P. S. do you want to know a secret? (Lennon-McCartney)

MMACA

SUMA+ núm. 95
pp. 67-72
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2020 y aceptado en septiembre de 2020

Perdonad si dejo en su idioma original[1] la cita de estos dos importantes investigadores del siglo XX y aún más si los «secretos» que quiero susurrarte al oído son finalmente dos y no uno. Estimado compañero, querida compañera:

1. No dejes de investigar en temas de didáctica y de materiales.
2. Aprovecha los errores.

Como en una buena película de intriga, vamos a revelar por separado los dos «secretos», dejando para el final el desenlace que revele su posible relación, en el caso que os proponemos.

Investigando

Como se ha dicho en artículos anteriores, el período de confinamiento está constituyendo un preocupante parón para las actividades presenciales (exposiciones, talleres, ferias, etc.) del MMACA, pero, como somos una asociación y no una empresa, seguimos trabajando en temas de investigación didáctica y divulgación a distancia.

Como ya se señaló en un anterior artículo, entre otras iniciativas, hemos grabado vídeos caseros de actividades que se pueden hacer en casa, usando materiales comunes, de fácil acceso, como, por ejemplo, una baraja de cartas.

Uno de los retos propuesto recuperaba un material cuya autoría nadie de nosotros recuerda y que no tenía ni nombre. Lo utilizamos una o dos veces en unas ferias y lo abandonamos por no encontrarle un interés educativo específico.

La actividad es sencilla: se trata de colocar en un tablero circular de 11 celdas las fichas marcadas con números del 1 al 5, de manera que, a la distancia que marca el número, en ambas direcciones, se encuentre otra ficha.

Ejemplo. El 4 impone que en las celdas x_1 y x_2 debe haber otras dos fichas (figura 1).

Como siempre ocurre en este tipo de retos, todo el mundo empieza ensayando, corrigiendo sus errores y tomando nota de unas observaciones que, una vez organizadas, constituirán las bases para una estrategia ganadora[2].

La solución no tarda en aparecer (la rapidez es el factor que nos convenció a presentar esta actividad en una feria) y es única (factor que desaconsejaba transformarla en un módulo para una exposición y reduce su interés como propuesta para un taller) (figura 2).

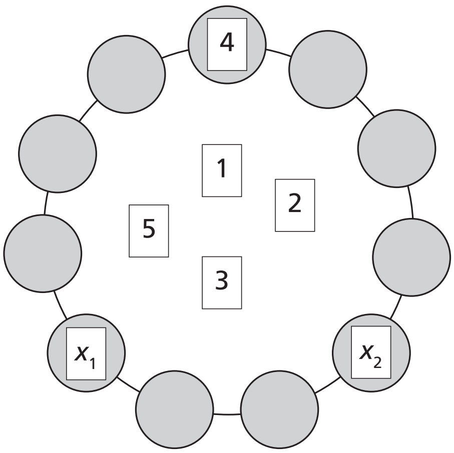

Figura 1. Ejemplo de cómo se aplica la regla valor/distancia

El desinterés que mostramos por esta actividad fue tal que muchos compañeros del MMACA desconocían por completo el reto y, cuando lo vieron en el vídeo empezaron a preguntar y a preguntarse una serie de cuestiones:

— ¿Estamos seguros que la solución es única?
— ¿Cómo se puede generalizar el problema? ¿Más números? ¿Más celdas?
— Modificando el reto, ¿siempre habrá solución única?
— ¿Se puede invertir la regla (modalidad *Reverse*)? Es decir, a la distancia marcada por cada número corresponden celdas vacías (figura 3).
— ¿Existe un algoritmo que permita establecer, para un determinado número de celdas:
  - cuántos números (mínimo o máximo) se pueden colocar,
  - si hay solución única o más soluciones?

Lógicamente, en un grupo constituido en torno al interés para las matemáticas, la empresa que más motivó fue la que nombramos: *La Caza del Algoritmo* y que ha producido investigación y discusiones que se han condensado en una comunicación preparada para el si-

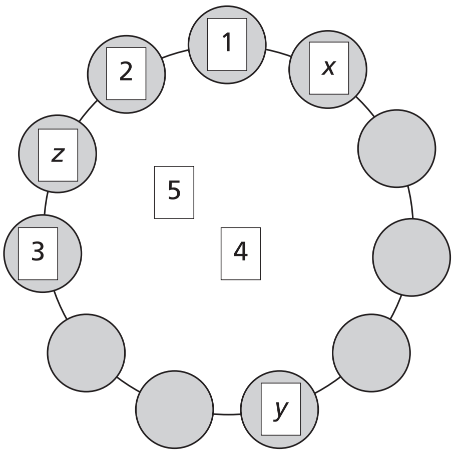

Figura 2

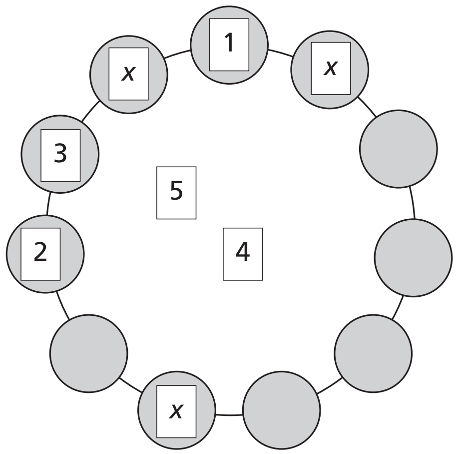

Figura 3. Ejemplo en modalidad *Reverse*

guiente encuentro del Gathering For Gardner Europe (G4GE), cuando el fin de la pandemia lo permita.

Debemos confesar que, hasta ahora, no hemos encontrado la más mínima huella de patrones y menos aún un algoritmo, ni tan siquiera utilizando instrumentos algo más sofisticados que ir intentándolo a mano (*The on-line Encyclopedia of Integer Sequencies* <https://oeis.org/A045751>).

Pero, la caza sigue abierta y todo cazador —desarmado— está invitado a participar. Como dice el poeta[3], aun cuando la meta final esté perdida entre nieblas, en el último confín del mar Océano o quizás porque, a estas alturas, estamos entrenados a lidiar con las dificultades de llegar a nuestras Ítacas personales o colectivas, el viaje no dejó de ser interesante y sorprendente, y el equipaje de lo más motivado y divertido (figura 4).

Aquí tenéis algunas de las observaciones que realizamos:

— Contrariamente a lo que puede parecer lógico, introducir más números sin aumentar las celdas del tablero hace que el reto sea más fácil, hasta llegar a ser trivial. De hecho, decidimos imponernos la condición de que por lo menos una celda debía estar vacía[4] (figura 5).

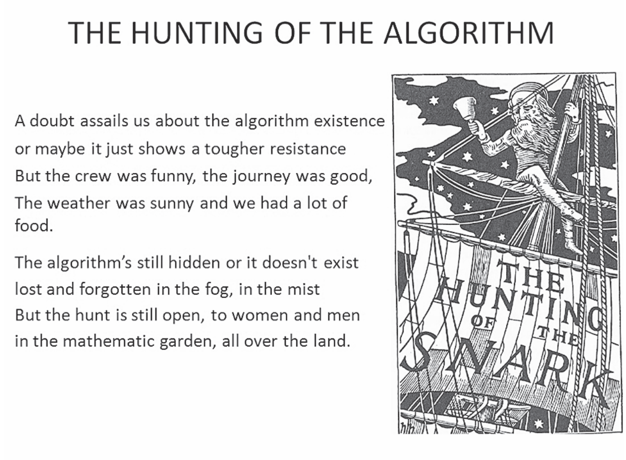

Figura 4. Adaptación de The Hunting of the Snark, de Lewis Carroll (1874-76). Dibujo original de Henry Holiday

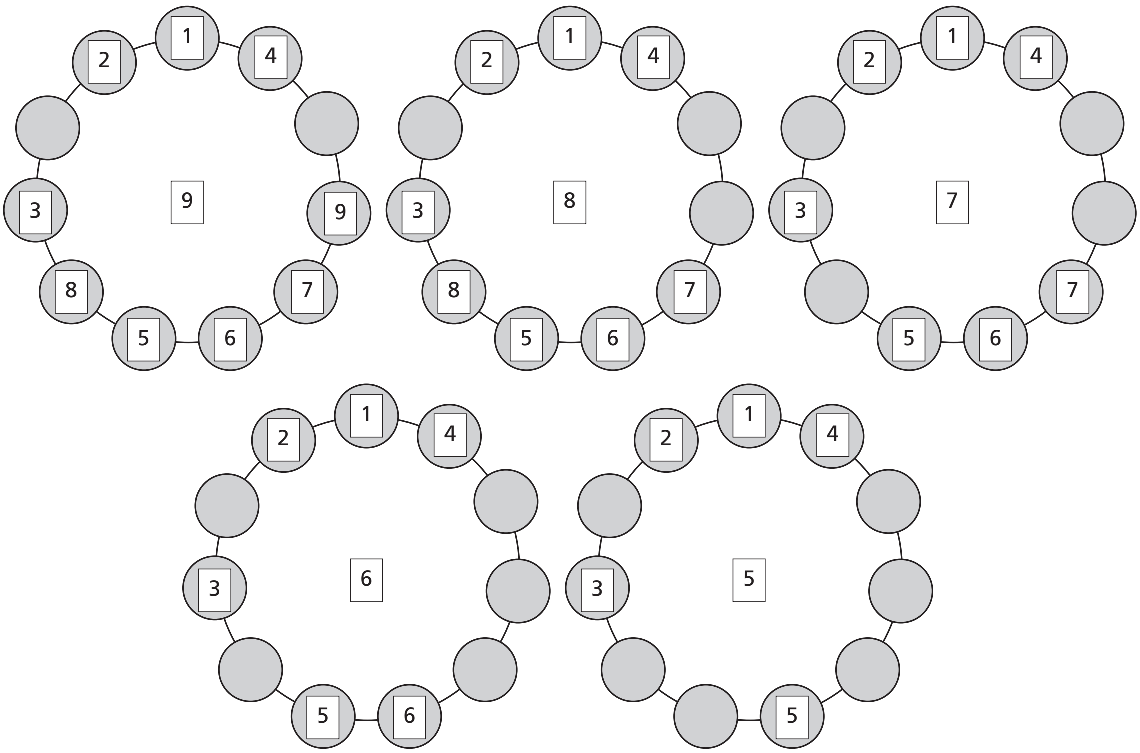

Figura 5. Posibles soluciones del tablero de 11 celdas, modalidad *Original*, variando el número de fichas por colocar

Además, a más números, más soluciones diferentes posibles[5] (figura 5) (tabla 1).

— Siempre en el intento de encontrar un patrón que nos orientara en la búsqueda del algoritmo, asumimos la «técnica del vaciado»: empezando con los tableros casi llenos —manteníamos la condición de que hubiera por lo menos una celda vacía— buscábamos entonces, por reducción progresiva, llegar al número mínimo de fichas que se podían colocar en un tablero de *x* celdas (tabla 2).

— En el caso de investigar la opción *Reverse*, deberíamos al contrario buscar el número máximo de fichas que se pueden poner en los diversos tableros (tabla 3).

— Finalmente, a falta de concluir la caza del algoritmo, nos quedamos con:

- La versión original del juego (11 celdas y 5 números): interesante *para ferias*, ennoblecida ahora por nuestra investigación, que nos permite, con el mismo material, proponer la actividad con modalidad *Reverse* (2 soluciones); nos queda también la posibilidad de incrementar ligeramente la dificultad del reto ofreciendo un formato con 15 celdas y 7 números, también con solución única.
- Una versión con 13 celdas y 6 números que se presta para un *módulo de* exposición, ya que tiene 2 soluciones y todo visitante se va a encontrar con un reto siempre disponible. En modalidad *Reverse* existen 8 diferentes soluciones; es una opción que se puede ofrecer a un grupo muy interesado en la actividad y dispuesto a dedicar un tiempo para enfrentarse a este desafío. Otro módulo para unos usuarios más jóvenes podría tener el formato con 8 celdas y 5 números, que ofrece también 2 soluciones.
- Hay versiones del juego que ofrecen un número de soluciones suficientemente alto para ser recogidas y organizadas y así componer una especie de *colección*[6], sin que se tarde una eternidad y nos gane el aburrimiento (tablas 4 y 5). Quizás se pueda proponer como actividad de clase.[7]

— Se nos olvidaba que la actividad tiene ahora un nombre: *Números vecinos*.

Tablero de 11 celdas						
Fichas	5	6	7	8	9	10
Soluciones	1	2	32	840	14992	220096

Tabla 1

Celdas	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Mínimo	4	4	5	5	6	6	5	6	6	7	7	8	8	9	8	9	8	9	9

Tabla 2

Celdas	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Máximo	3	3	4	4	4	5	6	7	8	9	10

Tabla 3

Modalidad: *Original*									
Celdas	10	11	12	13	15	16	21	22	23
Números	6	7	7	7	8	8	9	9	9
Soluciones	10	32	22	14	32	68	14	40	16

Tabla 4

Modalidad: *Reverse*								
Celdas	11	12	12	13	14	15	16	17
Números	4	5	6	6	8	8	10	10
Soluciones	15	28	33	42	14	32	20	36

Tabla 5

Aprovechando los errores

Desde la primera exposición en Alella, en el año 2007, siempre hemos presentado algunos retos de cálculo[8]. Entre ellos, uno que nos gustó enseguida, porque se alejaba del formato más tradicional[9], es el titulado: *Diferencias*. Se trata de colocar en fila los números del 1 al 6 de manera que la diferencia entre dos números vecinos sea igual o mayor que 3 (figura 6).

Todo el mundo empieza con unos intentos más o menos razonados, para enseguida reflexionar y elaborar una estrategia que permita resolver rápidamente el reto.

Esta actividad se escogió también para formar parte de las maletas didácticas del MMACA y además la llevamos a una edición de la MathWeek en Irlanda y la presentamos también en una sesión de formación del profesorado en Dublín.

La situación era por sí sola algo crítica: sugerir, en inglés, unas actividades a unas compañeras[10] que no sabemos cómo desarrollan su currículo es, en el mejor de los casos, una misión que pueden aceptar solo unos inconscientes de nuestro calibre.

Para adornar, nos dimos cuenta que el texto del tablero tenía un error: hablaba de colocar ¡7 números y no 6!

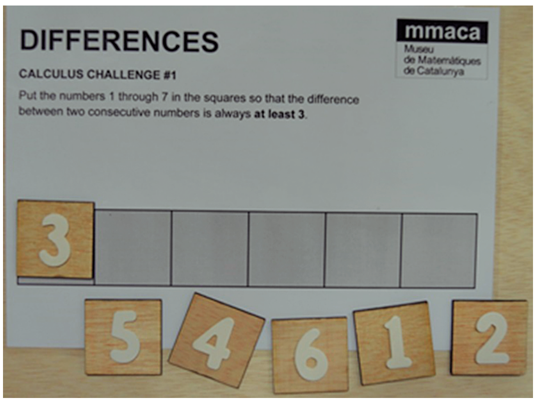

Figura 6. Prototipo del reto *Diferencias*, con el error en el texto, que llevamos a la MathWeek

La primera reacción fue excusarnos: «Ya saben, son cosas que pasan allí abajo, al lado del Mediterráneo». En todo caso, como solo les habíamos dado fichas con 6 números, no había posibilidad de equivocarse. Pero, ¿cómo nos las arreglamos después?

Lo más sencillo era corregir el 7 y transformarlo en 6, pero, ¿qué pasaría si aceptáramos el desafío venido del azar y añadiéramos una ficha con el número 7[11]? ¿Complicaría demasiado el reto?

Otra vez, como pasó con los *Números Vecinos,* aumentar la cantidad de variables no significa aumentar la dificultad o el interés del reto. Al contrario: el reto se hace demasiado fácil, se multiplican las soluciones correctas y se enmudece la discusión[12] y, con ella, la reflexión.

Se nos ofrecen dos alternativas: volver al reto original o cambiar la regla y aumentar la diferencia mínima (d) de 3 a 4 (tabla 6).

O sea, no es posible colocar ningún número al lado del 4 que cumpla la condición puesta ($d \geq 4$). Para poder resolver el reto es necesario añadir entonces otra ficha, la que lleva el número 8. En los extremos de la serie irán ahora el 4 y el 5, restableciendo la situación inicial: misma estrategia y solución única.

Podríamos seguir así (hasta el 10, $d \geq 5$, hasta el 12, $d \geq 6$…) sin que la cosa tenga demasiado sentido en su formato de módulo, ya que la estrategia se repite igual. Quizás pueda ser una actividad suficientemente interesante para un taller (¿Se va a mantener la regularidad de que hay solución única solo para un con-

Números	1	2	3	4	5	6	7
Vecinos	5, 6, 7	6, 7	7	¿?	1	1, 2	1, 2, 3

Tabla 6

junto par de números y que la diferencia mínima entre números adyacentes sea su mitad?)[13].

En todo caso, no ha sido sino después de investigar los *Números Vecinos* que encontramos la solución más bonita para introducir elegantemente el número 7: transformar la colocación lineal de los números ¡en un círculo!

Obviamente, virtuoso.

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya, Cornellá de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

1 «P.S. Do you want to know a secret? Do you promise not to tell... Closer, let me whisper in your ears, say the words you want to hear...», de Lennon-McCartney, *P.S. Do you want to know a secret?* (1963).

2 Rápidamente se llega a la conclusión que conviene empezar colocando el 1 y seguir de manera ordenada con el 2 y el 3, intentando aprovechar al máximo las celdas ya ocupada por los números anteriormente colocados. Al momento de colocar el 4 o el 5, en las celdas x o y, será casi inmediato constatar que solo una de las dos opciones consigue satisfacer las condiciones que dicta el reto.

3 Adaptación de *The Hunting of the Snark,* de Lewis Carroll (1874-76). Dibujo original de Henry Holiday.

Traducción (algo) libre: Una duda nos coge: ¡El algoritmo no existe! // O puede que solo con furor se resiste // Pero la compañía es divertida, el viaje agradable // el tiempo acompaña y la comida es impecable. // El algoritmo no existe, o sigue escondido // en la niebla más densa, olvidado y perdido. // Pero la caza sigue abierta para hombres y mujeres // allá donde las mates levantan pasiones.

4 Más adelante, caímos en la cuenta de cuan interesante sería ofrecer una actividad de feria para familias con niños muy pequeños, presentando un tablero de, pongamos, 7 celdas con 7 números para colocar. Cualquier distribución sería una correcta respuesta al reto, dando la sensación de que estamos delante de un súper-talento matemático. ¡Hasta operando a ciegas! con las fichas tapadas. ¿Qué decir? Todo lo que sirva para incrementar la autoestima de los niños, para hacerles perder el miedo a las mates y para que las familias participen la evolución de sus hijos, trabajando a su lado, nos parece sumamente positivo.

5 A partir de aquí, los datos se obtuvieron a través de un programa de ordenador, elaborado por nuestro compañero Carlos Luna.

6 Un poco en la línea de las «colecciones participativas» que los museos montan con la complicidad de los usuarios, que serán los que, de manera virtual o presencial, harán después de facilitadores. Es un formato que se presta muy bien para una actividad virtual a distancia.

7 Hablando con Antonio Pérez sobre cuadrados mágicos, nos contó cómo los alumnos de una de sus clases se habían apasionado con este tema e iban construyendo cuadrados cada vez más grandes, ¡de más de 20x20! De esto hace muchos años y no nos atreveríamos, ni ahora ni entonces, a apostar sobre el éxito de nuestra propuesta coleccionista, que, además, no tiene ni una pizca de significatividad, menos competencias y una recompensa muy discutible. Es tan poco didáctica que… se parece a un juego y esta es la única calidad que puede hacerla interesante a los ojos de unos adolescentes. ¡Mayores sorpresas nos reserva cada día nuestro trabajo!

8 Escogidos y adaptados entre las decenas de retos elaborados por Ignasi del Blanco.

9 De hecho, no todo el mundo entendía de entrada qué debía hacer y esta pizca de dificultad genera la discusión entre los usuarios que representa uno de los principales objetivos de toda propuesta del MMACA.

10 Solo había un hombre. Era sábado por la mañana.

11 «Considerate la vostra semenza: Fatti non foste a viver come bruti, Ma per seguir virtude et canoscenza», Dante Alighieri, *La Divina Commedia, Inferno,* Canto XXVI, v. 119 (1304-08).

12 Si se organizan los números, podemos mirar para cada uno de ellos, cuántos y cuáles otros números cumplen con la condición del problema: diferencia igual o mayor que 3:

Números	1	2	3	4	5	6
Vecinos	4, 5, 6	5, 6	6	1	1,2	1, 2, 3

Y como el 3 y el 4 pueden tener solo otro número cerca, uno empezará y el otro acabará la serie: 3, 6, 2, 5, 1, 4; y la simétrica: 4, 1, 5, 2, 6, 3.

Es fácil ver que, sin cambiar nada, el 7 se puede incluir al principio o al final de la serie. Hecho esto, resulta que puede empezar el baile de las permutaciones y cualquiera de los números puede encabezar la serie.

13 Hipótesis: para $2n$ números y $d \geq n$: solución única;
para $2n+1$ números y $d \geq n$: varias soluciones (¿cuántas?);
para $2n+1$ números y $d \geq n+1$: sin solución.