Invención de problemas y creatividad

Iván Valero Terrón

SUMA+ núm. 95
pp. 87-94
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2020 y aceptado en septiembre de 2020

Actualmente existe una gran sensibilidad social para atender a la diversidad en las aulas mediante una respuesta educativa de calidad que garantice el aprendizaje de los alumnos según sus diferencias individuales.

Estas diferencias no solo se refieren a las relacionadas con aquellos alumnos más desfavorecidos social y culturalmente, sino también a las que caracterizan a aquellos con altas capacidades intelectuales.

Esta sesión está orientada a motivar que los estudiantes desarrollen un proyecto, en este caso, inventar y explicar su propio problema.

El diseño de la sesión proviene de mi experiencia personal, tanto como antiguo alumno de ESTALMAT como en la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas «Thales» proponiendo problemas de olimpiadas, tanto de primaria como de secundaria.

Desarrollo de la sesión

Esta sesión se imparte a un grupo de alumnos egresados del proyecto ESTALMAT Andalucía Oriental, y para su elaboración han participado algunos profesores del proyecto.

Como bien se ha comentado, el objetivo principal de la sesión es facilitar al alumnado diferentes tipos de herramientas para la creación de problemas de forma que consoliden los conocimientos matemáticos adquiridos y que, de este modo desarrollen su creatividad matemática.

Un aspecto a destacar es por qué se ha tomado esta temática para la realización de la sesión. Si bien hay muchas sesiones sobre estrategias de resolución de problemas, no hay tantas sobre invención. Así, se ha considerado oportuno que los alumnos reciban unos contenidos mínimos en este campo.

Ayllón y Castro (2002) afirman:

> El sujeto que inventa un problema ha de utilizar distintos conceptos matemáticos que, a veces, ha construido aisladamente y es posible que en momentos distintos de su vida escolar. Si los problemas que los sujetos inventan no se reducen a meros ejercicios de aplicación de un concepto, necesitará relacionar conceptos para poder llegar a la solución del problema planteado. Además, se incrementará su habilidad para aplicar los conceptos matemáticos y aprenderán a utilizar una variedad de estrategias para llegar a la solución de los problemas (p. 114).

Dado que el proyecto ESTALMAT fomenta la participación activa en sus sesiones, las actividades planteadas serán de forma parcial de debate y reflexión. Este grupo de veteranos está cursando estudios de bachillerato en su mayoría y debido a la gran carga lectiva de esta etapa, las sesiones de ESTALMAT se reducen a una al mes.

En este artículo, describiremos tanto las tareas propuestas como el desarrollo de la sesión impartida.

La sesión forma parte de un conjunto de sesiones denominado «Planificación de Proyectos», que alterna esta sesión con una sesión de matemática electoral con el objetivo de dar a conocer el proyecto a personas ajenas al mismo, presentando dichos proyectos a diferentes actividades como la *Noche Europea de los Investigadores*, el *Día de puertas abiertas del Parque de las Ciencias de Granada* o el concurso *Ciencia en Acción*.

Comienza la sesión explicando a los alumnos un proyecto que se está llevando a cabo: el proyecto ESTALMAT 3.14, en el que los alumnos deben realizar un vídeo de cómo máximo 3:14 minutos en el que desarrollen y expliquen algunas cuestiones vistas en ESTALMAT. Se anima a que los alumnos usen los conocimientos que aprendieran en dicha sesión para realizar el vídeo. Se puede entrar en el canal de YouTube de ESTALMAT 3.14 escaneando el código QR de la figura 1.

REVISANDO EL MÉTODO DE PÓLYA

En primer lugar, debido a la necesidad de que los alumnos sepan diferenciar un ejercicio y un problema y que comprendan cuáles son las bondades de resolver un buen problema, se les presenta las fases del método de Pólya (Pólya, 1984) para resolver problemas que conocen de sesiones anteriores (figura 2).

A continuación, se les plantea las siguientes preguntas:

— ¿Creéis que falta alguna etapa en el método de Pólya?
— ¿Dónde la incluiríais?

Surge así un pequeño debate en el que se concluye que el primer paso para resolver un problema es interesarse en él. Posteriormente se realiza un pequeño debate en el que preguntaremos al alumnado si todos los problemas que se nos plantean nos producen in-

Figura 1. Código QR del canal ESTALMAT 3.14

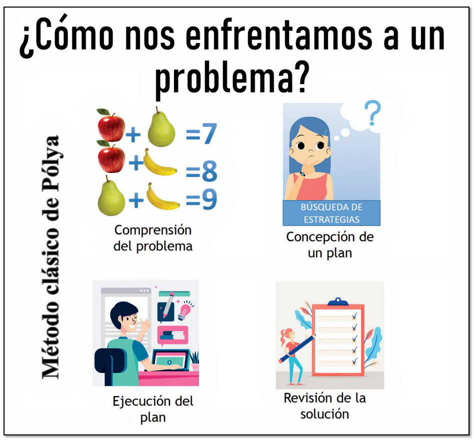

Figura 2. Método de Pólya (Imágenes Freepik.com)

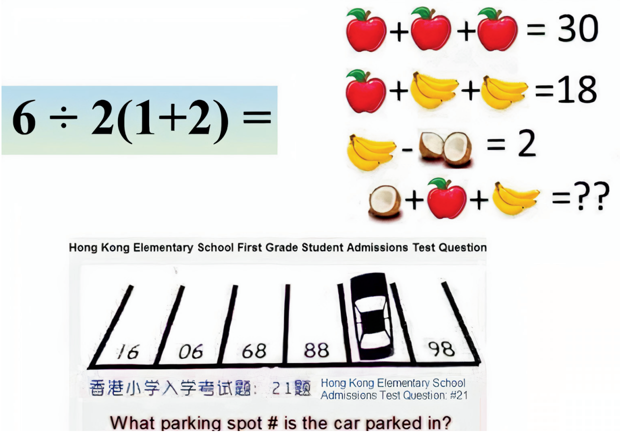

Figura 3. Problemas «virales»

terés. Se inicia así la primera tarea de la sesión: establecer una discusión en qué es y qué no es un problema. Así, se propone al alumnado analizar algunos problemas matemáticos que se han hecho virales a causa de las redes sociales (figura 3).

Se plantea una nueva puesta en común sobre estos problemas virales en torno a qué los hace buenos problemas matemáticos, si es que estos problemas lo son. El alumnado responde que los problemas de la parte superior no los consideran buenos problemas, al estar carentes de valor real (operación combinada) y al tratar de engañar al lector con los dibujos (sumas simbólicas). En la siguiente tarea, se propone al alumnado un problema extraído de una olimpiada matemática en la que, debido a su enunciado, las posibilidades de resolución son amplias.

TAREA 1

Nos piden el siguiente término de esta sucesión. Razonad, de varias formas distintas, al menos 3 soluciones distintas.
5, 10, 19, 32, 51,...

Los alumnos razonan algunas propuestas interesantes:

> El siguiente término es 117, porque es una sucesión en la que cada término (a partir del sexto) es la suma de los cinco anteriores.

> El siguiente término es 5 porque es una sucesión cíclica que los elementos se repiten cada cinco términos.

Incluso podríamos razonar que el siguiente término es 80 porque es la sucesión de término general:

$$a_n = \frac{n^4}{12} - \frac{5n^3}{6} + \frac{59n^2}{12} - \frac{31n}{6} + 6$$

Queda para otra sesión de veteranos cómo el profesor ha llegado a esta fórmula (interpolación lagrangiana).

Tras este pequeño debate inicial se comenta que todo el talento matemático del que disponen los alumnos puede utilizarse para fomentar el talento de otros alumnos, y se les indica que no todo problema puede hacer que un lector se interese por él, cuestión que previamente se había consensuado que era fundamental.

A continuación, se les pregunta a los alumnos qué características creen que deben tener los problemas para ser atractivos al gran público. Aparecen respuestas tales como «tiene que ser entendible por todo el mundo o no tiene que ser muy difícil». Se exponen las características que hacen a un problema «rico», según González, Llorente y Ruiz (2015):

- Supone un reto adecuado a las capacidades de quien intenta resolverlo.
- Atrae por sí mismo, aunque no tenga utilidad.
- No ha de plantear un bloqueo inicial a la persona que lo intente resolver.
- Proporciona satisfacción al intentar resolverlo.
- Hace nacer el deseo, en quien intenta resolverlo, de proponerlo a los demás.

PRIMEROS PASOS EN LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS

Seguidamente, se expone a los alumnos la primera estrategia para inventar un problema: adaptar uno existente. Esta táctica no entraña dificultad, ya que solo requiere de la habilidad de modificar ciertas variables para encontrar el problema que nos interese.

Como ejemplo, se les presenta las *poliformas*, cuyos dos ejemplos arquetípicos han sido estudiados en sesiones de ESTALMAT: Los *pentominós* y los *hexamantes*. La construcción de todas las figuras ha sido altamente extendida y se les indica la posibilidad de hacerlo con otras figuras. En este caso, se considerarán los *polihex*, figuras que se obtienen al yuxtaponer hexágonos regulares.

Haciendo una pequeña investigación, se concluye que existen 22 *pentahex*, cuya obtención es difícil para un problema de competición, por lo que el problema a modificar es la obtención de los tetrahex (4 hexágonos). El problema se plantea tal como muestra la figura 4.

Como curiosidad matemática, el número de *polyhex* crece mucho más que el de *poliamantes* (unión de triángulos) y *poliminós* (unión de cuadrados). En esta tabla se puede ver la comparación:

n	1	2	3	4	5	6
n-amantes	1	1	1	3	4	12
n-minós	1	1	2	5	12	35
n-hex	1	1	3	7	22	82

TAREA 2

Este es el enunciado del famoso problema llamado *Las Torres de Hanoi:*
Tenemos tres varillas y 7 discos, cada uno de un tamaño diferente, como indica la figura. Al principio, todos los discos están en la primera varilla, en orden de tamaño decreciente de la parte inferior a la superior. El objetivo es pasar los siete discos de la primera a la última varilla obedeciendo dos reglas:

1. Solamente se puede mover un disco a la vez.
2. Ningún disco puede estar encima de un disco más pequeño.

Describe el proceso para llevar a cabo la tarea.
Modifica y adapta este enunciado para que un alumno de 6.º de primaria pueda resolverlo.

Posteriormente, se propone a los alumnos que planteen una modificación del conocido problema de las Torres de Hanoi (tarea 2). Aparecen algunas conclusiones bastante claras: hay que modificar el lenguaje con el que está escrito el problema, así como reducir el número de discos que hay que mover en las varillas. Como curiosidad, una alumna propone el mismo enunciado que tienen preparado los profesores, y que está extraído del videojuego *El profesor Layton y la caja de Pandora*.

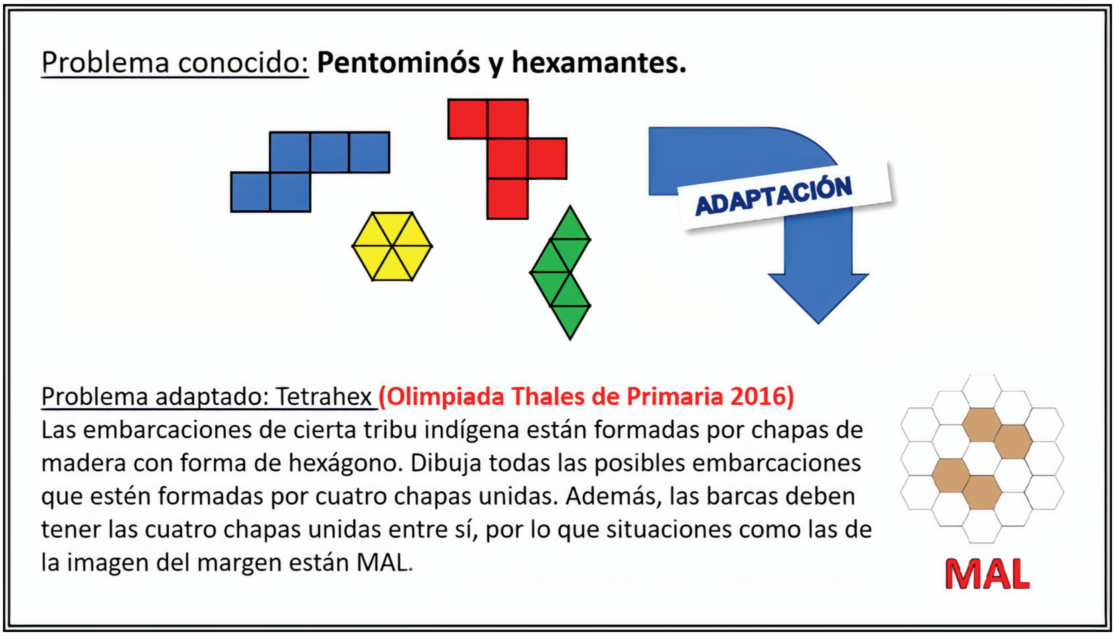

Figura 4

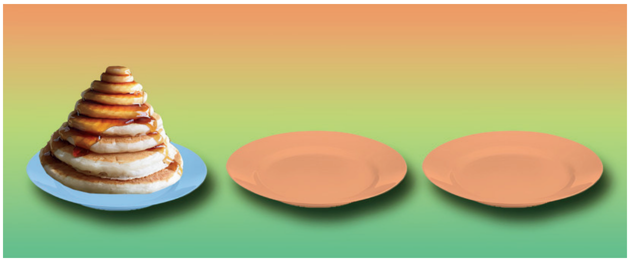

Figura 5. Adaptación de las Torres de Hanoi

El objetivo es mover esta pila de tortitas del plato azul de la izquierda al plato rojo de la derecha. Sin embargo, tienes que seguir estas normas:

1. Solo puedes mover las tortitas de una en una.
2. No puedes dejar una tortita sobre otra que sea más pequeña.

¿Cómo puedes hacerlo?

Recordemos que para n discos el número mínimo de movimientos es 2^n-1, así que podemos también controlar la dificultad del problema adaptado a nuestro alumnado. Otra adaptación podría ser añadir varillas, añadir condiciones que hagan más difíciles los movimientos, varios discos iguales…

PROBLEMAS A PARTIR DE SOLUCIONES

La siguiente estrategia de creación de problemas es la de imaginar un enunciado a partir de una solución. Así, se les plantea como ejemplo, la existencia de un número que cumpla unas determinadas condiciones.

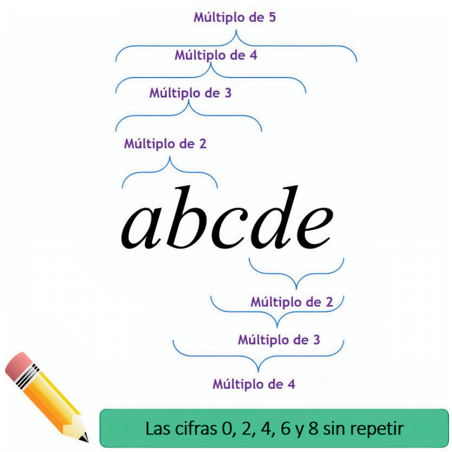

Figura 6. Condiciones del número

<u>Solución:</u> **Número misterioso.**

<u>Problema adaptado:</u> **La contraseña polidivisible.**

Evarís Galuá es un poco descuidado y olvidadizo. No recuerda su contraseña de desbloqueo del móvil, que consta de las cinco cifras pares (0, 2, 4, 6 y 8) sin repetir, pero en cambio recuerda propiedades matemáticas del número: sus dos primeras cifras forman un múltiplo de 2, sus tres primeras un múltiplo de 2 y sus cuatro primeras, un múltiplo de 4. Pero no sólo eso, sino que sus dos últimas cifras forman un múltiplo de 2, sus tres últimas un múltiplo de 2 y sus cuatro últimas cifras, un múltiplo de 4. Además, la contraseña es un múltiplo de 5. Evarís <u>dispone de 3 intentos para introducir la contraseña</u>. En caso contrario, el móvil se bloqueará para siempre. ¿Podrá Evarís acceder al móvil?

* La condición subrayada es la que hemos incluido porque el problema tiene dos soluciones.

Figura 7

> Encuéntrese un número compuesto por las cinco cifras pares sin repetir que sea múltiplo de 5 de forma que sus dos primeras cifras formen un múltiplo de 2, sus tres primeras un múltiplo de 3 y sus cuatro primeras, un múltiplo de 4. Además, el número ha de verificar que sus dos últimas cifras formen un múltiplo de 2, sus tres últimas un múltiplo de 3 y sus cuatro últimas cifras, un múltiplo de 4.

Al ponernos a resolver la situación vemos que existen dos números que cumplan dichas condiciones, por lo que nuestro problema deberá incluir dicha propiedad (figura 7).

A continuación, se propone a los alumnos una tarea en la que van a tener que inventar problemas a partir de la solución de otros alumnos (tarea 3).

Tras la explicación, se divide a la clase en grupos de 3-4 personas. Tras inventar el problema, los grupos intercambian las soluciones para intentar reconstruir el problema original. Pocos son los grupos que consiguen averiguar el problema primitivo, aunque hay grupos que consiguen hallar problemas con la solución dada. Unos detalles que merecen ser destacados son:

- Varios grupos intercambian soluciones que no van acompañadas de unidades, por lo que el problema original es más difícil de construir. Surge así el recordatorio de acompañar las soluciones con las unidades correspondientes.
- Algunos problemas no tienen sentido real. Por ejemplo: *Isa ha comprado 2 657 jamones ibéricos y 2 morcillas. ¿Cuánto le ha costado la compra? Solución: 292 278 €.* Evidentemente, el grupo correspondiente en descubrir el problema primigenio no da con él, haciendo que se recuerde que un buen problema ha de tener datos que se correspondan con la realidad.
- Un grupo añade datos adicionales que no aparecen en los datos del problema, de lo que surge el recordatorio de que todos y cada uno de los datos del problema han de aparecer en él.

TAREA 3

Con los datos dados, inventad un problema y resolvedlo. Después, intercambiad con vuestros compañeros las soluciones y buscad un problema que se resuelva con esa solución.

¿Es el mismo problema? Discutid el resultado.

Carnicería María. Lista de precios.

Jamón ibérico de bellota: 110 €
Paleta ibérica de bellota: 40 €
Caña de lomo: 5,5 €
Salchichón ibérico: 5 €
Chorizo ibérico: 4,5€
Morcilla ibérica: 4 €
Lote de embutidos: 15€

PROBLEMAS A PARTIR DE CONTENIDOS

Seguidamente se explica a los alumnos otra estrategia de creación de situaciones: *enunciados a partir de contenidos.* Como ejemplo, se les explica el concepto de epicicloide, que es la curva generada por la trayectoria de un punto perteneciente a una circunferencia que rueda, sin deslizamiento, por el exterior de otra circunferencia.

Así, se pide al alumnado que piensen qué forma tendría una *cardioide* (que ocurre cuando ambas circunferencias son iguales) o una *nefroide* (cuando una circunferencia tiene el doble del radio de la otra). Se pregunta a los alumnos si se les ocurre cómo adaptar este concepto para construir un problema, o si hay alguna forma de adaptarlo. Como ejemplo, se proporciona el siguiente, extraído de la XXXIII Olimpiada Matemática «Thales» (figura 8).

Si comenzamos a resolver este problema vemos que tiene una dificultad justa para un problema de competición de 2.º de ESO: pone en juego un tipo de orientación espacial que no es trivial y en el cálculo intervienen varios procesos interesantes (teorema de Pitágoras, descomposición de figuras para el cálculo del área…).

Así, se les explica que una simple idea de un concepto puede ser desarrollada para obtener un problema. Conociendo los conceptos en profundidad podemos obtener problemas que sean interesantes de resolver. Seguidamente se les propone a los alumnos que planteen problemas cuyos conceptos han sido tratados en las sesiones previas de ESTALMAT de simetrías y de teoría de grafos.

TAREA 4

a) Inventad un problema que involucre los movimientos del plano (simetrías, giros…)
b) Inventad un problema que involucre grafos de Euler.

EL PROYECTO: ESTALMAT 3.14

Para terminar la sesión se realiza una puesta en común a los alumnos de todas las estrategias que han sido vistas en la sesión para llevar a cabo una tarea de más alto nivel: la realización de un vídeo de máximo 3:14 minutos en el que expliquen un problema que previamente hayan inventado (tarea 5).

TAREA 5

Propón un problema cuyo enunciado y solución pueda explicarse en menos de 3:14 minutos.

Este problema lo podéis utilizar para el Proyecto Estalmat 3.14.

En este caso, el proyecto derivó a no únicamente inventar un problema, si no que explicarían resoluciones de problemas conocidos o contenidos de las sesiones de ESTALMAT. Se pueden consultar los vídeos en <https://thales.cica.es/estalmat/oriental/?q=node/169>.

El alumnado preparó más de 20 vídeos que fueron subidos posteriormente al canal de YouTube del proyecto. El alumnado, junto a antiguos alumnos de la Asociación Amproes (Amigos del Proyecto Estalmat), preparó el proyecto para participar en la XXI edición del concurso *Ciencia en Acción*, en su modalidad no presencial de 2020, en la que ganó el primer premio en la modalidad *Laboratorio de Matemáticas*, por «la calidad de los vídeos, la originalidad y el esfuerzo encomiable de realización».

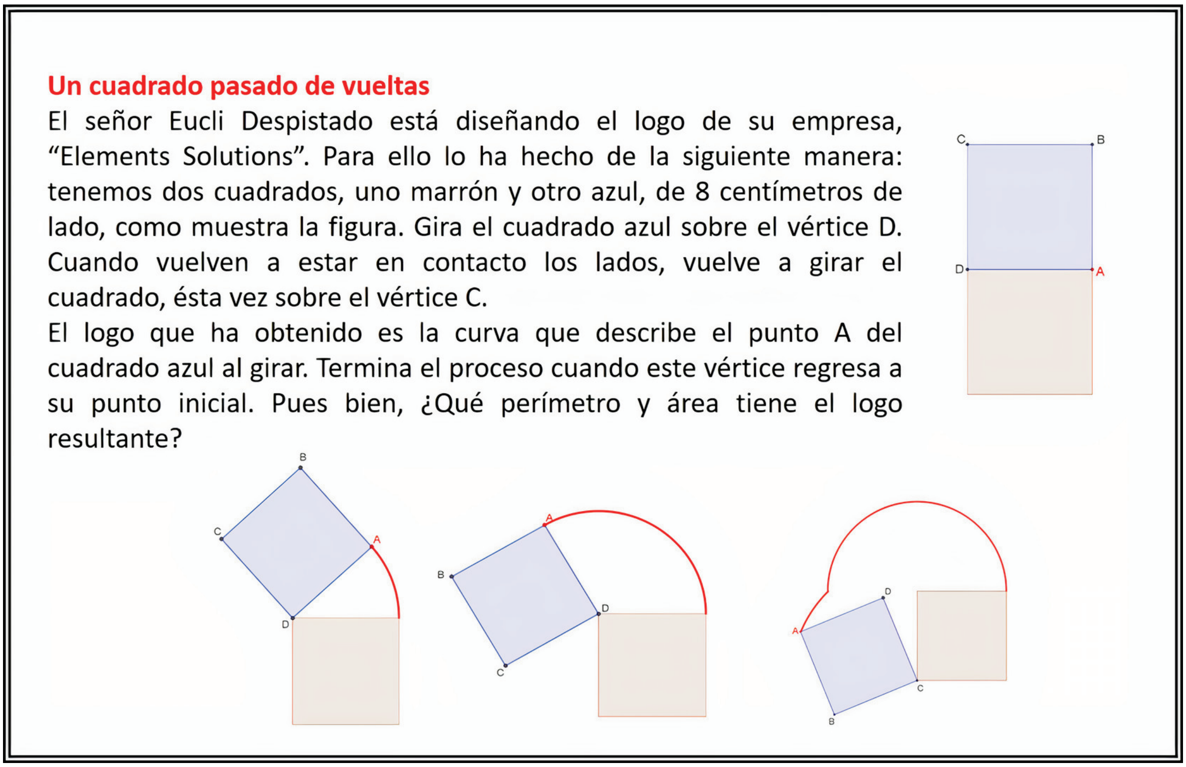

Figura 8

Referencias bibliográficas

AYLLÓN, M. F., y E. CASTRO (2002), «Invención de problemas por profesores de primaria en formación», *Jornadas: Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de Problemas*, 139-145.

PÓLYA, G. (1984), *Como plantear y resolver problemas*, Trillas, Medellín.

GONZÁLEZ, C., J. LLORENTE y M. RUIZ (2015), *Matemáticas I, 1º Bachillerato (LOMCE),* Editex, Madrid.

Figura 9. Presentación virtual de Estalmat 3.14

Iván Valero Terrón
IES Virgen del Rosario, Benacazón (Sevilla)
<ivanvaleroterron@gmail.com>