Trigonometría en el Renacimiento europeo. Un recurso de aula

Carlos Dorce Polo

SUMA+ núm. 96
pp. 21-31
Artículo recibido en *Suma* en abril de 2019 y aceptado en septiembre de 2020

En el siglo XVI, el italiano Niccolò Tartaglia y el inglés Leonard Digges publicaron tratados trigonométricos en los que medían alturas y longitudes con métodos que actualmente se incluyen en todos currículos de secundaria. Estas cuestiones se planteaban de manera efectiva a partir de la experiencia que militares, ingenieros y agrimensores tenían para resolver matemáticamente sus problemas cotidianos. Esta es una propuesta de cómo la introducción de la historia de las matemáticas en las aulas puede ser determinante para conseguir que esta asignatura interese y motive al alumnado del siglo XXI.

Palabras clave: Historia de las matemáticas, Innovación pedagógica, Enseñanza de las matemáticas, Niccolò Tartaglia, Leonard Digges.

Trigonometry in the european Reinassance. A classroom resource // In the 16th century, Niccolò Tartaglia in Italy and Leonard Digges in England published trigonometric treatises in which they measured heights and lengths with methods that are now included in all secondary school curricula. These questions were based on the experience that military men, engineers and surveyors had in solving their everyday problems mathematically. This paper is a proposal of how the introduction of the History of Mathematics in the classroom can be decisive in ensuring 21st century students to be motivated and interested in Mathematics.

Keywords: History of Mathematics, Pedagogical innovation, Mathematics teaching, Niccolò Tartaglia, Leonard Digges.

En el Renacimiento europeo, la trigonometría fue objeto de un desarrollo considerable gracias, sobre todo, a la obra *De triangulis omnimodis* de Johannes Müller (1436-1476), también conocido como Regiomontano, que se publicó póstumamente en 1533. Durante la Edad Media, la trigonometría había sido muy estudiada por los matemáticos musulmanes en obras de personajes de la talla de Abū'l-Wafā' al-Būẕŷānī (940-998), Abū al-Rayḥām al-Bīrūnī (973-1048), Ibn Muᶜādh al-Ŷayyānī (989-1079) y Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (1201-1274), entre otros muchos, elevaron esta disciplina más allá del punto en la que dejaron los griegos Hiparco de Rodas(s. II a. C.), Teodosio de Bitinia (s. I a. C.), Menelao de Alejandría (s. I a.C.) o Claudio Ptolomeo (s. II d. C.) (Van Brummelen, 2009). Posiblemente, a través del *De triangulis omnimodis*, la tradición trigonométrica árabe basada en las *Tablas de Toledo* llegó a Europa Occidental (Lorch, 1971) y, a partir de aquí, cada vez fueron más los matemáticos que la utilizaron para medir el mundo que los rodeaba. Johann Werner

(1468–1522), por ejemplo, siguiendo los pasos de Regiomontano escribió un *De triangulis sphaericis* que, pese a que no fue publicado hasta 1907, significó una de las obras de trigonometría esférica más importantes escritas hasta el momento. De hecho, es en esta obra donde nos empezamos a encontrar con las fórmulas de la prostaféresis que permitían evitar los largos cálculos derivados de productos de números de muchos decimales:

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$$

Pese a que Paul Wittich (c.1545–1586) y Tycho Brahe (1546–1601) ya las utilizaron entre 1565 y 1580, estas fórmulas se popularizaron a través de obras como el *Fundamentum astronomicum; id est, Nova doctrina sinum et triangulorum* (1588) de Nicholas Reimarus Ursus (1551–1600). Cabe decir que Joost Bürgi (1552–1632), amigo de Wittich, también parece que tuvo conocimiento de estos métodos antes que el propio Ursus y hay que recordar que Bürgi fue uno de los inventores de los logaritmos, los cuales fueron ideados justamente para reducir la labor de los cálculos largos y complicados.

Por otro lado, al igual que al-Bīrūnī había utilizado un cuadrante y una serie de cálculos trigonométricos para medir la circunferencia terrestre (Dorce, 2013), la trigonometría empezó a jugar un papel determinante en las medidas propias de la geografía y de la navegación. Desde el descubrimiento español de América en 1492, la búsqueda de rutas óptimas y la determinación de las coordenadas geográficas del Nuevo Mundo despertaron la necesidad de los cálculos geodésicos. Por otro lado, la aparición de la pólvora hizo necesario una nueva concepción de la arquitectura militar, de la fortificación y de las tácticas militares. Por ese motivo, el siglo XVI es el momento en el que aparecen en Europa toda una serie de tratados que intentan dar una respuesta práctica a toda esta problemática derivada del día a día. Toda esta nueva literatura tiene un primer origen en el *De architectura Libri Decem* de Vitruvio (s. I d. C.), impreso por primera vez en Roma en 1486, y el *Rey Militaris Instituta* de Flavio Vegecio Renato (s. IV d. C.), que ya circulaba por Europa traducido al francés en el siglo XIII y al inglés a finales del siglo XV. En este sentido, una de las primeras obras de este género impresas en Europa fue el *De Re Militari libri XII* (1472) de Roberto Valtuario (1413–c.1485) aunque parece que interesaba más desde un punto de vista filológico que por el militar propiamente dicho (Kruft, 1990). Por su parte, uno de los matemáticos civiles que más influyó en todo este campo fue Niccolò Fontana, más conocido por su sobrenombre de Tartaglia (c.1499–1557), cuyos *Nova Scientia* (1537) y *Quesiti et inventioni diverse* (1537) establecieron resultados clave en balística que permitieron reformular las estructuras arquitectónicas construidas hasta entonces para fortificar ciudades y castillos.

¿Hasta qué punto una obra escrita en el siglo XVI está didácticamente vigente y puede ser utilizada en nuestras aulas actuales? No hace mucho, Massa-Esteve (2014) ha planteado justamente el uso de la *Nova Scientia* como base de ciertas actividades sobre la historia de las matemáticas que se pueden llevar a cabo perfectamente en una de nuestras aulas. La secuencia didáctica empieza con la presentación del renacimiento italiano y del propio Niccolò Tartaglia (personaje que puede dar mucho juego), tras lo cual se ha de analizar la obra relacionándola con los objetivos del autor. Así, se puede animar a los alumnos a construir alguno de los distintos goniómetros que han de servir para tomar medidas angulares y que darán paso a poder adquirir nuevas ideas y perspectivas. Las matemáticas no son una disciplina cerrada, muerta y sin emociones (Bidwell, 1993) y su relación con el contexto histórico aporta una serie de beneficios que han sido ampliamente estudiados en las últimas décadas en, por ejemplo, Marshall y Rich (2000), Wilson y Chauvot (2000), Massa-Esteve (2003 y 2010), Siu (2007), Jankvist (2009) y Massa-Esteve, Guevara, Romero y Puig-Pla (2011).

Con todo, se puede plantear concretamente un estudio de las medidas de distancias que encontramos en un tratado como el *Nova Scientia* y transportarnos por un momento a la vida de un ingeniero europeo del siglo XVI y sus preocupaciones, intereses, un rol que, sin duda, puede motivar a nuestros estudiantes.

El libro III del *Nova Scientia*

El *Nova Scientia* está dividido en tres libros. El primero contiene catorce definiciones, cinco supuestos, cuatro sentencias comunes y seis proposiciones orientadas a trazar la trayectoria de un cuerpo pesado en distintas situaciones. El libro II, por su parte, contiene catorce definiciones, cuatro supuestos y nueve proposiciones. En la proposición IV, Tartaglia discute sobre la inclinación que ha de tener un cañón, y remata el tema en la proposición VIII donde indica que una inclinación de 45º es la óptima para obtener el máximo alcance del proyectil. Su razonamiento se basa en la semejanza de triángulos y Massa-Esteve (2014) sugiere que en clase, el profesor puede debatir con sus alumnos una pregunta como la que aquí resuelve Tartaglia: ¿qué inclinación ha de tener un cañón para lograr el máximo alcance del proyectil?

El libro III de la *Nova Scientia* se inicia con una serie de definiciones sobre horizonte, plano perfecto, altura, distancia diametral o hipotenusa, distancia horizontal, que conducen a la comprobación de si una regla y una escuadra están bien construidas y a la construcción de «un instrumento que puedo usar para nivelar el suelo EF y […] medir alturas, anchuras, profundidades y distancias horizontales y diametrales de objetos perceptibles» (Tartaglia, 1537, III, 22v). Con este *goniómetro cuadrado* (figura 1), Tartaglia determina la horizontalidad de un plano y en la proposición VIII inicia la determinación de alturas:

> Me gustaría encontrar la altura de un objeto perceptible cuya parte es accesible y, usando la misma operación, me gustaría saber también la hipotenusa o distancia diametral (Tartaglia, 1537, III, 24r).

Siendo *AB* (figura 1) la altura del objeto perceptible y *EF* = *CB* la distancia entre el punto de observación y la perpendicular al objeto que se quiere medir (*BF* es la distancia entre el ojo y el suelo), situado el goniómetro *IGH* de modo que la visual *NM* coincida con la *hipotenusa EA* y la diagonal *HG* sea perpendicular al suelo (de *H* cuelga una plomada que hace las funciones de medidor de ángulos), entonces:

- — Los ángulos $\angle EAF$ y $\angle GKH$ son ambos rectos (*Elementos*, libro I, tercer postulado).
- — Los ángulos $\angle EAF$ y $\angle KHG$ son iguales (*Elementos*, libro I, proposición 32).
- — Por tanto, los triángulos $\triangle GKH$ y $\triangle EAF$ son semejantes, al tener los mismos ángulos y sus lados proporcionales (*Elementos*, libro VI, proposición 4).
- — Los triángulos $\triangle GIL$ y $\triangle EAF$ también son semejantes y sus lados también son proporcionales (*Elementos*, libro VI, proposición 20).
- — Consecuentemente:. $EF / FA = GI / IL$.
- —Como *GI* e *IL* son los lados del goniómetro cuadrado,. $GI = IL$. Por lo tanto, $EF = FA$.
- — Finalmente, $CB = EF$ (Elementos, libro I, proposición 34). Por lo tanto, $FA = CB$ (*Elementos*, libro I, primera noción común).
- — Así pues, la altura es igual a $AB = FB + FA$.

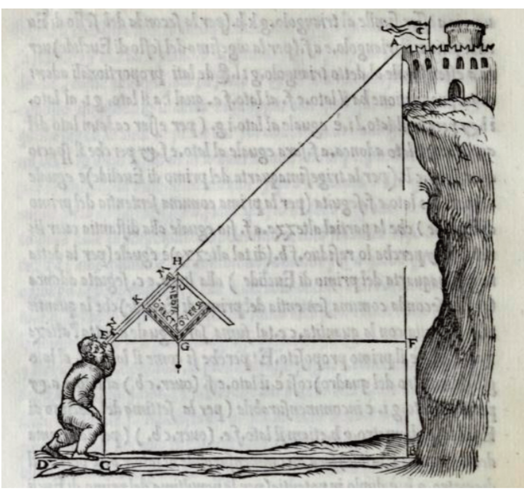

Figura 1. Goniómetro cuadrado

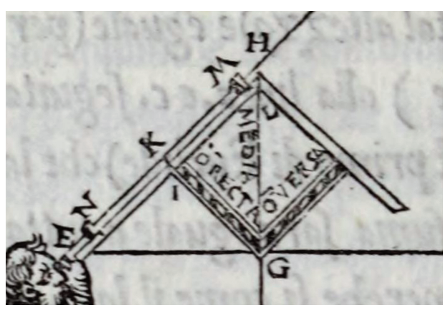

Figura 2. Detalle de la figura 1

Para calcular la distancia diametral EA, Tartaglia parte de la inconmensurabilidad demostrada por Euclides entre el lado y la diagonal de un mismo cuadrado y se remite al teorema de Pitágoras (*Elementos*, libro I, proposición 47) para afirmar que $EA^2=2CB^2$. Para ejemplificar el método, Tartaglia parte de $CB=353$ pasos y $EF=2$ pasos, con lo que la altura es igual a $AB=355$ pasos. Por otro lado,

$$EA^2=249\,218 \quad\Rightarrow\quad EA=499\,\tfrac{217}{998}$$

que es «la raíz cuadrada más cercana» (Tartaglia, 1537, III, 24v).

En la proposición IX, Tartaglia contempla la posibilidad de que la plomada que cuelga de H no coincida con la diagonal HG. Especifica que si dicha plomada cae del lado de la *sombra recta* (lado izquierdo en la figura 2), entonces la altura FA será mayor que la distancia CB y si, por el contrario, la plomada cae del lado de la *sombra conversa*, entonces FA será menor que CB. En ambos casos, para determinar la altura, Tartaglia divide el lado IG de su cuadrante en 12 partes —Tartaglia dice que los «antiguos» llamaron a esta división *escala altimétrica* (Tartaglia, 1537, III, 22v). En el folio 26v, especifica que cada una de estas 12 partes puede ser dividida, a su vez, en 12 minutos—. Igual que en el caso anterior, se cumple (figura 3) que $EF/FA=GI/IL$, con lo que si n es la longitud de IG medida en las 12 divisiones del lado del cuadrante y, por lo tanto $IL=12$, entonces se tiene que:

$$FA=\frac{12}{n}CB.$$

Por ejemplo, si $CB=256$ pasos y $n=9$, entonces:

$$AB=FB+FA=2+\frac{12}{9}\cdot 256=343\tfrac{1}{3}\ \text{pasos.}$$

En la proposición X:

> Me gustaría medir artificialmente la altura de un objeto perceptible cuya base no puede ser vista o no es accesible. Por la misma operación, me gustaría investigar la hipotenusa o distancia diametral de dicha altura y también la distancia horizontal […] (Tartaglia, 1537, III, 28r).

En este caso, la demostración de Tartaglia parte de hacer dos mediciones con su cuadrante. De este modo, sea AB la altura que hay que medir (figura 4), FQ la distancia entre el ojo y el suelo, y los cuadrados MLO y GHJ las correspondientes posiciones de los cuadrantes cuadrados utilizados anteriormente, con las respectivas medidas $ON=m$ pasos y $JI=n$ pasos, en los que cada lado del cuadrante tiene 12 pasos. Conocida la distancia $d=QC$, entonces:

- Los triángulos $\triangle EPA$ y $\triangle HJI$ son semejantes. Por lo tanto:
$$\frac{EP}{AP}=\frac{HJ}{JI}=\frac{12}{n}.$$
- Los triángulos $\triangle FPA$ y $\triangle LON$ son semejantes. Por lo tanto:
$$\frac{FP}{AP}=\frac{OL}{ON}=\frac{12}{m}.$$
- Como $d=FP-EP$, entonces:
$$d=FP-EP=\left(\frac{12}{m}-\frac{12}{n}\right)AP.$$

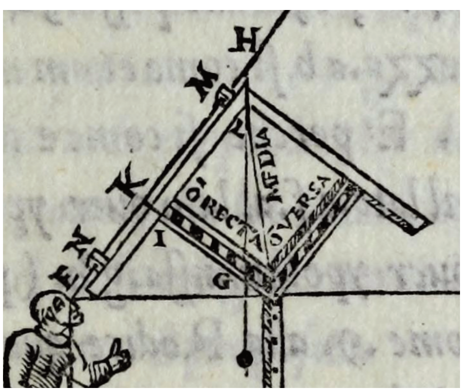

Figura 3

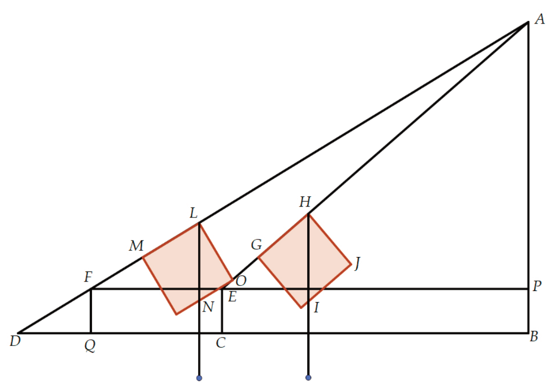

Figura 4

— Por lo tanto $AP = \frac{d}{p}$ donde $p = \frac{12}{m} - \frac{12}{n}$.

Tartaglia termina este libro III con la construcción de otro goniómetro para medir distancias horizontales y diametrales consistente en una *dioptra* en forma de cruz ensamblada en un cuadrado pensado para medir ángulos. Tartaglia utiliza este nuevo instrumento en la proposición XII para determinar dichas distancias a un punto A dado (figura 5).

Siguiendo los razonamientos de Tartaglia, en un primer momento se alinea la dioptra BC con el punto A y tras un desplazamiento perpendicular de modo que el centro del goniómetro pase del punto K al punto N (figura 6), entonces:

- Los ángulos $\angle INH$ y $\angle NAK$ son iguales (*Elementos*, libro I, proposición 29).
- Los ángulos $\angle IHN$ y $\angle NKA$ son ambos rectos (*Elementos*, libro I, tercer postulado).
- Por lo tanto, los triángulos $\triangle IHN$ y $\triangle NKA$ son semejantes, al tener los mismos ángulos, y sus lados proporcionales (*Elementos*, libro VI, proposición 4).
- Consecuentemente: $HI / NH = KN / KA$.
- Tartaglia divide cada lado de su goniómetro en 24 *puntos* con los que determina la longitud de IH.
- Por lo tanto, suponiendo conocidas $d = KN$, $NH = 12$ pasos y $HI = n$ pasos, se tiene:

$$KA = \frac{12d}{n}.$$

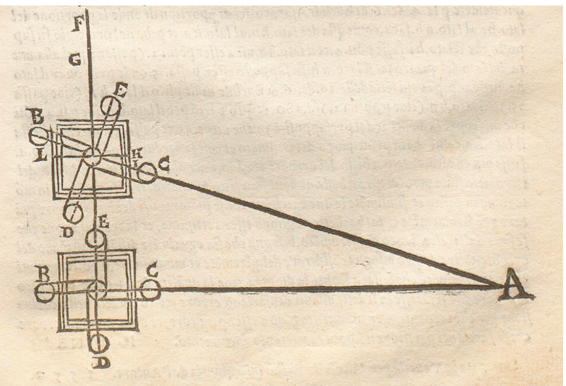

Figura 5

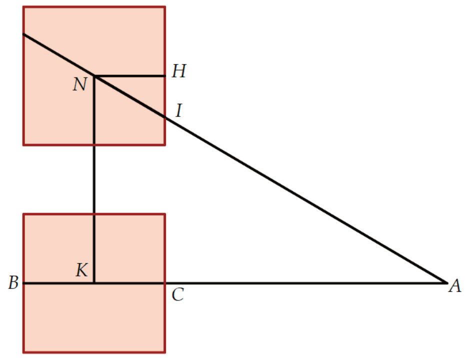

Figura 6

Nos encontramos cálculos muy parecidos en otras obras renacentistas como el *Del modo di misurare le distance, le superficie, i corpi, le piante, le provincie, le prospettive e tutte le altre cose terrene* (1564) de Cosimo Bartoli (1503–1572) o la *Teorica y practica de fortificacion* (1598) del andaluz Cristóbal de Rojas (1555–1614). Además, en la primera de ellas también vemos cómo medir profundidades a partir de los ángulos determinados por goniómetros y astrolabios (Bartoli, 1564, I, 46v–47r):

- Sea DG la profundidad que se ha de medir y DF la distancia hasta la fortaleza que hay que expugnar (figura 7: el punto G no está señalado).

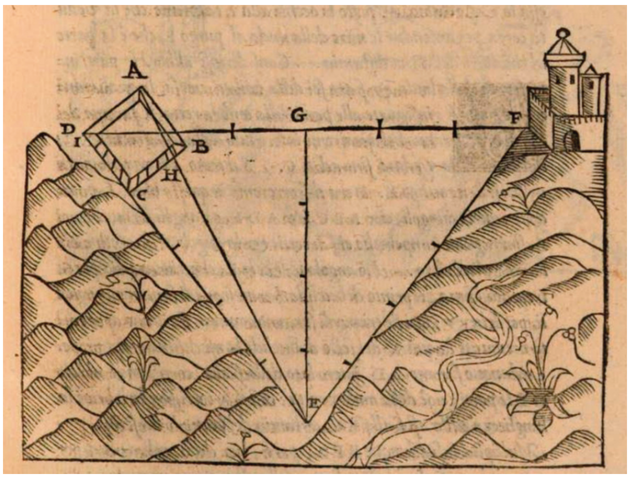

Figura 7

— Remitiéndose al capítulo III del mismo libro, Bartoli mide la distancia DF con el *cuadrante geométrico*: si la intersección de la visual EF con el lado CD (figura 7), dividido en 60 partes, es el punto F (no marcado en la figura), entonces:

$$\frac{AD}{DF}=\frac{BE}{AB} \quad \Rightarrow \quad BE=\frac{60^2}{DF}.$$

— Determinada $d=DF$, del mismo modo se determina la distancia $c=DE$ (figura 8).

— Suponiendo que $d=2DG$, se tiene entonces que $GE=\sqrt{c^2-d^2}$ (*Elementos*, libro I, proposición 47).

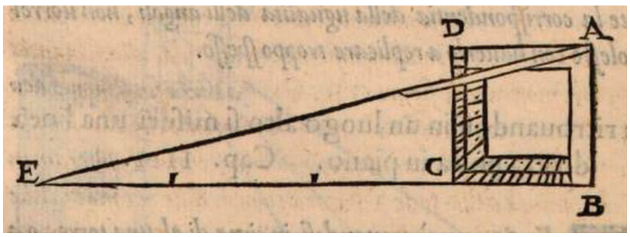

Figura 8

El *Tectonicon* de Leonard Digges

Otra de las obras renacentistas de las que podemos obtener material para poder ser utilizado en las aulas es el *Tectonicon* (1556) del inglés Leonard Digges (c.1515–c.1559), inventor del *teodolito* y también del *telescopio reflector*. A través de sus diversas ediciones, este tratado, fue una de las bases de la arquitectura inglesa a lo largo del siglo XVI: Digges introdujo la geometría y los instrumentos matemáticos como fundamento de la ingeniería de la época (Bennet, 1993).

El *Tectonicon* se inicia con unas secciones preliminares dedicadas a la aritmética y a la geometría elemental que incluyen el cálculo de áreas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, círculos, superficies compuestas y poliedros y cilindros en el espacio. También introduce la *regla del carpintero* para medir y hacer algunos cálculos como divisiones y elevar al cuadrado, en cuyo reverso hay representado un cuadrante para medir ángulos. Digges explica cómo los carpinteros miden las longitudes sobre el suelo con tan solo una escuadra (figura 9). Basándose en las proposiciones 33 del libro I y 4 del libro VI de los *Elementos*, si se sabe la longitud del palo ac perpendicular al suelo en el que se apoya la escuadra y el brazo corto de la misma señala al punto d de modo que se conoce la medida de ad, entonces:

$$\frac{ac}{ad}=\frac{ab}{ac} \quad \Rightarrow \quad ab=\frac{ac^2}{ad}$$

es la longitud hasta el punto b buscada.

Otro de los cálculos interesantes que nos encontramos es el de las alturas y las distancias transversales entre dos puntos medida con una *alidada* (figura 10). Sea AB la longitud transversal que se quiere medir (Digges utiliza letras minúsculas) y vamos a denominar M a su punto medio (no marcado en la figura). Trazando una perpendicular MD, todas las medidas se tienen que hacer sobre ella. A partir de aquí, estas medidas parten de la razón entre el cociente entre la longitud fija del brazo de la alidada (desde la punta derecha hasta la punta izquierda) y la longitud que hay entre el ojo del observador y el propio brazo en la regla de la alidada, a las que llamaremos l y λ, respectivamente. Situado el observador en la posición C de la figura, cuya distancia $d_1=CM$ es conocida, de modo que $\lambda=l$, entonces Digges dice que $AB=d_1$. En cambio, si ahora el observador se mueve hasta la posición D en la que $\lambda=k\cdot l$ para una cierta razón k, entonces $AB=(1/k)\cdot\lambda$. Como ejemplo, Digges determina la distancia $CM=12$ pasos en la que se produce y, por lo tanto, obtiene $AB=12$ pasos. Del mismo modo, si $DM=36$ pasos, entonces D será el punto en el que $\lambda=3\cdot l$ y, por lo tanto, también se tendrá $AB=12$ pasos.

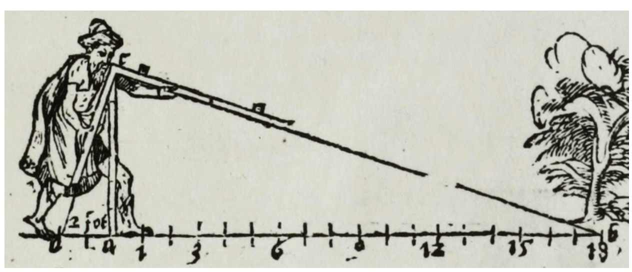

Figura 9

Este tipo de alidada, también conocida como *ballestina*, fue descrita por primera vez en la obra de Levi ben Gerson (1288–1344) y en el siglo XVI fueron los navegantes portugueses los primeros en utilizarla para hacer mediciones marítimas (Mörzer Bruyns, 1994). A través de los estudios cosmográficos, fue conocida también en el norte de Europa y William Bourne (c.1535–1582) la describió en 1571 para determinar la altura del sol. También fue conocida y usada en Francia y Holanda, y pronto se idearon mejoras para reducir el error angular que implicaban sus resultados.

Pero, ¿cómo utilizamos esta alidada a partir de dos mediciones independientes separadas por una distancia d conocida? Tras determinar las longitudes $\lambda_1 < \lambda_2$ que en ambas mediciones hay entre el ojo del observador y la posición del brazo, Digges propone restar $\lambda_2 - \lambda_1$ y, entonces, AB es el resultado de dividir el producto $l \cdot d$ entre dicha diferencia. Una vez más, este procedimiento está basado en la semejanza de triángulos. Sea AB la distancia que se quiere medir (figura 11), M su punto medio y C y D las respectivas posiciones desde las que se han tomado las longitudes $\lambda_1 = NC$ y $\lambda_2 = PD$ sobre la regla de la ballestina, con la distancia $d = CD$ conocida. Por un lado, al ser los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle EFC$ semejantes, se tiene:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{CM}{NC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{l} = \frac{CM}{\lambda_1}.$$

Por otro, los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle GHD$ también son semejantes y se cumple:

$$\frac{AB}{GH} = \frac{MD}{PD} = \frac{CM + CD}{PD} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{l} = \frac{CM + d}{\lambda_2}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{CM}{\lambda_1} = \frac{CM + d}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad CM = \frac{\lambda_1 d}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$\Rightarrow \quad AB = \frac{l \cdot d}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

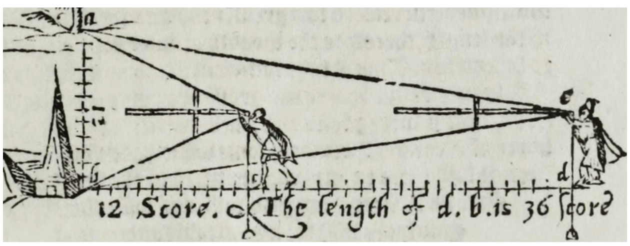

Figura 10

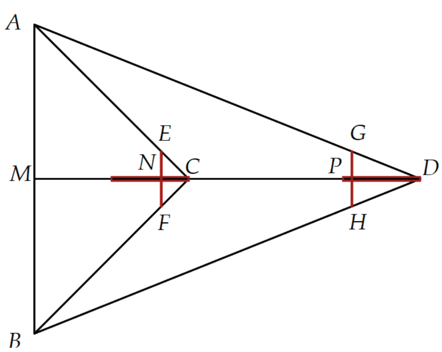

Figura 11

Propuestas de aula

A partir de todo lo que se ha dicho, es evidente que la trigonometría y las medidas terrestres derivadas de ella que se publicaron en el siglo XVI, ya sea a través de la obra de Tartaglia, Digges o de otros autores contemporáneos, puede ser una fuente de problemas, razonamientos y motivación en nuestras aulas. Veamos unas cuantas propuestas.

1. Obviamente, la primera de ellas es reproducir las medidas en las propias escuelas e institutos, o con cualquier edificio representativo. Por ejemplo, como parte de una clase de trigonometría se puede hacer que los alumnos construyan sus propios goniómetros (solo necesitan un transportador de ángulos, un pequeño tubo y un hilo y un peso que haga de plomada) y en parejas o grupos sigan las explicaciones renacentistas para determinar la altura de un edificio o la distancia que les separa de él (Dorce, 2016). Esta experiencia se realiza cada año con los alumnos de 4.º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (edades de 15 y 16 años) de un instituto público de Cataluña, España, y la va-

loración por parte de los estudiantes es siempre óptima. Todos los grupos se desplazan a Barcelona para medir el Hotel Arts (figura 12), situado al lado del mar, con sus instrumentos matemáticos recién construidos. También miden árboles, farolas y distancias concretas en una mañana que el aula se desplaza a las calles de la ciudad para convertirse en un momento tan divertido como interesante.

Para complementar una actividad como esta, el uso de programas informáticos como GeoGebra puede ayudarnos a que los alumnos tengan un mejor entendimiento de la situación. El hecho de que todos los cálculos se basen en la semejanza de triángulos hace que la geometría dinámica también juegue un papel muy importante dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, en la línea definida por Ruthven, Hennessy y Deaney (2008).

Por lo tanto, a partir de las explicaciones básicas propias de la trigonometría y de una introducción histórica de la materia, la secuencia didáctica puede transportar a los alumnos por una aventura que los convierta en expedicionarios que tienen que tomar medidas con un simple transportador de ángulos y una cuerda de una cierta medida. No cabe duda que este tipo de actividades consiguen que todos los alumnos, ya sea individualmente o en trabajo cooperativo, encuentren su lugar y tengan interés por adquirir el máximo de conocimientos posible de modo que puedan tener éxito en su empresa.

Figura 12

2. Como se ha dicho, la construcción de los instrumentos matemáticos también puede ser uno de los recursos que transporten los contextos históricos y cotidianos al aula. A través de la historia de las matemáticas los alumnos han podido ver hasta qué punto la medición de ángulos sobre el terreno y la semejanza de triángulos sirven para medir distancias. A través de los goniómetros, cuadrantes o astrolabios, podemos obtener una fuente de motivación adicional. Cada vez es más habitual introducir procesos tecnológicos en las clases de matemáticas y en este caso concreto, la preparación de las medidas pasa necesariamente por la construcción de los instrumentos que se van a hacer servir. En este aspecto, aquí también se puede presentar la historia del astrolabio como un dato que haga ver cómo la humanidad ha tenido siempre la necesidad de estar en contacto con su entorno. Remontándonos a las épocas griegas y sus orígenes en tiempos de Hiparco de Rodas (s. II a. C.), el astrolabio fue utilizado por árabes, indios, chinos y europeos durante la Edad Media, siendo el matemático y astrónomo cordobés Azarquiel (m. 1100) uno de los máximos exponentes medievales en su construcción y uso (Dorce, 2008). La influencia islámica se trasladó a la Europa del siglo XVI y pronto aparecieron grandes constructores de astrolabios como Georg Hartmann (1489–1564), Petrus Apianus (1495–1552) o Gemma Frisius (1508–1555). Como se puede ver, aquí se puede abrir una interesante línea de trabajo donde los alumnos pueden ampliar sus horizontes educativos aprendiendo parte de la historia de las matemáticas, la navegación, la astronomía y la geodesia.
3. Otro de los aspectos que aportan los tratados del siglo XVI es el de la trigonometría sin trigonometría. Los libros de texto y materiales

didácticos exponen las definiciones de las razones trigonométricas habituales y estas son aplicadas para resolver los problemas de cálculo de alturas. Como se ha visto, ni Tartaglia ni Digges proponen el cálculo de ninguna razón trigonométrica sino que basan todos sus cálculos en la semejanza de triángulos. Es indudable que ambas resoluciones son equivalentes pero esto nos da una idea de cómo han ido cambiando las ideas a lo largo de la historia. En dos triángulos semejantes, las correspondientes razones trigonométricas de los ángulos homólogos son constantes y esto permite poder trabajar con la función tangente sin necesidad de definirla explícitamente. Evidentemente, la presentación actual del seno, el coseno y la tangente significan una simplificación en todos los procesos algorítmicos ya que llevan implícitas todas las razones entre los distintos lados de los triángulos. No obstante, el hecho de que los lados de los distintos cuadrantes estuvieran divididos en 12 o 60 partes introdujo una medida estándar que puede considerarse un preludio de la necesidad de tener una función como la tangente como base de los cálculos. En este sentido, también se puede analizar por qué razón la trigonometría avanza considerando las circunferencias de radio igual a la unidad y abandona estas escalas antiguas que no aportan tanta precisión como el sistema de numeración decimal habitual.

4. Como curiosidad, se puede introducir el origen de las palabras *seno* y *tangente*, ya que pocas veces nos paramos a pensar con nuestros alumnos por qué motivo llamamos a las cosas de esta manera. Como es sabido, la palabra tangente introducida por Fincke en su *Geometriae rotundi* y su *tangens* proviene directamente de la palabra latina *tangere*, que significa tocar. Por su parte, la palabra seno es una mala traducción medieval. El matemático indio Aryabhata (476–550) lo denominó *jyā* (o *jīva*) que es la palabra sánscrita para referirse a la cuerda de una circunferencia y este término fue transliterado a *jība* por los astrónomos musulmanes (que no significa nada en árabe). Habitualmente, la escritura árabe omite las vocales con lo que la palabra se transformó en *jyb* (جيب) y, en 1145, Robert de Chester la confundió por *jayb* cuyo significado es bahía o ensenada. Por lo tanto, usó la traducción literal al latín *sinus* (Boyer, 1968). Otra versión (Eves, 1969) atribuye el error de traducción a Gerardo de Cremona (1114–1187).
5. Otro de los temas que están íntimamente ligados al desarrollo de la trigonometría en la Europa del siglo XVI son las fórmulas de la prostaféresis. De aquí puede salir la necesidad de la invención de las calculadoras analógicas, las cuales iniciaron su andadura con la máquina inventada en 1623 por Wilhelm Schickard (1592–1635) a la que siguieron aparatos como la *pascalina* (1642) de Blaise Pascal (1623–1662) o la calculadora (1672) de Gottfried W. Leibniz (1646–1716). Además, en la primera mitad del siglo XVII, el escocés John Napier (1550–1617) ideó los logaritmos en su *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614) con el único propósito de poder evitar los «tediosos cálculos» (Dorce, 2014) ya que, al igual que las fórmulas de la prostaféresis, permiten convertir los productos en sumas y las divisiones en restas (a través de las conocidas fórmulas $\log x\cdot y = \log x + \log y$ y $\log x / y = \log x - \log y$). La obsesión de este escocés por la optimización de los cálculos le llevó también a populizar sus famosas «reglas» en su póstuma *Rabdologia* (1617), ya que consiguen computar multiplicaciones, divisiones y raíces de una manera rápida y sencilla.
6. En un cierto punto de sus razonamientos, Tartaglia utiliza la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado. ¿Cuál es el significado de inconmensurabilidad? Una cuestión como esta nos transporta al libro X de los *Elementos* de Euclides y a vislumbrar cuáles fueron las primeras teorías de la historia respecto de la existencia de los números irracionales. ¿Puede imaginarse algún estudiante que la leyenda dice que la persona que descubrió que es irracional fue ejecutado por haberlo explicado? Una vez más, un apunte en una demostración nos puede transportar a una historia muy inte-

resante sobre cómo el hombre llegó a la conclusión de que se necesitaban más números más allá de los racionales. ¿Fue π siempre irracional? La demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, el teorema de Pitágoras, Arquímedes de Siracusa (s. III a. C.) e incluso la resolución de la ecuación cúbica a cargo de Fibonacci (c.1180–c.1250) pueden ser algunos de los protagonistas de una clase tan entretenida como interesante.

7. Un último dato. La conjugación de todos los elementos explicados permiten poder introducir la historia de las matemáticas como una materia propiamente dicha. Fijémonos en que una pequeña excusa nos ha servido para hablar de la evolución de la geometría y de la trigonometría entre griegos, indios, árabes y europeos renacentistas, de calculadoras, astrolabios y cuadrantes. La historia de las matemáticas es un recurso de aula imprescindible y es necesario que los profesionales de la docencia sean muy conocedores de la misma para poder transmitir todos los valores que aporta al aula ordinaria.

Esta es pues la propuesta. A partir de aquí, es seguro que se pueden encontrar otras ideas que mejoren las actuales o que las complementen. En todo caso, una ciencia no puede ser entendida en su totalidad sin que su historia haga aparición en algún momento. Hemos de buscar los contextos que hagan factible que nuestros alumnos lleguen a tener una idea global de toda la materia y, en este sentido, la historia de las matemáticas puede contribuir muy determinantemente en este proceso.

Referencias bibliograficas

BARTOLI, C. (1564), *Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le provincie, le prospettive e tutte le altre cose terrene, che possono occorrere à gli huomini : secondo le vere regole d'Euclide, & de gli altri più lodati scrittori*, Francesco Franceschi Sanese, Venecia.

BENNET, J. A. (1993), «Architecture and Mathematical Practice in England, 1550-1650», en Bold, J., y E. Chaney (Eds.), *English Architecture Public and Private*, The Hambledon Press, Londres y Rio Grande.

BIDWELL, J. K. (1993), «Humanize Your Classroom with the History of Mathematics» *Mathematics Teacher*, 86, 461-464.

BOYER, C. B. (1968), *A history of mathematics*, Wiley, Nueva York.

CAMPANO, C., F. S. BENJAMIN, y G. J. TOOMER (1971), *Campanus of Novara and medieval planetary theory. Theorica Planetarum*, University of Wisconsin Press, Madison, Michigan.

CURTZE, M. (1900), «Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter», *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge, 1, 321-316.

DIGGES, L. (1556), *A boke named Tectonicon briefely shewynge the exacte measurynge*, John Daye for Thomas Gemini, Londres.

DORCE, C. (2008), *Azarquiel. El astrónomo andalusí*, Nívola, Madrid.

— (2013), *Historia de la Matemàtica. Desde Mesopotàmia al Renaixement*, Publicacions de la Universitat de Barcelona, Barcelona.

— (2014), «Un paseo histórico por la invención de los logaritmos», *Suma*, 75, 33-42.

— (2016), «Geometría en el aula a partir de un tratado español de fortificación del siglo XVI», *Unión*, 48, 187-207.

EVES, H. (1969), *An introduction to the history of mathematics*, Rinehart and Winston, Nueva York.

HUNRATH, K. (1899), «Des Rheticus Canon doctrinæ triangulorum und Vieta's Canon mathematicus», *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 44 (supplement), 211–240.

JANKVIST, U. T. (2009), «A characterization of the *whys* and *hows* of using history in mathematics education», *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.

KING, D. (2005), *In Synchrony with the Heavens. Studies in Astronomical Timekeeping and Instrumentation in Medieval Islamic Civilization, Vol. II*, Brill, Leiden y Boston.

KRUFT, H. W. (1990), *Historia de la teoría de la arquitectura*, Alianza, Madrid.

LORCH, R. (1971), *Jabir ibn Aflah and his influence in the West* (tesis doctoral), University of Manchester, Manchester.

Marshall, G. L., y B. S. Rich (2000), «The Role of History in a Mathematics Class», *Mathematics Teacher*, 93 (8), 704-706.

Massa-Esteve, M. R. (2003), «Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica», *Biaix*, 21, 4–9.

— (2010), «Understanding Mathematics through its History» en Hunger, H. (Ed.), *Proceedings of the 3rd International Conference of the European Society for the History of Science*, European Society for the History of Science, Viena.

— (2014). «Historical activities in the mathematics classroom: Tartaglia's Nova Scientia (1537)», *Teaching Innovations*, Vol. 27, Issue 3, 114-126.

Massa-Esteve, M. R., I. Guevara, F. Romero, y C. Puig-Pla (2011). «Understanding Mathematics using original sources. Criteria and Conditions» en Barbin, E., M. Kronfellner, y C. Tzanakis (Eds), *History and Epistemology Mathematics Education. Proceedings of the Sixth European Summer University*, Verlag Holzhausem GmbH, Viena.

Mörzer, W. F. J. (1994), *The Cross-Staff: History and Development of a Navigational Instrument*, De Walburg Pers, Zutphen.

Rojas, C. (1598), *Teorica y practica de fortificacion, conforme las medidas y defensas destos tiempos*, Luis Sánchez, Madrid.

Ruthven, K., S. Hennessy, y R. Deaney (2008), «Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice», *Computers & Education*, Vol. 51. Issue 1, 297-317.

Siu, M. K. (2007), «No, I don't use history of mathematics in my class. Why?» en Furinghetti, F., S. Kaijser, y C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (edición revisada, 268-277). Uppsala Universitet, Uppsala.

Tartaglia, N. (1537), *Nuova Scientia*, Venecia.

Van Brummelen, G. (2009), *The Mathematics of the Heavens and the Earth. The early history of Trigonometry,* Princeton University Press, Princeton y Oxford.

Wilson, P.S., y J. B. Chauvot (2000), «Who? How? What? A Strategy for Using History to Teach Mathematics», *Mathematics Teacher*, 93 (8), 642-645.

Carlos Dorce Polo
Universitat de Barcelona
<cdorce@ub.edu>