionales, incluso los inversos, con apenas instrucción específica (Martínez, Muñoz y Oller, 2019a, 2019b).

Otro aspecto que destacar es la detección de errores e imprecisiones. Dos de los textos utilizan argumentos de crecimiento y decrecimiento para justificar las relaciones de PD y PI. Este tipo de argumentos suponen un obstáculo en la comprensión de la proporcionalidad y promueven la adquisición de una falsa idea de linealidad (Van Dooren y otros, 2008). Además de estos argumentos, dos libros utilizan argumentos que aluden a las razones internas para justificar las relaciones proporcionales («a doble, doble», «a doble, mitad»). Como indican Gairín y Escolano (2009) y Oller (2012) es interesante basar los argumentos justificativos en la constancia de la razón externa (constante de proporcionalidad en general), en vez de la invarianza de la razón interna. Este planteamiento invita al resolutor a analizar la situación que propone el enunciado y establecer condiciones de regularidad que permitan afirmar que, en efecto, se puede suponer una relación proporcional. Por ejemplo, para que entre el precio que cobran en una tienda y el número de productos que se compran haya PD hay que suponer que todos los productos cuestan el mismo precio. Este razonamiento orienta hacia el cálculo de la razón externa de la situación para averiguar cuánto cuesta cada producto. Este tipo de caracterización de las relaciones proporcionales puede ayudar, además, a introducir posteriormente una caracterización explícitamente funcional y conectar los argumentos aritméticos con la modelización funcional. Esta conexión, como se ha observado durante el análisis, no se realiza en los libros estudiados.

Por último, destacamos las deficiencias analizadas en las caracterizaciones de las relaciones compuestas, que coinciden con lo señalado en el trabajo de Martínez y otros (2015). Una situación entre tres magnitudes en la que las parejas de magnitudes tengan una relación proporcional dos a dos puede no ser una relación de PC. Basta pensar, por ejemplo, en aumentos porcentuales encadenados, el precio inicial, el intermedio y el final son tres magnitudes directamente proporcionales dos a dos, pero no tienen una relación de PC, ya que, si fijamos el valor de una de ellas, quedan fijados los valores del resto de magnitudes.

Referencias bibliográficas

- ARICAN, M. (2018), «Preservice Middle and High School Mathematics Teachers' Strategies when Solving Proportion Problems», *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(2), 315-335.
- BURGOS, M., y J. D. GODINO (2019), «Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido», *Boletín de Educação Matemática*, 33(63), 389-410.
- FERNÁNDEZ, P., P. CABALLERO y J. A. FERNÁNDEZ (2013), «¿Yerra el niño o yerra el libro de matemáticas?», *Números*, n.º 83, 131-148.
- GAIRÍN, J. M., y R. ESCOLANO (2009), «Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional», *Suma*, n.º 62, 35-48.
- GAIRÍN, J. M., y A. M. OLLER-MARCÉN, (2012), «Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción», en A. Estepa, A. Contreras, J. P. Deulofeu y F. J. García, *Investigación en Educación Matemática XVI, SEIEM*, Jaén, 249-259.
- GONZÁLEZ, M. T. (2009), «La investigación en Historia de la Educación Matemática», *Educación y Ciencia*, 1(36), 37-58.
- GUACANEME, E. A. (2002), «Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas», *Revista EMA*, 7(1), 3-42.
- MARTÍNEZ-JUSTE, S., J. M. MUÑOZ-ESCOLANO y A. M. OLLER-MARCÉN (2014), «Tratamiento de la PC en cuatro libros de texto españoles», en M. T.

- González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII, SEIEM*, Salamanca, 435-444.
- (2015), «Un estudio comparativo sobre la PC en libros de texto españoles de Educación Secundaria Obligatoria durante la LOGSE-LOE-LOMCE», *Avances de Investigación en Educación Matemática*, n.º 8, 95-115.
- (2017), «Análisis de problemas de PC en libros de texto de 2.º de ESO», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 20(1), 95-122.
- (2019a), «Una experiencia de Investigación-Acción para la enseñanza de la proporcionalidad compuesta», *Enseñanza de las Ciencias*, 37(2), 85-106.
- (2019b), «Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de Investigación-Acción», en J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*, SEIEM, Valladolid, 413-422.
- MAZ-MACHADO, A., y L. RICO (2015), «Principios didácticos en textos españoles de Matemáticas de los siglos XVIII y XIX», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 49-76.
- OLLER-MARCÉN, A. M. (2012), *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*, Tesis doctoral, Universidad de Valladolid, Valladolid.
- OLLER-MARCÉN, A. M., y J. M. GAIRÍN (2016), «Proportionality problems in some mathematical texts prior to fourteenth century», en *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1859-1865.
- PINO, J., y L. J. BLANCO (2008), «Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad», *Publicaciones*, n.º 38, 63-88.
- RICO, L., A. MARÍN, J. L. LUPIÁÑEZ y P. GÓMEZ (2008), «Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales», *Suma*, n.º 58, 7-23.
- SCHUBRING, G. (1987), «On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author», *Learn. Math.*, 7(3), 41-51.
- SHIELD, M., y S. DOLE (2013), «Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning», *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 183-199.
- SOLAR, H., y A. ZAMORANO (2006). «Algebrización en la proporcionalidad de magnitudes», en L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, y F. J. García (eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría Antropológica de lo Didáctico*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, Jaén, 507-526.
- VALVERDE, A. G., E. CASTRO y M. MOLINA (2013), «Empleo del análisis didáctico en un experimento de enseñanza con futuros maestros de Educación Primaria», en L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación en innovación curricular*, Comares, Granada, 211-230.
- VAN DOOREN, W., D. DE BOCK, D. JANSSENS y L. VERSCHAFFEL (2008), «The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' over-use of linearity», *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 311-342.

LIBROS DE TEXTO ANALIZADOS

- GARCÍA, M., y P. ORTEGA (2016), *Matemáticas aplicadas 4.º ESO*, Luis Vives, Zaragoza.
- MIRA, R. (2016). *Matemáticas enseñanzas aplicadas 4.º ESO*, Santillana Educación, Madrid.
- VALLEJO, C., y B. FUENTES (2016), *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas 4.º ESO*, Grupo Anaya, Madrid.

Carlos Ibáñez Freire

Universidad de Zaragoza
<carlosibafre@hotmail.com>

Sergio Martínez-Juste

Universidad de Zaragoza
<sergiomj@unizar.es>