SUMA+

Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje
de las matemáticas · **abril 2021**

– núm. 96 –



SUMA+ 96
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje
de las matemáticas · abril 2021

3 Maestros de primaria y matemáticas: haciendo camino

Artículos

11 Modelos matemáticos para el análisis de enfermedades infecciosas
Virgilio Gómez Rubio y María José Haro Delicado

21 Trigonometría en el Renacimiento europeo. Un recurso de aula
Carlos Dorce Polo

33 Evidencias de aprendizaje matemático en salas de escape educativas
José Carlos Piñero Charlo

43 MatemáTICas deportivas
Joaquín Aguilar Barriuso, Diego Alonso Santamaría
y Elena Torres María

Secciones

59 MUJERES MATEMÁTICAS: ROMPIENDO MOLDES
Klára Dán Von Neumann, olvidada pionera de la computación
Marta Macho Stadler

65 DEL MMACA AL AULA
¡A grandes males, mayores remedios!
MMACA

71 EL RINCÓN DE ESTALMAT
(coord. Rafael Ramírez Uclés)
Modelización: ¿qué nos aportan las otras disciplinas STEM?
Carmen Gámez Valero, Miguel L. Rodríguez González
y Rafael Ramírez Uclés

79 SÍ A LAS CALCULADORAS
Cálculo mental y propiedades aritméticas
Jesús Serrano Higueras y M.ª Cristina Naya Riveiro

89 DIARIO DE EXPERIENCIAS MATEMÁTICAS
(coord. Maria Àngels Portilla Rueda)
¡Cuántas matemáticas tiradas por el retrete!
Magdalena Martí Pons, Susanna Morell Torrens
y Catalina Maria Pizà Mut

99 MATEMÁTICAS A UN CLIC
(coord. José Luis Muñoz Casado)
Actividades dirigidas con Desmos
Lola Morales Ruiz

111 VERSIÓN INGLESA
¿Revolución tecnológica?
Maite Aranés Maza

117 RESEÑAS
Alhambra, belleza abstracta y Matemáticas que suman
Serapio García Cuesta y Fernando Etayo Gordejuela

FESPM & Cía

123 Matemáticas y mujer
Juan Carlos Toscano Grimaldi

127 C2EM 2020. El Congreso Catalán de Educación Matemática
Abraham de la Fuente Pérez, Cyntia Riquelme Carvallo
y Juan Carlos Tinoco Balongo

135 XXXIII Congreso de ENCIGA
M.ª Inés García Seijo, Paloma Blanco Anaya,
Beatriz Fernández Fernández e Iria Fernández Fontenla

Suma digital <revistasuma.fespm.es>

VIVENCIAS MATEMÁTICAS
A través del eje de simetría
Miquel Albertí Palmer

Enlaces referenciados en este número

EDITORIAL

Maestros de primaria y matemáticas: haciendo camino

…A menudo nos planteamos cuál es el papel actual del maestro de primaria en la educación matemática. Para poder hacer un buen análisis de la situación hay que abordarla desde diferentes ángulos.

Por una parte, hay que tener en cuenta la apreciación social de la profesión docente. Cada cierto tiempo se publican los resultados sobre cuáles son las profesiones más valoradas. No pasa desapercibido que, junto con los sanitarios y los cuerpos de seguridad, la docencia es una de ellas. Pero resulta curioso que, a la par, existan ideas preconcebidas, creencias, sobre el maestro y, más concretamente, sobre el maestro y las matemáticas, que contradicen esta valoración positiva. Algunas de las más habituales son: «magisterio es una carrera fácil», «una persona buena en matemáticas (o en ciencias) no debe estudiar magisterio, ya que estaría desaprovechando su potencial».

Comencemos por la formación inicial. Actualmente conviven tres titulaciones en los docentes de educación primaria en activo, muy diferentes entre ellas. Estas son «Profesor de Educación General Básica (EGB)»; «Maestro»; y «Graduado en Educación Primaria».

El «Profesor de EGB» cursaba la carrera en 3 cursos y debía escoger entre 5 especialidades, una de ellas específica de ciencias. En el primer curso se estudiaban la mayoría de las materias comunes. El segundo y el tercer curso pretendían preparar específicamente a los futuros docentes para la especialidad elegida. Así, en el caso de la especialidad de ciencias, había que cursar varias asignaturas de la materia de matemáticas, así como didáctica de esta, entre otras.

Respecto al título de «Maestro», cursaba también la carrera en 3 cursos y debía escoger entre 7 especialidades, ninguna de ellas específica de ciencias o de matemáticas. Si el alumno optaba por la especialidad de educación infantil tenía 6 créditos de educación matemática y su didáctica, si optaba por la especialidad de

primaria tenía 8 créditos, pero si optaba por cualquiera de las otras especialidades tenía únicamente 4 créditos de formación específica matemática.

Y ahora nos centramos en los «Graduados en Educación Primaria», que es la titulación que actualmente se ofrece desde las universidades. El alumno cursa la carrera en 4 años y debe escoger entre las menciones que ofrece cada universidad. La diversidad de asignaturas específicas de matemáticas es muy amplia y depende de cada universidad. Hay universidades que cuentan con una única asignatura obligatoria durante la carrera frente a otras que tienen cuatro, y los créditos pueden variar de 5 a 27. Además, no todas las universidades ofrecen optativas específicas sobre matemáticas y las que lo hacen pueden variar entre 6 y 30 créditos.

Las que ofrecen un mayor número de optativas son aquellas que ofrecen una mención propia en matemáticas o matemáticas y ciencias. Únicamente 4 universidades ofrecen esta modalidad. Otro dato clave es que, mientras existen multitud de asignaturas relacionadas con las dificultades en el lenguaje y la escritura, solo 4 universidades ofrecen una asignatura específica en las dificultades en matemáticas.

Por tanto, como se puede observar, existe una gran diversidad en la formación inicial del profesorado en el ámbito matemático. Las opiniones al respecto son muy diversas: que la Ley General de Educación (LGE) pecó de especializar demasiado a los profesores, que con los grados se dota de muy poca formación específica y demandan recuperar la filosofía de la LGE…

Otros defienden que la formación inicial del maestro debería ser la de una carrera de 5 años, otros que sea una carrera de 3 años y tenga una especialización (máster) de 2 años… Desde luego, las diferencias entre los planes son grandes y habría que buscar un término medio para que la formación en los ámbitos específicos sea más completa sin olvidar la pedagogía y la didáctica, tanto general como específica, esencial en la educación primaria.

Analicemos ahora un poco esas creencias que se tienen de los maestros y las matemáticas. Para ser un buen maestro se requiere, entre otras habilidades: dominar la materia que se imparte, no solo una (como sí sucede en secundaria), ser creativo para innovar, diseñar actividades que conjuguen la vida cotidiana y la experimentación, pero también llegar al lenguaje abstracto propio de cada materia, dominar el currículum, adaptar el trabajo a cualquier dificultad que se presente en el aula, saber motivar y enganchar a los alumnos, evaluar en coherencia a la metodología utilizada, saber trabajar en equipo…

Para nada es una tarea simple. Por otra parte, el trabajo de un docente de primaria no difiere tanto al de un profesor de secundaria. Quizás las diferencias vienen dadas por el tipo de titulación obtenida (actualmente grado frente a máster), así como a la categoría profesional que, al fin y al cabo, decide el sueldo que van a recibir los docentes.

Por otro lado, la innovación en el área de matemáticas se debe a que hay buenos maestros ejerciendo, que poseen un alto interés y conocimiento de la materia, que están dispuestos siempre a seguir aprendiendo, que son capaces de contagiar a los compañeros y crear toda una red de trabajo. Esto se traduce en una red de formación permanente muy amplia.

Si vamos al terreno de la educación matemática se pueden encontrar propuestas muy interesantes. Para empezar, una de las opciones más conocidas son las formaciones organizadas por la administración, aquellas en las que en algunas comunidades son llevadas a cabo por los centros de formación del profesorado o similares.

Son formaciones que intentan convocar al máximo número de maestros de un mismo centro con la finalidad de poder implantar el proyecto progresivamente. Es un campo en el que hay que cuidar el papel del asesor, especialmente en el área de las matemáticas, que tenga una sensibilidad y unos conocimientos de esta área y que conozca las personas que se dedican a la innovación en el campo de la didáctica de las matemáticas.

Por otro lado, están las formaciones que se ofrecen desde el ámbito universitario, como son los posgrados o cursos de especialización, en concreto expertos universitarios en didáctica de las matemáticas para la educación primaria. La realidad es que la oferta es muy reducida, pero también cabe decir que con ellas se puede conseguir esa gota de aceite que poco a poco se vaya expandiendo. Es por ello por lo que las universidades deberían sensibilizarse más al respecto y ofrecer estas formaciones de manera más generalizada, no de manera puntual.

También se pueden encontrar gran variedad de charlas y propuestas *online*, *webinars*, que, desde que se inició la pandemia, es prácticamente la alternativa «obligatoria» a la formación presencial. Es un formato de corta duración y en general no reconocido como formación por la administración pero que han ayudado, y lo siguen haciendo, a muchos maestros a seguir al día y ofrecer propuestas competenciales *online.*

El campo de las matemáticas no se queda atrás y hay mucha variedad, desde aquellas que ofrecen orientaciones metodológicas y conocimientos teóricos hasta aquellas que ofrecen propuestas concretas para llevar al aula. Hay opciones muy completas a la vez que flexibles, que permiten adaptarlas a la realidad de cada uno.

Cabe destacar también la cantidad de información y pequeños apuntes que ofrecen las redes sociales: se comparten artículos, experiencias, se escriben hilos en Twitter sobre propuestas concretas o sobre orientaciones didácticas…

Y no hay que olvidar que, cuando se habla de formación, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y las Sociedades de Ma-

temáticas de cada comunidad autónoma mueven gran cantidad de docentes de matemáticas y juegan un papel fundamental.

Aquí, los expertos en didáctica de las matemáticas ya vienen «de serie», así como el interés y la motivación, y desde hace ya unos años ha aumentado la sensibilización hacia las etapas de infantil y primaria.

La participación de los maestros de educación primaria en las sociedades se puede observar en la proporción de socios, siendo muy desigual, llegando en algunos casos a un 20 %. Se están haciendo muchos esfuerzos para poco a poco seguir llegando a más maestros de primaria.

Así, son muchas las sociedades que ofrecen jornadas de formación propias y que tienen incorporado un espacio específico para esta etapa.

Por otra parte, muchas son las propuestas de actividades matemáticas que ofrecen las sociedades para alumnos que están en educación primaria: concursos de fotografía, concursos de dibujos, olimpiadas…

También existen propuestas dirigidas a la formación de maestros y a la divulgación de actividades. Entre ellas, son dignos de mención algunos ejemplos como el grupo específico de ABEAM (Associació de Barcelona per a l'Ensenyament i Aprenentatge de les Matemàtiques) para llevar los juegos de mesa al aula «SET, Grup de Jocs»; el movimiento «Matemáticas OAOA» (Otros Algoritmos de las Operaciones Matemáticas), que mueven cerca de 2000 personas en un grupo de Telegram; o grupos de maestros que se reúnen periódicamente para intercambiar experiencias y divulgar la manera de enseñar matemáticas, como es el «Grup Perímetre» de ADEMGI (Associació d'Ensenyants de les Comarques Gironines) o el «Cercle de mestres», de ABEAM; o incluso encontramos iniciativas que provienen de las universidades, de expertos en didáctica de las matemáticas, que suponen un camino clarificador en cuanto a la trayectoria de la docencia.

De la misma manera, la FESPM ha incorporado ya hace años esa sensibilización hacia la etapa de la educación primaria en los diferentes seminarios convocados, dedicándose una parte al trabajo a esta etapa. Ya en el 2012 se celebró un seminario específico, «La enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria», y durante este año 2021 se volverá a celebrar el seminario «La calculadora como recurso didáctico en Educación Primaria», que está en marcha desde hace unos años. De la misma manera se han convocado las «Jornadas sobre materiales para el aula de matemáticas en primaria», la primera edición en 2019 y la segunda en el 2021.

Tampoco se quedan atrás las *Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (JAEM), convocadas por la Federación, que mueven docentes de todas las etapas, y que también ofrecen un lugar para la didáctica en la educación primaria donde la oferta y la participación es cada vez mayor.

Es de valorar todos esos esfuerzos, porque se traducen en una filosofía común entre las diferentes etapas, desde educación infantil hasta la educación universitaria, y donde se puede observar una progresión coherente, sin grandes discrepancias, con un objetivo común: mejorar la competencia matemática de los alumnos.

Solo entendiendo los diferentes ángulos de visión del mundo de un maestro conseguiremos que se unan al camino de la didáctica de las matemáticas, un camino en el que cada día hay más compañeros de primaria y que pone en evidencia que existe una sensibilidad hacia la materia, que la innovación está en marcha.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Onofre Monzó del Olmo**
Secretario General: **Agustín Carrillo de Albornoz Torres**
Vicepresidente: **Juan A. Martínez Calvete**
Tesorera: **Encarnación Amaro Parrado**
Secretaría técnica adjunta: **Bienvenido Espinar Cepas**
Secretaría de relaciones internacionales: **M.ª Claudia Lázaro del Pozo**
Revista Suma: **Iolanda Guevara Casanova**
Servicio de publicaciones: **Juan Martínez-Tébar Giménez**
Secretaría de actividades y formación del profesorado: **Juana M.ª Navas Pleguezuelos**
Secretaría de actividades con alumnos: **Luisa Almazán Álvarez y Francisco Haro Laguardia**
Secretaría de divulgación: **Juan Carlos Toscano Grimaldi**

Sociedades Federadas

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán»
Presidenta: **M.ª Encarnación Reyes Iglesias**
IES Comuneros de Castilla, C/Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: **Julio Rodríguez Taboada**
CPI Dos Dices, C/ Dos Dices, s/n. 15911 Rois (A Coruña)

Euskadiko Matematika Irakasleen Elkartea «EMIE 20+11»
Presidenta: **Ana Fernández de Betoño Sáenz de Olamendi**
Berritzegune de Vitoria-Gasteiz, Avda. Gasteiz, 93. 01009 Vitoria-Gasteiz (Araba)

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)
Presidente: **Bernat Ancochea Millet**
C/ Itàlia, 84B. 08320 El Masnou (Barcelona)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Centro de Documentacion SAEM Thales, Facultad de Ciencias, Dpto Matemáticas, Campus Río San Pedro s/n, Torre Central 4º planta 11510 Puerto Real (Cádiz)

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas
Presidente: **Daniel Sierra Ruiz**
IUMA, Edificio de Matemáticas, 1.ª planta, Universidad de Zaragoza, C/ Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: **Rubén Pérez Zamanillo**
IES Mata Jove, Plaza Club Patín Gijón Solimar, 33213 Gijón (Asturias)

Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas
Presidente: **Juan Agustín Noda Gómez**
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa. 38205 La Laguna (Santa Cruz de Tenerife)

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: **Serapio García Cuesta**
IES Universidad Laboral, Avda. de la Mancha s/n, 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: **Catalina Ayala Molina**
Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia. Campus de Espinardo. 30100 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: **José Pedro Martín Lorenzo**
Centro Educativo Municipal, 2,ª planta, C/ San Juan nº 3A, 06400 Don Benito (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidente: **José Luis Muñoz Casado**
CRIF Las Acacias, C/ General Ricardos, 179. 28025 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: **Carmen Espeso Ortiz**
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: **Jesús Diego Rodríguez García**
IES Enrique Nieto. Departamento de Matemáticas, C/ Avenida de la Juventud, 4. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»-Matematika Irakasleen Nafar Elkartea
Presidente: **J. Javier Jiménez Ibáñez**
IES Alhama, Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: **José Javier Etayo Gordejuela**
Facultad de Educación. Despacho 3215
C/ Rector Royo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima»
Presidenta: **Elena Ramírez Ezquerro**
Facultad de Ciencia y Tecnología Edificio Científico Tecnológico, CCT; C/ Madre de Dios, 53. 26006 Logroño

Sociedade de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA)
Coord. Sección Matemáticas: **Iria Fernández Fontenla**
Facultade de Ciencias, Rúa Alfonso X o Sabio, s/n. 27002 Lugo

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX
Presidente: **Daniel Ruiz Aguilera**
C/ Miquel Capllonch, 30, 3A. 07010 Palma (Illes Balears)

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: **Onofre Monzó del Olmo**
Departamento de Didáctica de la Matemática, Apdo. 22045. 46071 València



artículos

Modelos matemáticos para el análisis de enfermedades infecciosas

Virgilio Gómez Rubio
María José Haro Delicado

SUMA+ núm. 96
pp. 11-20
Artículo recibido en *Suma* en agosto de 2020 y aceptado en septiembre de 2020

La pandemia ocasionada por el virus SARS-COV-2 que produce la enfermedad COVID-19 ha causado un repentino interés por el análisis de datos de enfermedades infecciosas. Esto incluye desde el cálculo de estadísticos sencillos para indicar el estado de la pandemia hasta el uso de modelos más complejos para estudiar su evolución. En este artículo presentamos algunos indicadores epidemiológicos, así como una pequeña introducción a los modelos para el estudio de enfermedades infecciosas (el modelo SIR) y proponemos distintas actividades para trabajar estos temas en clase utilizando GeoGebra.

Palabras clave: Enfermedades infecciosas, Epidemiología, Modelo SIR, GeoGebra.

Mathematical models for the analysis of infectious diseases // The pandemic produced by the SARS-COV-2 virus that causes the COVID-19 disease has produced a sudden interest in the analysis of infectious diseases data. This includes not only simple statistical analyses to measure the state of the pandemic but also the use of advanced models to study the evolution of the disease. In this paper we present a summary of some epidemiological indicators as well as an introduction to some of the models widely used in the study of infectious diseases (e.g., the SIR model), and we propose several examples to work on these topics in the classroom using GeoGebra.

Keywords: Infectious diseases, Epidemiology, SIR model, GeoGebra.

Hoy en día, el estudio de la evolución de las epidemias está lamentablemente de *rabiosa* actualidad. Las matemáticas aportan modelos para describir y explicar la evolución de las epidemias y para predecir el número de afectados por las mismas. Es fundamental analizar la evolución de las epidemias a lo largo del tiempo con el fin primordial de predecir su desarrollo y comportamiento y poder aplicar medidas como, por ejemplo, la vacunación o el confinamiento de toda o de una parte de la población. Se quiere responder a preguntas como cuál será el número máximo de infectados en un determinado momento o qué parte de la población total se espera que se infecte. Aunque muy probablemente hubo muchas personas que previamente investigaron sobre la evolución de las epidemias, fue Daniel Bernoulli (1700-1782) el primero en publicar un modelo matemático para estudiar la evolución de una epidemia de viruela que apareció en torno al año 1760. Daniel Bernoulli fue un matemático, físico y médico suizo que destacó sobre todo

en una de las ramas más aplicadas de las matemáticas como es la estadística. Después de este trabajo de Bernoulli, no hubo estudios del mismo tipo hasta el siglo XX, siglo en el que se desarrolló notablemente la investigación en epidemiología con la búsqueda de modelos matemáticos para representar diversas epidemias. John Snow tuvo un papel relevante al estudiar la epidemia de cólera de 1854 en Londres, y su mapa con la ubicación de casos en el barrio del Soho es de los primeros y uno de los más conocidos. William Heaton Hammer (1862-1936) fue un médico inglés nacido en Leeds (Inglaterra) que se dedicó al estudio de la salud pública y desarrolló un modelo discreto para el estudio de la epidemia de sarampión en Inglaterra. Fue el primero en relacionar la incidencia de una enfermedad con la densidad de población sana y de población infectada. Otra persona que desarrolló un papel importante en la evolución de las enfermedades infecciosas fue Ronald Ross (1857-1932) con sus trabajos en la evolución de la malaria y su relación con la población de mosquitos. Por estos estudios recibió en 1902 el Premio Nobel de Medicina. Durante el siglo XX y lo que llevamos de XXI la estadística y su aplicación al estudio de la evolución de las enfermedades infecciosas ha visto grandes avances debido a la necesidad de resolver, en tiempo real, grandes problemas de salud ocasionados por agentes infecciosos, como, lamentablemente, estamos sufriendo en estos momentos.

Una pandemia es una epidemia que se propaga entre grandes poblaciones de amplias regiones y países. Dada la superpoblación mundial y que vivimos en un mundo global en el que la relación con personas de lugares muy lejanos se hace necesaria y se ve ampliamente facilitada por los medios de transporte actuales, los agentes infecciosos se desplazan a grandes distancias con la misma facilidad que lo hacen los humanos. Por ello, hoy más que nunca, es necesario encontrar modelos de predicción que ayuden a estudiar la evolución de las enfermedades infecciosas, su facilidad para contagiarse y las opciones de control.

Gómez y Haro (2014) presentan una introducción sencilla a las aplicaciones de las matemáticas en epidemiología. En ese artículo los autores describen distintos estadísticos utilizados para el estudio de enfermedades. Además, presentan también algunos ejemplos sencillos del uso de técnicas de estadística espacial para el estudio de enfermedades y su propagación.

A lo largo de todo el artículo presentamos una serie de actividades que pueden llevarse a cabo con alumnos de últimos cursos de la ESO (y posiblemente Bachillerato). Los objetivos que planteamos son:

- Afianzar conceptos básicos de análisis de datos, como su tabulación, resumen y visualización.
- Presentar algunos indicadores importantes en la epidemiología de las enfermedades infecciosas.
- Aprender el significado e interpretación de estas cantidades para el análisis de datos epidemiológicos.
- Aprender el manejo de software para el análisis y visualización de datos epidemiológicos con GeoGebra.
- Analizar los datos de la pandemia de la COVID-19 en España, como ejemplo real de aplicación de todos los conceptos presentados en el artículo.

Algunos conceptos básicos en epidemiología

En epidemiología se consideran dos tipos de modelos: determinísticos y estocásticos. En los modelos determinísticos se pueden controlar los elementos que participan en el proceso infeccioso y, por lo tanto, se pueden predecir con exactitud sus resultados. En los modelos estocásticos no es posible llevar a cabo ese control y, por lo tanto, los resultados no son únicos. En cambio, se obtiene una función de probabilidad que asocia a cada uno de los resultados posibles la probabilidad de ocurrir.

Hay una gran diferencia entre unos tipos de modelos y otros. En un modelo determinístico una sola persona podría causar una epidemia generalizada. En un modelo estocástico, uno de los posibles resultados es que la epidemia se extinga.

En general, en el análisis de datos epidemiológicos vamos a tener una variable temporal (que indica en qué momento se recogieron los datos), la población susceptible (de no infectados), el número de infectados, el número de personas recuperadas y, posiblemente, el número de personas fallecidas. Para estudiar la evolución y el estado de una epidemia existen una serie de indicadores que describimos a continuación.

Tamaño de la epidemia: Es el número total de individuos infectados. Es un valor muy importante, ya que está relacionado con los costos de la epidemia.

Incidencia: Es la proporción de casos nuevos de la enfermedad infecciosa, que se presentan durante un periodo de tiempo determinado:

$$\frac{\text{N.º de casos nuevos}}{\text{N.º de susceptibles}}.$$

La incidencia nos da la probabilidad de que una persona en esa población resulte contagiada (riesgo medio de contraer la enfermedad). La incidencia es más útil cuando se trata de enfermedades de corta duración como la varicela. Por lo general se representa en forma de fracción, porcentaje o número de casos por cada 10 000 o 100 000 personas. Informalmente, también se puede llamar incidencia al número de casos nuevos.

Prevalencia: Es la proporción de casos existentes en una población en un momento dado o en un periodo de tiempo determinado:

$$\frac{\text{N.º de infectados}}{\text{N.º de susceptibles}}.$$

Digamos que es la probabilidad de contraer una enfermedad. La prevalencia es más útil cuando se habla de enfermedades duraderas como el AIDS. Como la incidencia, se suele expresar como tasa por 100 000 habitantes e, informalmente, también se puede denominar prevalencia al número de infectados.

Letalidad: Se usa para medir la frecuencia del suceso muerte (casos de una enfermedad que resultan mortales):

$$\frac{\text{N.º de fallecidos}}{\text{N.º total de casos}}.$$

Por tanto, la letalidad mide la gravedad de una enfermedad.

Supervivencia: Se usa para medir cuántas personas sobreviven a la enfermedad:

$$\frac{\text{N.º de recuperados (no fallecidos)}}{\text{N.º total de casos}}.$$

Por tanto, la supervivencia también está relacionada con la letalidad de la enfermedad.

Curva epidémica: es una representación gráfica del número de casos según la fecha de la aparición de la enfermedad. Puede proveer información acerca del patrón de propagación de la epidemia, su magnitud, la existencia de casos aislados, el periodo de incubación de la enfermedad y el tipo de fuente que la originó.

ACTIVIDAD 1: CÁLCULO DE INDICADORES EPIDEMIOLÓGICOS BÁSICOS

La tabla 1 muestra datos de población, número de infectados y fallecidos de las cinco provincias de Castilla-La Mancha por la COVID-19. Los datos de población se han obtenido del Instituto Nacional de Estadística y corresponden a datos del padrón a 1 de enero de 2020 (datos provisionales), mientras que los datos de infectados y fallecidos por provincia hasta el día 26 de julio de 2020, se han obtenido del proyecto *Escovid19data*.

Objetivos

- Conocer y calcular algunas fuentes de datos e indicadores básicos en epidemiología.
- Analizar y comparar entre varias provincias los resultados obtenidos.

Provincia	*Población*	*Infectados*	*Fallecidos*
Albacete	388 126	4 494	434
Ciudad Real	494 895	7 927	1 001
Cuenca	195 981	3 005	284
Guadalajara	261 960	1 869	199
Toledo	703 446	4 820	649

Tabla 1. Población, infectados y fallecidos por la COVID-19 en las cinco provincias de Castilla-La Mancha

— Reflexionar sobre la información que aportan los datos y los indicadores epidemiológicos calculados.

Preguntas

— ¿Qué columna representa la incidencia de la COVID-19 en cada provincia?
— Calcula la tasa de incidencia por 100 000 habitantes. ¿Qué provincia tiene la mayor tasa?
— Calcula la tasa de mortalidad por 100 000 habitantes. ¿Qué provincia tiene la mayor tasa?
— Calcula la tasa de letalidad (como porcentaje). ¿Qué provincia tiene la mayor tasa?
— ¿Crees que es más acertado comparar la incidencia y mortalidad directamente o como tasa? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 2: EVOLUCIÓN EPIDEMIOLÓGICA DE LA COVID-19 EN ESPAÑA

La tabla 2 muestra la evolución de la epidemia por semanas en España entre el 24 de febrero y el 5 de mayo de 2020 (momento a partir del cual dejaron de notificarse el número de personas recuperadas). Los datos se han obtenido del proyecto *Escovid19data* y se muestran datos semanales del número de infectados, fallecidos y recuperados. Estos datos permiten hacer un análisis pormenorizado de la evolución de la pandemia. En este ejercicio hemos preferido agrupar los datos por semanas para trabajarlos más fácilmente, pero se podría hacer un análisis similar con los datos diarios que, además, sería de mayor interés para las autoridades sanitarias. La población en España (obtenida de los datos provisionales del padrón del INE a 1 de enero de 2020) es de 47 431 256 habitantes.

Objetivos

— Conocer y calcular algunas fuentes de datos e indicadores básicos para estudiar la evolución de una epidemia.
— Analizar y comparar la evolución temporal de los resultados obtenidos.
— Reflexionar sobre la información que aportan los datos y los indicadores epidemiológicos calculados.

Preguntas

— Representa gráficamente las curvas de las tres variables que aparecen en la tabla 2 usando la variable *semana* para indicar el tiempo. ¿Qué observas con respecto a la evolución de la epidemia?
— Calcula la tasa de incidencia por 100 000 habitantes para cada semana. ¿En qué semana se produjo una mayor incidencia?
— Calcula la tasa de recuperación por 100 000 habitantes para cada semana. ¿En qué semana esta tasa fue mayor?

Semana	*Inicio*	*Fin*	*Casos*	*Fallecidos*	*Recuperados*
0	24/02	01/03	0	0	0
1	02/03	08/03	44	0	0
2	09/03	15/03	771	16	13
3	16/03	22/03	4279	220	191
4	23/03	29/03	15041	944	1614
5	30/03	05/04	12483	1520	3920
6	06/04	12/04	9390	1344	6072
7	13/04	19/04	8755	1017	6015
8	20/04	26/04	9916	878	12507
9	27/04	03/05	8834	665	3015
10	04/05	10/05	7861	142	5823

Tabla 2. Datos semanales de la epidemia de la COVID-19 en España

— ¿Podrías establecer una relación entre las semanas en las que se producen las tasas de incidencia y recuperación más altas?
— Calcula el porcentaje de cambio de una semana con respecto a la anterior de las tres variables estudiadas. ¿Qué información proporciona esta variable sobre la evolución de la epidemia? ¿Es posible determinar si la epidemia se está expandiendo o remitiendo?

Modelos matemáticos utilizados en epidemiología. El modelo SIR

En general, en los modelos epidemiológicos se supone que los individuos de la población de estudio se encuentran en un grupo de entre varios posibles. Los tres grupos que se van a considerar son el de los *individuos susceptible*s (S), el de los *individuos infectados* (I) y el de los *individuos recuperados o fallecidos* (R). Los modelos más importantes son SI, SIS y SIR, dependiendo de los estados que aparezcan en el modelo. Estos modelos pueden ser deterministas o estocásticos, pero en todos ellos se considera que la interacción se produce al azar.

El modelo SIR es más apropiado para modelizar enfermedades infecciosas que se desarrollan a lo largo del tiempo y en las que superar la enfermedad implica inmunidad, tales como el sarampión o la rubeola. Este modelo fue desarrollado en 1927 por el bioquímico Kermack y el militar, médico y epidemiólogo McKendrick.

En el modelo SIR se relacionan las variaciones de las tres poblaciones mencionadas a través de la tasa de transmisión, que depende de la probabilidad de que una persona enferme al entrar en contacto con un infectado, y de la tasa de recuperación, que depende del tiempo que un individuo tarda en recuperarse.

El significado de individuo susceptible es el de individuo no inmune y que, por lo tanto, puede ser infectado al entrar en contacto con la enfermedad. Los individuos infectados pueden transmitir la enfermedad a individuos susceptibles con los que se relacionen. Los individuos recuperados pueden ser, o bien individuos que han sufrido la enfermedad y han quedado inmunes (al menos por un período de tiempo), o bien individuos que han fallecido. En cualquiera de los casos, no pueden transmitir la enfermedad.

Los modelos SIR definen cómo cambian en un tiempo t el número de susceptibles S_t, infectados I_t y recuperados R_t. Cuando la variable tiempo es considerada continua, estos cambios se modelizan usando ecuaciones diferenciales (Gómez y López, 2017; Grima y Fernández, 2017). Cuando la variable tiempo es discreta, el modelo SIR se puede expresar como se describe a continuación.

Los susceptibles en un tiempo t son los que había en el tiempo anterior, $t-1$, menos los que se han infectado. Los nuevos infectados dependen del número de susceptibles e infectados en el tiempo $t-1$ y una tasa de transmisión β. Cuanto mayor es β, mayor será el número de contagios por contacto. El número de contactos totales entre susceptibles e infectados en el tiempo $t-1$ es $I_{t-1} \cdot S_{t-1}$, por lo que los nuevos infectados en el tiempo t serán $(\beta / N) \cdot I_{t-1} \cdot S_{t-1}$. El término β / N se utiliza para que la escala de β sea directamente comparable con la tasa de recuperación (ver más abajo).

Los recuperados en el tiempo t serán los recuperados en el tiempo anterior, $t-1$, más los nuevos recuperados. En este caso, suponemos una tasa de recuperación γ, por lo que los nuevos recuperados son $\gamma \cdot I_{t-1}$.

De manera similar, los infectados en el tiempo t, I_t, serán los infectados en el tiempo $t-1$ más los nuevos infectados menos los nuevos recuperados.

En resumen, cuando t indica un tiempo discreto (por ejemplo, días o semanas), el modelo SIR se puede escribir de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} S_t &= S_{t-1} - (\beta/N) \cdot I_{t-1} \cdot S_{t-1} \\ I_t &= I_{t-1} + (\beta/N) \cdot I_{t-1} \cdot S_{t-1} - \gamma \cdot I_{t-1} \\ R_t &= R_{t-1} + \gamma \cdot I_t \end{aligned}\right\}.$$

Los parámetros β y γ controlan el desarrollo de la epidemia. Intuitivamente, si se infectan personas más rápido de lo que se recuperan el número de infectados irá creciendo, mientras que si ocurre al revés se llegará a una situación en la que no hay infectados de manera muy rápida y la epidemia se detendrá.

En el caso del modelo SIR, el cociente β / γ es también el número reproductivo básico, R_0. Este número mide el promedio de nuevas personas infectadas que genera una persona infectada. Si es mayor que 1 (es decir, la tasa de transmisión es mayor que la de recuperación) la enfermedad se propagará, mientras que si es menor que 1 (es decir, la tasa de transmisión es menor que la de recuperación) la enfermedad se detendrá. Por tanto, el estudio de β, γ y R_0 es fundamental para determinar cuál será la evolución de la enfermedad. De manera más general, el número de reproducción efectiva, $R_0 \cdot S_t / N$, nos indica también cómo será la propagación en un momento dado; valores menores que 1 indican que la propagación de la enfermedad se irá deteniendo. Como S_t / N es la fracción de susceptibles en la población, cuando el número de susceptibles sea muy pequeño (comparado con N) la expansión de la enfermedad será más difícil porque casi todos los sujetos estarán ya infectados o recuperados.

Por último, la inmunidad de grupo ocurre cuando una proporción grande de la población es inmune a la enfermedad (porque la ha pasado o ha sido vacunada). El umbral a partir del cual se adquiere la inmunidad de grupo es $1-(1 / R_0)$ (Grima y Fernández, 2017). Por tanto, este umbral va a depender del número reproductivo básico, y a mayor R_0 mayor será la fracción de inmunizados necesarios para detener la epidemia.

ACTIVIDAD 3: GRIPE EN ESTADOS UNIDOS

Mahaffy (2018) describe el uso de modelos SIR discretos para el estudio de casos de gripe (Tipo A). Estos datos fueron obtenidos por el Centro de Control de Enfermedades de EE.UU. (Center for Disease Control) durante la temporada de gripe 2004-05. Para ello se analizaron 157 759 muestras provenientes de personas con síntomas de gripe. La tabla 3 muestra los datos del número de infectados por semanas, siendo

Semana	*N.º de casos – I_t*	*N.º de susceptibles – S_t*
0	3	157 756
1	2	157 754
2	7	157 747
3	12	157735
4	9	157 726
5	10	157 716
6	27	157 689
7	21	157668
8	36	157 632
9	63	157 569
10	108	157 461
11	255	157 206
12	472	156 734
13	675	156 059
14	580	155 479
15	844	154 635
16	974	153 661
17	1 096	152 565
18	1 354	151 211
19	1 335	149 876
20	1 109	148 767
21	936	147 831
22	627	147 204
23	476	146 728
24	295	146 433
25	164	146 269
26	94	146 175
27	37	146 138
28	26	146 112
29	15	146 097
30	8	146 089
31	5	146 084
32	3	146 081
33	1	146 080
34	2	146 078
35	0	146 078
36	2	146 076
37	1	146 075
38	6	146 069
39	0	146 069
40	0	146 069
41	1	146 068
42	0	146 068
43	0	146 068
44	0	146 068
45	1	146 067
46	0	146 067
47	3	146 064
48	0	146 064

Tabla 3. Datos de la gripe A del CDC (Mahaffy, 2018) para estimar las tasas de transmisión y recuperación. El grupo de estudio lo integran 157 759 personas

la semana 0 la última semana de septiembre de 2004 que fue el comienzo de la temporada de gripe. El número de susceptibles de contraer la enfermedad para cada semana se obtiene restando del total de 157 759 muestras analizadas las que corresponden a infectados desde el inicio hasta la semana en cuestión.

Mahaffy (2018) estima una tasa de transmisión de 3,9928 y una tasa de recuperación de 3,510, lo que implica un número reproductivo básico de 1,135.

Para el estudio de estos datos con el modelo SIR hemos desarrollado una actividad con GeoGebra (figura 1) en la que se han introducido los datos de la tabla 3 en la hoja de cálculo y se incluyen dos deslizadores para las tasas de transmisión y recuperación, por lo que se puede buscar el mejor ajuste de manera interactiva. Este ejemplo está disponible en la dirección <https://www.geogebra.org/m/sh6dndzd> y se puede usar para analizar el modelo SIR y realizar las actividades propuestas a continuación.

Objetivos

- Conocer y ajustar el modelo SIR para el estudio de enfermedades infecciosas y epidemias.
- Analizar y comparar distintos escenarios epidémicos en función de las tasas de transmisión y recuperación.
- Reflexionar sobre el uso de modelos SIR en epidemiología.

Preguntas

- Ajusta un modelo SIR con valores de $\beta = 2$ y $\gamma = 1$. La curva estimada de infectados, ¿ajusta bien a los datos? ¿Qué observas en la curva de infectados y recuperados?
- Ajusta un modelo SIR con valores de $\beta = 1$ y $\gamma = 2$. La curva estimada de infectados, ¿ajusta bien a los datos? ¿Qué observas en la curva de infectados y recuperados?
- Ahora intenta dar valores a beta y gamma para que se parezcan a los mencionados en Mahaffy (2018), que se detallan al inicio de esta activi-

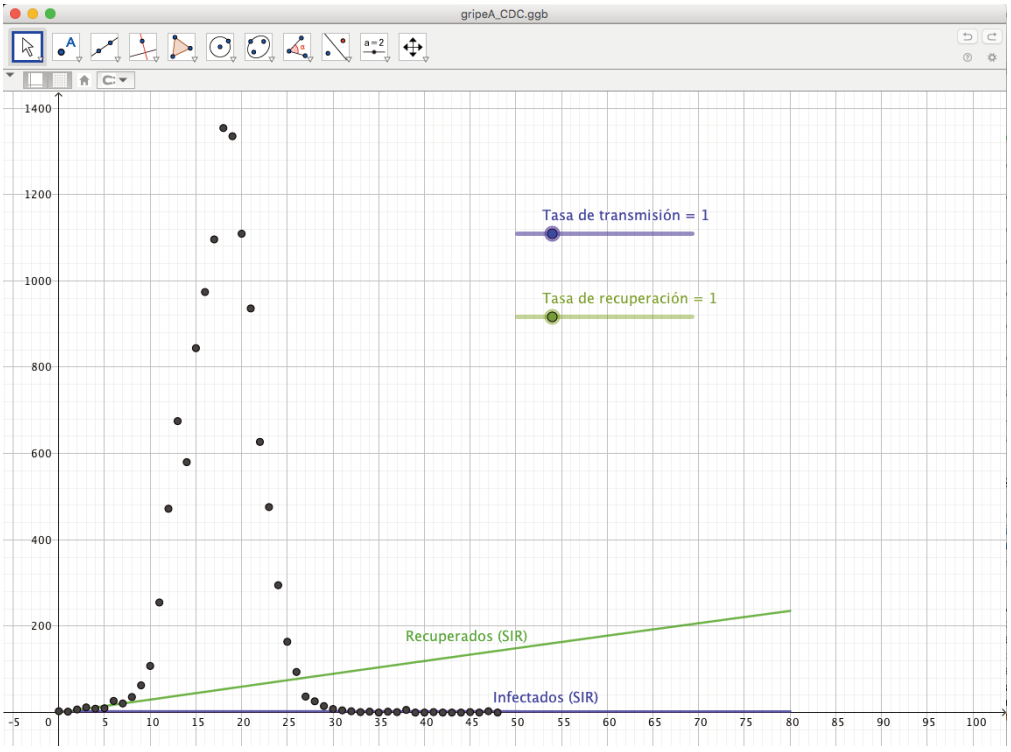


Figura 1. Ejemplo interactivo con GeoGebra para estimar las tasas de transmisión y recuperación con los datos de la gripe A del CDC (Mahaffy, 2018)

dad. La curva estimada de infectados, ¿ajusta bien a los datos? ¿Qué observas en la curva de infectados y recuperados?

ACTIVIDAD 4: INTERVENCIONES EN UNA EPIDEMIA

A la hora de controlar la evolución de una epidemia se pueden realizar distintas intervenciones para intentar modificar las tasas de transmisión (Mahaffy, 2008), la tasa de recuperación o reducir la población susceptible. Por ejemplo, decretar un confinamiento de la población reduce los contactos y, por tanto, el valor de la tasa de transmisión. Utilizar mejores medicamentos puede hacer que el tiempo de recuperación sea menor, lo que hace aumentar la tasa de recuperación. Por último, una campaña de vacunación puede reducir la población susceptible incluso antes de que empiece una epidemia, y esto tendrá un efecto importante en su evolución, llegando incluso a evitar una propagación generalizada de la enfermedad (Grima y Fernández, 2017).

El modelo SIR se puede utilizar para estudiar distintas medidas de control e intervención en una epidemia (incluso antes de que esta aparezca). Proponemos ahora una serie de actividades para estudiar cómo son estos impactos.

Objetivos

- Conocer algunas medidas de control de epidemias y su análisis mediante modelos SIR.
- Reflexionar sobre la interpretación de los parámetros de un modelo SIR y su relación con intervenciones reales sobre epidemias.
- Analizar el efecto de estas intervenciones usando modelos SIR.

Preguntas

- Supón que desde el inicio de la epidemia (semana 0) se decretan medidas de aislamiento de la población de manera que se reducen los contactos y que la tasa de transmisión pasa a ser de $\beta = 1{,}5$. El valor de la tasa de recuperación no cambia con respecto al de los datos reales. ¿Qué impacto tendría esto sobre la evolución de la epidemia comparada con la evolución real?
- Supón que desde el inicio de la pandemia (semana 0) se utiliza un medicamento que acelera la recuperación de los pacientes de manera que la tasa de recuperación se eleva a $\gamma = 5$. El valor de la tasa de transmisión no cambia con respecto al de los datos reales. ¿Qué impacto tendría esto sobre la evolución de la epidemia comparada con la evolución real?
- Supón que, en previsión de la pandemia, se realiza una campaña de vacunación de manera que el 50 % de la población está inmunizada en la semana 0 (es decir, no forman parte de los susceptibles sino de los recuperados). El valor de las tasas de transmisión y recuperación no cambia con respecto al de los datos reales. ¿Qué impacto tendría esto sobre la evolución de la epidemia comparada con la evolución real?

ACTIVIDAD 5: COVID-19 EN ALBACETE

La actividad que se presenta a continuación simula con GeoGebra el modelo SIR de manera discreta, de modo que se calcula el número de susceptibles, infectados, recuperados y fallecidos dando saltos diarios. Aunque lo lógico sería obtener valores enteros positivos, esto no es posible, dado que se trabaja con probabilidades y tasas de prevalencia e incidencia. Hemos simulado diversas situaciones obtenidas modificando el número medio de contactos por persona (este valor está relacionado con el cumplimiento de las normas referentes a vida social, profesional o familiar), la probabilidad de contagio y la tasa de supervivencia. La modificación de estos parámetros se ha realizado usando deslizadores.

Hemos hecho una simulación simple de la evolución de la pandemia en la provincia de Albacete. Considerando que el número de habitantes de la ciudad de Albacete es de aproximadamente 388 126 y que, hasta el día 26 de julio, la información oficial que se tiene es de 4 063 infectados y 577 fallecidos por coronavirus en la provincia. La veracidad de estos datos no es relevante y es sabido que están bastante lejos de la realidad, pero solo pretendíamos aprovechar la situación para realizar un ejercicio escolar relacionado con algunos conceptos básicos propios de la epidemiología.

Vamos a simular, con la ayuda de GeoGebra, la evolución diaria de la enfermedad en cuanto a personas susceptibles, infectadas, recuperadas y fallecidas, así como el número diario de contagios nuevos, personas recuperadas y fallecidas. Habría que aclarar que hemos considerado una duración media de la enfermedad y, por lo tanto, de días durante los cuales se puede transmitir la enfermedad, de 15 días (este valor ha demostrado ser muy variable en la realidad) y que hemos empezado con 19 infectados (las autoridades sanitarias consideran que el análisis de una pandemia se debe iniciar cuando se llega a los 5 casos por cada 100 000 habitantes). La modelización permite observar la evolución de la enfermedad durante 200 días (desde el inicio del mes de marzo hasta mediados de septiembre). Este ejemplo está disponible en la dirección <https://www.geogebra.org/m/xbthdwt7>.

Para poder estudiar, sin repetir los cálculos y procedimientos, la evolución de la enfermedad en muy diversas situaciones, usaremos deslizadores (figura 2). El primero de ellos permite modificar la tasa diaria de interacción, entendiéndose esta como el número medio de contactos diarios por persona. El segundo deslizador tendrá como misión el permitir modificar la probabilidad de contagio.

Con el tercer deslizador modificaremos la tasa de mortalidad o, si se prefiere, su complementario, es decir, la tasa de recuperación.

Los valores obtenidos corresponden a la población de susceptibles, infectados, recuperados, fallecidos, contagios nuevos diarios, número de individuos recuperados y fallecidos a diario.

Con los datos iniciales que hemos comentado los estudiantes podrían calcular la tasa de prevalencia, tasa de incidencia, tasa de mortalidad, población total de contagios, población total de recuperados, población total de fallecidos, la población máxima infectada simultáneamente, el máximo de contagios diarios, el máximo de recuperaciones diarias y el máximo de fallecimientos al día.

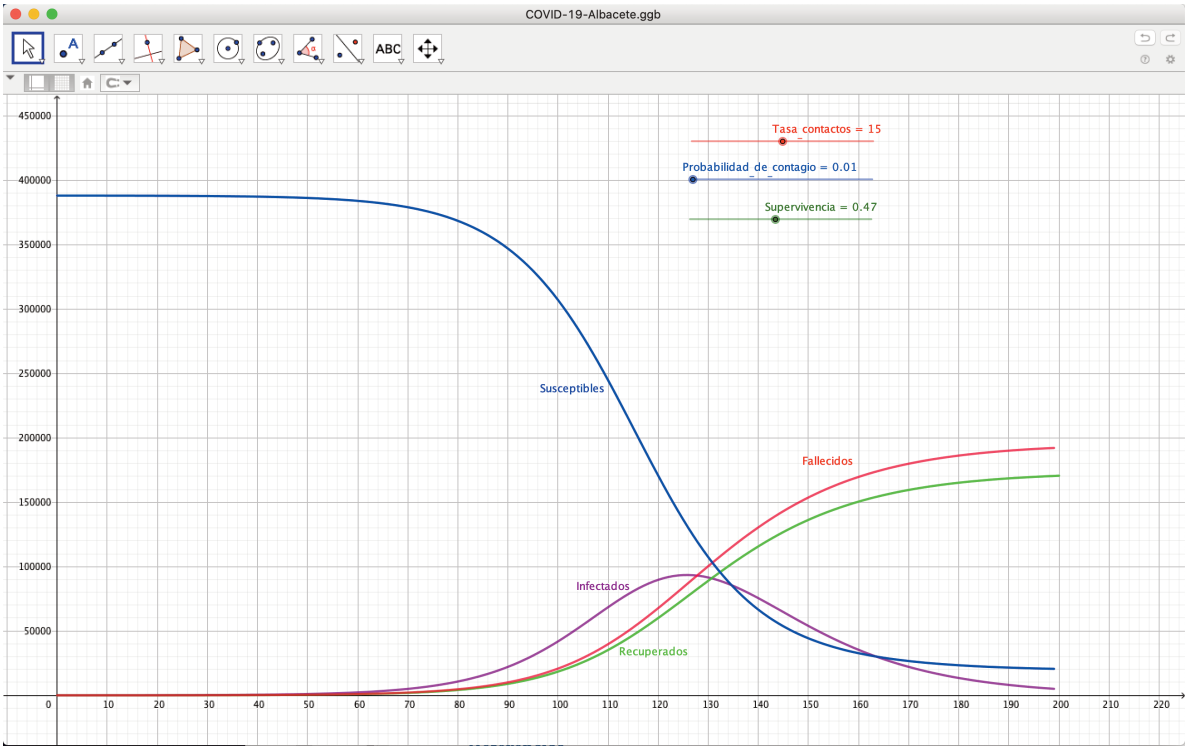


Figura 2. Ejemplo con los datos de COVID-19 en Albacete hasta el 27 de julio de 2020

Del mismo modo, se podría obtener una aproximación muy rudimentaria al número reproductivo básico usando cocientes entre contagiados y recuperados:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{tasa de trasmisión}}{\text{tasa de recuperación}}.$$

Se finalizaría representando gráficamente los elementos que marcan la evolución de la pandemia. Para ello los estudiantes tendrán que trabajar relaciones entre los valores de los ejes con el fin de mostrar en pantalla valores que se mueven en rangos muy diferentes, como son, por ejemplo, los correspondientes al tiempo y al número de personas susceptibles.

Objetivos

- Profundizar en el análisis del uso de los modelos SIR.
- Estudiar el impacto de los distintos parámetros de un modelo SIR en la evolución de la epidemia.
- Calcular con GeoGebra algunos indicadores epidemiológicos a partir de las estimaciones del modelo SIR.

Preguntas

- Comienza el estudio usando los valores oficiales para el cálculo de la probabilidad de contagio y la tasa de supervivencia y después modifica dichos valores para ver qué ocurre. Según los resultados obtenidos, ¿crees que es importante tener en cuenta las medidas de distanciamiento social limitando el número medio de contactos diarios?
- Calcula una aproximación al número reproductivo básico.
- ¿Cuál es el número máximo de infectados? ¿Cuántos de los infectados se han recuperado?
- ¿Cuántos han fallecido? ¿Qué cantidad de habitantes no se han visto afectados por la enfermedad?
- ¿Cuál ha sido la máxima cantidad de gente infectada a la vez? ¿Y el máximo número de contagios, recuperados o fallecidos diarios?
- Calcula las tasas de incidencia y de prevalencia diarias. Calcula la tasa de incidencia acumulada.

Referencias bibliográficas

Gómez, V., y M. J. Haro (2014), «Una aproximación sencilla al uso de las matemáticas en epidemiología», *Suma*, n.º 77, 45-57.

Gómez, V., y E. López (2017), *Teoría y problemas resueltos de matemática aplicada y estadística para farmacia*, Editorial Paraninfo, Madrid.

Grima, C., y E. Fernández (2017), *Las matemáticas vigilan tu salud*, Next Door Publishers, Pamplona.

Mahaffy, J. M. (2018), *Mathematical Modeling. Discrete SIR Models. Influenza*, <https://jmahaffy.sdsu.edu/courses/f09/math636/lectures/SIR/sir.html> (Accedido el 6/8/2020).

Proyecto Escodiv19data, *Escovid19data: Capturando datos de COVID-19 por provincias en España*, <https://github.com/montera34/escovid19data> (Accedido el 6/8/2020).

Virgilio Gómez Rubio
Universidad de Castilla-La Mancha
<Virgilio.gomez@uclm.es>

María José Haro Delicado
Universidad de Castilla-La Mancha
<MariaJose.Haro@uclm.es>

Trigonometría en el Renacimiento europeo. Un recurso de aula

Carlos Dorce Polo

SUMA+ núm. 96
pp. 21-31
Artículo recibido en *Suma* en abril de 2019 y aceptado en septiembre de 2020

En el siglo XVI, el italiano Niccolò Tartaglia y el inglés Leonard Digges publicaron tratados trigonométricos en los que medían alturas y longitudes con métodos que actualmente se incluyen en todos currículos de secundaria. Estas cuestiones se planteaban de manera efectiva a partir de la experiencia que militares, ingenieros y agrimensores tenían para resolver matemáticamente sus problemas cotidianos. Esta es una propuesta de cómo la introducción de la historia de las matemáticas en las aulas puede ser determinante para conseguir que esta asignatura interese y motive al alumnado del siglo XXI.

Palabras clave: Historia de las matemáticas, Innovación pedagógica, Enseñanza de las matemáticas, Niccolò Tartaglia, Leonard Digges.

Trigonometry in the european Reinassance. A classroom resource // In the 16th century, Niccolò Tartaglia in Italy and Leonard Digges in England published trigonometric treatises in which they measured heights and lengths with methods that are now included in all secondary school curricula. These questions were based on the experience that military men, engineers and surveyors had in solving their everyday problems mathematically. This paper is a proposal of how the introduction of the History of Mathematics in the classroom can be decisive in ensuring 21st century students to be motivated and interested in Mathematics.

Keywords: History of Mathematics, Pedagogical innovation, Mathematics teaching, Niccolò Tartaglia, Leonard Digges.

En el Renacimiento europeo, la trigonometría fue objeto de un desarrollo considerable gracias, sobre todo, a la obra *De triangulis omnimodis* de Johannes Müller (1436-1476), también conocido como Regiomontano, que se publicó póstumamente en 1533. Durante la Edad Media, la trigonometría había sido muy estudiada por los matemáticos musulmanes en obras de personajes de la talla de Abū'l-Wafā' al-Būzŷānī (940-998), Abū al-Rayḥām al-Bīrūnī (973-1048), Ibn Muᶜādh al-Ŷayyānī (989-1079) y Naṣīr al-Dīn al-Ṭūsī (1201-1274), entre otros muchos, elevaron esta disciplina más allá del punto en la que dejaron los griegos Hiparco de Rodas(s. II a. C.), Teodosio de Bitinia (s. I a. C.), Menelao de Alejandría (s. I a.C.) o Claudio Ptolomeo (s. II d. C.) (Van Brummelen, 2009). Posiblemente, a través del *De triangulis omnimodis*, la tradición trigonométrica árabe basada en las *Tablas de Toledo* llegó a Europa Occidental (Lorch, 1971) y, a partir de aquí, cada vez fueron más los matemáticos que la utilizaron para medir el mundo que los rodeaba. Johann Werner

(1468–1522), por ejemplo, siguiendo los pasos de Regiomontano escribió un *De triangulis sphaericis* que, pese a que no fue publicado hasta 1907, significó una de las obras de trigonometría esférica más importantes escritas hasta el momento. De hecho, es en esta obra donde nos empezamos a encontrar con las fórmulas de la prostaféresis que permitían evitar los largos cálculos derivados de productos de números de muchos decimales:

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

Pese a que Paul Wittich (c.1545–1586) y Tycho Brahe (1546–1601) ya las utilizaron entre 1565 y 1580, estas fórmulas se popularizaron a través de obras como el *Fundamentum astronomicum; id est, Nova doctrina sinum et triangulorum* (1588) de Nicholas Reimarus Ursus (1551–1600). Cabe decir que Joost Bürgi (1552–1632), amigo de Wittich, también parece que tuvo conocimiento de estos métodos antes que el propio Ursus y hay que recordar que Bürgi fue uno de los inventores de los logaritmos, los cuales fueron ideados justamente para reducir la labor de los cálculos largos y complicados.

Por otro lado, al igual que al-Bīrūnī había utilizado un cuadrante y una serie de cálculos trigonométricos para medir la circunferencia terrestre (Dorce, 2013), la trigonometría empezó a jugar un papel determinante en las medidas propias de la geografía y de la navegación. Desde el descubrimiento español de América en 1492, la búsqueda de rutas óptimas y la determinación de las coordenadas geográficas del Nuevo Mundo despertaron la necesidad de los cálculos geodésicos. Por otro lado, la aparición de la pólvora hizo necesario una nueva concepción de la arquitectura militar, de la fortificación y de las tácticas militares. Por ese motivo, el siglo XVI es el momento en el que aparecen en Europa toda una serie de tratados que intentan dar una respuesta práctica a toda esta problemática derivada del día a día. Toda esta nueva literatura tiene un primer origen en el *De architectura Libri Decem* de Vitruvio (s. I d. C.), impreso por primera vez en Roma en 1486, y el *Rey Militaris Instituta* de Flavio Vegecio Renato (s. IV d. C.), que ya circulaba por Europa traducido al francés en el siglo XIII y al inglés a finales del siglo XV. En este sentido, una de las primeras obras de este género impresas en Europa fue el *De Re Militari libri XII* (1472) de Roberto Valturio (1413–c.1485) aunque parece que interesaba más desde un punto de vista filológico que por el militar propiamente dicho (Kruft, 1990). Por su parte, uno de los matemáticos civiles que más influyó en todo este campo fue Niccolò Fontana, más conocido por su sobrenombre de Tartaglia (c.1499–1557), cuyos *Nova Scientia* (1537) y *Quesiti et inventioni diverse* (1537) establecieron resultados clave en balística que permitieron reformular las estructuras arquitectónicas construidas hasta entonces para fortificar ciudades y castillos.

¿Hasta qué punto una obra escrita en el siglo XVI está didácticamente vigente y puede ser utilizada en nuestras aulas actuales? No hace mucho, Massa-Esteve (2014) ha planteado justamente el uso de la *Nova Scientia* como base de ciertas actividades sobre la historia de las matemáticas que se pueden llevar a cabo perfectamente en una de nuestras aulas. La secuencia didáctica empieza con la presentación del renacimiento italiano y del propio Niccolò Tartaglia (personaje que puede dar mucho juego), tras lo cual se ha de analizar la obra relacionándola con los objetivos del autor. Así, se puede animar a los alumnos a construir alguno de los distintos goniómetros que han de servir para tomar medidas angulares y que darán paso a poder adquirir nuevas ideas y perspectivas. Las matemáticas no son una disciplina cerrada, muerta y sin emociones (Bidwell, 1993) y su relación con el contexto histórico aporta una serie de beneficios que han sido ampliamente estudiados en las últimas décadas en, por ejemplo, Marshall y Rich (2000), Wilson y Chauvot (2000), Massa-Esteve (2003 y 2010), Siu (2007), Jankvist (2009) y Massa-Esteve, Guevara, Romero y Puig-Pla (2011).

Con todo, se puede plantear concretamente un estudio de las medidas de distancias que encontramos en un tratado como el *Nova Scientia* y transportarnos por un momento a la vida de un ingeniero europeo del siglo XVI y sus preocupaciones, intereses, un rol que, sin duda, puede motivar a nuestros estudiantes.

El libro III del *Nova Scientia*

El *Nova Scientia* está dividido en tres libros. El primero contiene catorce definiciones, cinco supuestos, cuatro sentencias comunes y seis proposiciones orientadas a trazar la trayectoria de un cuerpo pesado en distintas situaciones. El libro II, por su parte, contiene catorce definiciones, cuatro supuestos y nueve proposiciones. En la proposición IV, Tartaglia discute sobre la inclinación que ha de tener un cañón, y remata el tema en la proposición VIII donde indica que una inclinación de 45º es la óptima para obtener el máximo alcance del proyectil. Su razonamiento se basa en la semejanza de triángulos y Massa-Esteve (2014) sugiere que en clase, el profesor puede debatir con sus alumnos una pregunta como la que aquí resuelve Tartaglia: ¿qué inclinación ha de tener un cañón para lograr el máximo alcance del proyectil?

El libro III de la *Nova Scientia* se inicia con una serie de definiciones sobre horizonte, plano perfecto, altura, distancia diametral o hipotenusa, distancia horizontal, que conducen a la comprobación de si una regla y una escuadra están bien construidas y a la construcción de «un instrumento que puedo usar para nivelar el suelo EF y […] medir alturas, anchuras, profundidades y distancias horizontales y diametrales de objetos perceptibles» (Tartaglia, 1537, III, 22v). Con este *goniómetro cuadrado* (figura 1), Tartaglia determina la horizontalidad de un plano y en la proposición VIII inicia la determinación de alturas:

> Me gustaría encontrar la altura de un objeto perceptible cuya parte es accesible y, usando la misma operación, me gustaría saber también la hipotenusa o distancia diametral (Tartaglia, 1537, III, 24r).

Siendo AB (figura 1) la altura del objeto perceptible y $EF = CB$ la distancia entre el punto de observación y la perpendicular al objeto que se quiere medir (BF es la distancia entre el ojo y el suelo), situado el goniómetro IGH de modo que la visual NM coincida con la *hipotenusa* EA y la diagonal HG sea perpendicular al suelo (de H cuelga una plomada que hace las funciones de medidor de ángulos), entonces:

- Los ángulos $\angle EAF$ y $\angle GKH$ son ambos rectos (*Elementos*, libro I, tercer postulado).
- Los ángulos $\angle EAF$ y $\angle KHG$ son iguales (*Elementos*, libro I, proposición 32).
- Por tanto, los triángulos $\triangle GKH$ y $\triangle EAF$ son semejantes, al tener los mismos ángulos y sus lados proporcionales (*Elementos*, libro VI, proposición 4).
- Los triángulos $\triangle GIL$ y $\triangle EAF$ también son semejantes y sus lados también son proporcionales (*Elementos*, libro VI, proposición 20).
- Consecuentemente: $EF / FA = GI / IL$.
- Como GI e IL son los lados del goniómetro cuadrado, $GI = IL$. Por lo tanto, $EF = FA$.
- Finalmente, $CB = EF$ (Elementos, libro I, proposición 34). Por lo tanto, $FA = CB$ (*Elementos*, libro I, primera noción común).
- Así pues, la altura es igual a $AB = FB + FA$.

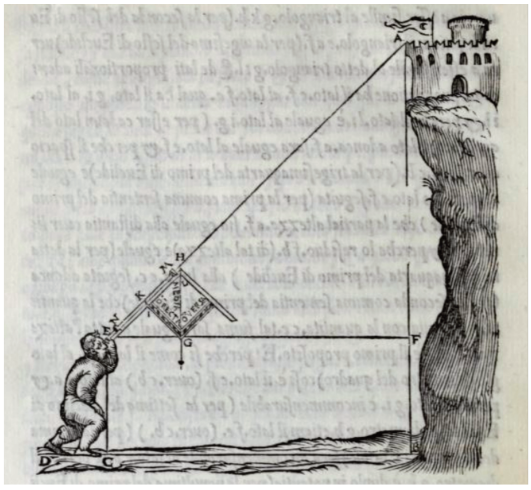


Figura 1. Goniómetro cuadrado

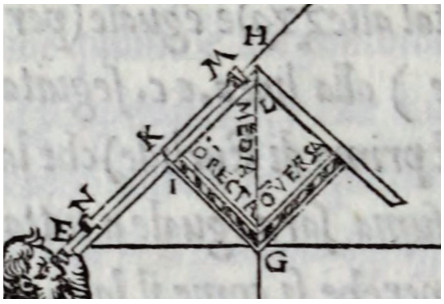


Figura 2. Detalle de la figura 1

Para calcular la distancia diametral EA, Tartaglia parte de la inconmensurabilidad demostrada por Euclides entre el lado y la diagonal de un mismo cuadrado y se remite al teorema de Pitágoras (*Elementos*, libro I, proposición 47) para afirmar que $EA^2 = 2CB^2$. Para ejemplificar el método, Tartaglia parte de $CB = 353$ pasos y $EF = 2$ pasos, con lo que la altura es igual a $AB = 355$ pasos. Por otro lado,

$$EA^2 = 249\,218 \quad \Rightarrow \quad EA = 499\tfrac{217}{998}$$

que es «la raíz cuadrada más cercana» (Tartaglia, 1537, III, 24v).

En la proposición IX, Tartaglia contempla la posibilidad de que la plomada que cuelga de H no coincida con la diagonal HG. Especifica que si dicha plomada cae del lado de la *sombra recta* (lado izquierdo en la figura 2), entonces la altura FA será mayor que la distancia CB y si, por el contrario, la plomada cae del lado de la *sombra conversa*, entonces FA será menor que CB. En ambos casos, para determinar la altura, Tartaglia divide el lado IG de su cuadrante en 12 partes —Tartaglia dice que los «antiguos» llamaron a esta división *escala altimétrica* (Tartaglia, 1537, III, 22v). En el folio 26v, especifica que cada una de estas 12 partes puede ser dividida, a su vez, en 12 minutos—. Igual que en el caso anterior, se cumple (figura 3) que $EF/FA = GI/IL$, con lo que si n es la longitud de IG medida en las 12 divisiones del lado del cuadrante y, por lo tanto $IL = 12$, entonces se tiene que:

$$FA = \frac{12}{n} CB.$$

Por ejemplo, si $CB = 256$ pasos y $n = 9$, entonces:

$$AB = FB + FA = 2 + \frac{12}{9} \cdot 256 = 343\tfrac{1}{3} \text{ pasos.}$$

En la proposición X:

> Me gustaría medir artificialmente la altura de un objeto perceptible cuya base no puede ser vista o no es accesible. Por la misma operación, me gustaría investigar la hipotenusa o distancia diametral de dicha altura y también la distancia horizontal [...] (Tartaglia, 1537, III, 28r).

En este caso, la demostración de Tartaglia parte de hacer dos mediciones con su cuadrante. De este modo, sea AB la altura que hay que medir (figura 4), FQ la distancia entre el ojo y el suelo, y los cuadrados MLO y GHJ las correspondientes posiciones de los cuadrantes cuadrados utilizados anteriormente, con las respectivas medidas $ON = m$ pasos y $JI = n$ pasos, en los que cada lado del cuadrante tiene 12 pasos. Conocida la distancia $d = QC$, entonces:

— Los triángulos $\triangle EPA$ y $\triangle HJI$ son semejantes. Por lo tanto:

$$\frac{EP}{AP} = \frac{HJ}{JI} = \frac{12}{n}.$$

— Los triángulos $\triangle FPA$ y $\triangle LON$ son semejantes. Por lo tanto:

$$\frac{FP}{AP} = \frac{OL}{ON} = \frac{12}{m}.$$

— Como $d = FP - EP$, entonces:

$$d = FP - EP = \left(\frac{12}{m} - \frac{12}{n}\right) AP.$$

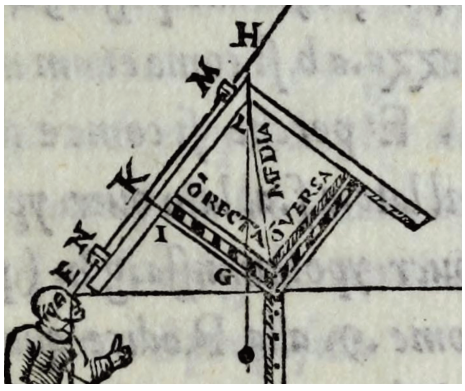


Figura 3

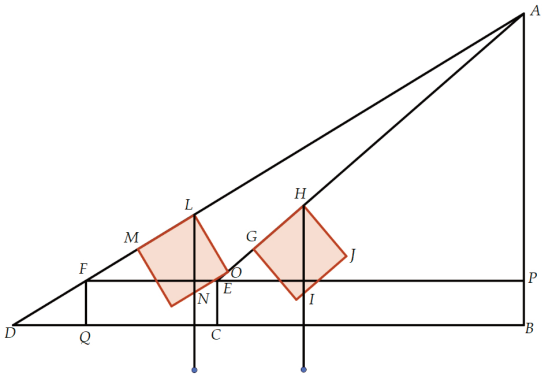


Figura 4

— Por lo tanto $AP = \frac{d}{p}$ donde $p = \frac{12}{m} - \frac{12}{n}$.

Tartaglia termina este libro III con la construcción de otro goniómetro para medir distancias horizontales y diametrales consistente en una *dioptra* en forma de cruz ensamblada en un cuadrado pensado para medir ángulos. Tartaglia utiliza este nuevo instrumento en la proposición XII para determinar dichas distancias a un punto A dado (figura 5).

Siguiendo los razonamientos de Tartaglia, en un primer momento se alinea la dioptra BC con el punto A y tras un desplazamiento perpendicular de modo que el centro del goniómetro pase del punto K al punto N (figura 6), entonces:

— Los ángulos $\angle INH$ y $\angle NAK$ son iguales (*Elementos*, libro I, proposición 29).
— Los ángulos $\angle IHN$ y $\angle NKA$ son ambos rectos (*Elementos*, libro I, tercer postulado).
— Por lo tanto, los triángulos $\triangle IHN$ y $\triangle NKA$ son semejantes, al tener los mismos ángulos, y sus lados proporcionales (*Elementos*, libro VI, proposición 4).
— Consecuentemente: $HI / NH = KN / KA$.
— Tartaglia divide cada lado de su goniómetro en 24 *puntos* con los que determina la longitud de IH.
— Por lo tanto, suponiendo conocidas $d = KN$, $NH = 12$ pasos y $HI = n$ pasos, se tiene:

$$KA = \frac{12d}{n}.$$

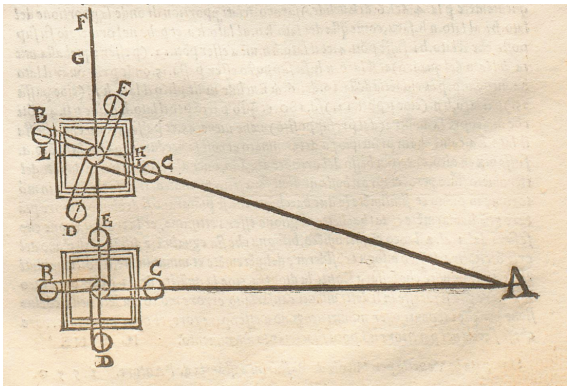


Figura 5

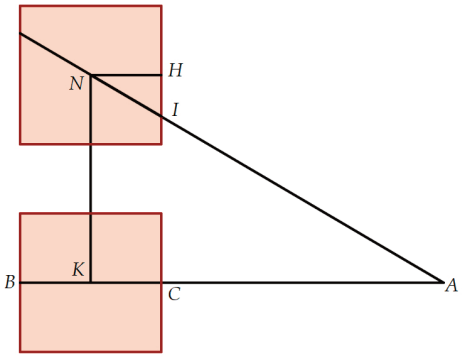


Figura 6

Nos encontramos cálculos muy parecidos en otras obras renacentistas como el *Del modo di misurare le distance, le superficie, i corpi, le piante, le provincie, le prospettive e tutte le altre cose terrene* (1564) de Cosimo Bartoli (1503–1572) o la *Teorica y practica de fortificacion* (1598) del andaluz Cristóbal de Rojas (1555–1614). Además, en la primera de ellas también vemos cómo medir profundidades a partir de los ángulos determinados por goniómetros y astrolabios (Bartoli, 1564, I, 46v-47r):

— Sea DG la profundidad que se ha de medir y DF la distancia hasta la fortaleza que hay que expugnar (figura 7: el punto G no está señalado).

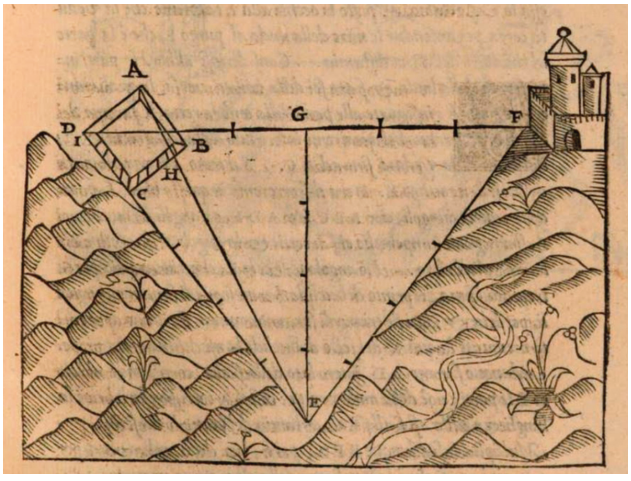


Figura 7

— Remitiéndose al capítulo III del mismo libro, Bartoli mide la distancia DF con el *cuadrante geométrico*: si la intersección de la visual EF con el lado CD (figura 7), dividido en 60 partes, es el punto F (no marcado en la figura), entonces:

$$\frac{AD}{DF} = \frac{BE}{AB} \quad \Rightarrow \quad BE = \frac{60^2}{DF}.$$

— Determinada $d = DF$, del mismo modo se determina la distancia $c = DE$ (figura 8).

— Suponiendo que $d = 2DG$, se tiene entonces que $GE = \sqrt{c^2 - d^2}$ (*Elementos*, libro I, proposición 47).

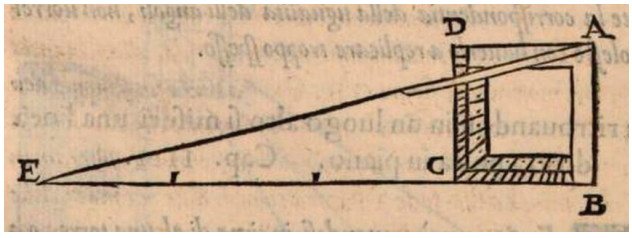


Figura 8

El *Tectonicon* de Leonard Digges

Otra de las obras renacentistas de las que podemos obtener material para poder ser utilizado en las aulas es el *Tectonicon* (1556) del inglés Leonard Digges (c.1515–c.1559), inventor del *teodolito* y también del *telescopio reflector*. A través de sus diversas ediciones, este tratado, fue una de las bases de la arquitectura inglesa a lo largo del siglo XVI: Digges introdujo la geometría y los instrumentos matemáticos como fundamento de la ingeniería de la época (Bennet, 1993).

El *Tectonicon* se inicia con unas secciones preliminares dedicadas a la aritmética y a la geometría elemental que incluyen el cálculo de áreas de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, círculos, superficies compuestas y poliedros y cilindros en el espacio. También introduce la *regla del carpintero* para medir y hacer algunos cálculos como divisiones y elevar al cuadrado, en cuyo reverso hay representado un cuadrante para medir ángulos. Digges explica cómo los carpinteros miden las longitudes sobre el suelo con tan solo una escuadra (figura 9). Basándose en las proposiciones 33 del libro I y 4 del libro VI de los *Elementos*, si se sabe la longitud del palo ac perpendicular al suelo en el que se apoya la escuadra y el brazo corto de la misma señala al punto d de modo que se conoce la medida de ad, entonces:

$$\frac{ac}{ad} = \frac{ab}{ac} \quad \Rightarrow \quad ab = \frac{ac^2}{ad}$$

es la longitud hasta el punto b buscada.

Otro de los cálculos interesantes que nos encontramos es el de las alturas y las distancias transversales entre dos puntos medida con una *alidada* (figura 10). Sea AB la longitud transversal que se quiere medir (Digges utiliza letras minúsculas) y vamos a denominar M a su punto medio (no marcado en la figura). Trazando una perpendicular MD, todas las medidas se tienen que hacer sobre ella. A partir de aquí, estas medidas parten de la razón entre el cociente entre la longitud fija del brazo de la alidada (desde la punta derecha hasta la punta izquierda) y la longitud que hay entre el ojo del observador y el propio brazo en la regla de la alidada, a las que llamaremos l y λ, respectivamente. Situado el observador en la posición C de la figura, cuya distancia $d_1 = CM$ es conocida, de modo que $\lambda = l$, entonces Digges dice que $AB = d_1$. En cambio, si ahora el observador se mueve hasta la posición D en la que $\lambda = k \cdot l$ para una cierta razón k, entonces $AB = (1/k) \cdot \lambda$. Como ejemplo, Digges determina la distancia $CM = 12$ pasos en la que se produce y, por lo tanto, obtiene $AB = 12$ pasos. Del mismo modo, si $DM = 36$ pasos, entonces D será el punto en el que $\lambda = 3 \cdot l$ y, por lo tanto, también se tendrá $AB = 12$ pasos.

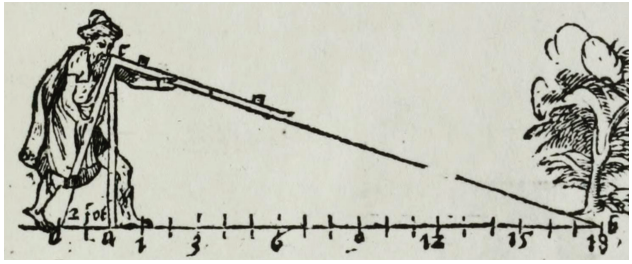


Figura 9

Este tipo de alidada, también conocida como *ballestina*, fue descrita por primera vez en la obra de Levi ben Gerson (1288–1344) y en el siglo XVI fueron los navegantes portugueses los primeros en utilizarla para hacer mediciones marítimas (Mörzer Bruyns, 1994). A través de los estudios cosmográficos, fue conocida también en el norte de Europa y William Bourne (c.1535–1582) la describió en 1571 para determinar la altura del sol. También fue conocida y usada en Francia y Holanda, y pronto se idearon mejoras para reducir el error angular que implicaban sus resultados.

Pero, ¿cómo utilizamos esta alidada a partir de dos mediciones independientes separadas por una distancia d conocida? Tras determinar las longitudes $\lambda_1 < \lambda_2$ que en ambas mediciones hay entre el ojo del observador y la posición del brazo, Digges propone restar $\lambda_2 - \lambda_1$ y, entonces, AB es el resultado de dividir el producto $l \cdot d$ entre dicha diferencia. Una vez más, este procedimiento está basado en la semejanza de triángulos. Sea AB la distance que se quiere medir

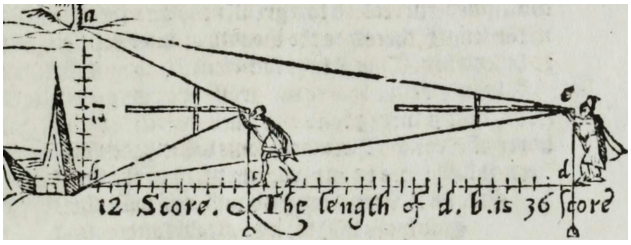


Figura 10

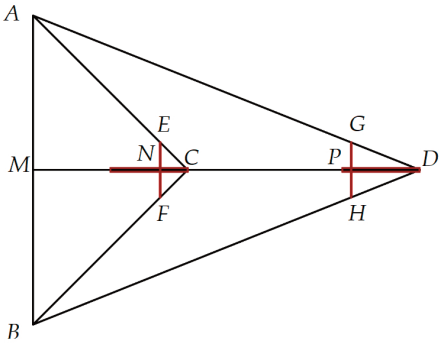


Figura 11

(figura 11), M su punto medio y C y D las respectivas posiciones desde las que se han tomado las longitudes $\lambda_1 = NC$ y $\lambda_2 = PD$ sobre la regla de la ballestina, con la distancia $d = CD$ conocida. Por un lado, al ser los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle EFC$ semejantes, se tiene:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{CM}{NC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{l} = \frac{CM}{\lambda_1}.$$

Por otro, los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle GHD$ también son semejantes y se cumple:

$$\frac{AB}{GH} = \frac{MD}{PD} = \frac{CM + CD}{PD} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{l} = \frac{CM + d}{\lambda_2}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{CM}{\lambda_1} = \frac{CM + d}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad CM = \frac{\lambda_1 d}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$\Rightarrow \quad AB = \frac{l \cdot d}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Propuestas de aula

A partir de todo lo que se ha dicho, es evidente que la trigonometría y las medidas terrestres derivadas de ella que se publicaron en el siglo XVI, ya sea a través de la obra de Tartaglia, Digges o de otros autores contemporáneos, puede ser una fuente de problemas, razonamientos y motivación en nuestras aulas. Veamos unas cuantas propuestas.

1. Obviamente, la primera de ellas es reproducir las medidas en las propias escuelas e institutos, o con cualquier edificio representativo. Por ejemplo, como parte de una clase de trigonometría se puede hacer que los alumnos construyan sus propios goniómetros (solo necesitan un transportador de ángulos, un pequeño tubo y un hilo y un peso que haga de plomada) y en parejas o grupos sigan las explicaciones renacentistas para determinar la altura de un edificio o la distancia que les separa de él (Dorce, 2016). Esta experiencia se realiza cada año con los alumnos de 4.º de Enseñanza Secundaria Obligatoria (edades de 15 y 16 años) de un instituto público de Cataluña, España, y la va-

loración por parte de los estudiantes es siempre óptima. Todos los grupos se desplazan a Barcelona para medir el Hotel Arts (figura 12), situado al lado del mar, con sus instrumentos matemáticos recién construidos. También miden árboles, farolas y distancias concretas en una mañana que el aula se desplaza a las calles de la ciudad para convertirse en un momento tan divertido como interesante.

Para complementar una actividad como esta, el uso de programas informáticos como GeoGebra puede ayudarnos a que los alumnos tengan un mejor entendimiento de la situación. El hecho de que todos los cálculos se basen en la semejanza de triángulos hace que la geometría dinámica también juegue un papel muy importante dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, en la línea definida por Ruthven, Hennessy y Deaney (2008).

Por lo tanto, a partir de las explicaciones básicas propias de la trigonometría y de una introducción histórica de la materia, la secuencia didáctica puede transportar a los alumnos por una aventura que los convierta en expedicionarios que tienen que tomar medidas con un simple transportador de ángulos y una cuerda de una



Figura 12

cierta medida. No cabe duda que este tipo de actividades consiguen que todos los alumnos, ya sea individualmente o en trabajo cooperativo, encuentren su lugar y tengan interés por adquirir el máximo de conocimientos posible de modo que puedan tener éxito en su empresa.

2. Como se ha dicho, la construcción de los instrumentos matemáticos también puede ser uno de los recursos que transporten los contextos históricos y cotidianos al aula. A través de la historia de las matemáticas los alumnos han podido ver hasta qué punto la medición de ángulos sobre el terreno y la semejanza de triángulos sirven para medir distancias. A través de los goniómetros, cuadrantes o astrolabios, podemos obtener una fuente de motivación adicional. Cada vez es más habitual introducir procesos tecnológicos en las clases de matemáticas y en este caso concreto, la preparación de las medidas pasa necesariamente por la construcción de los instrumentos que se van a hacer servir. En este aspecto, aquí también se puede presentar la historia del astrolabio como un dato que haga ver cómo la humanidad ha tenido siempre la necesidad de estar en contacto con su entorno. Remontándonos a las épocas griegas y sus orígenes en tiempos de Hiparco de Rodas (s. II a. C.), el astrolabio fue utilizado por árabes, indios, chinos y europeos durante la Edad Media, siendo el matemático y astrónomo cordobés Azarquiel (m. 1100) uno de los máximos exponentes medievales en su construcción y uso (Dorce, 2008). La influencia islámica se trasladó a la Europa del siglo XVI y pronto aparecieron grandes constructores de astrolabios como Georg Hartmann (1489–1564), Petrus Apianus (1495–1552) o Gemma Frisius (1508–1555). Como se puede ver, aquí se puede abrir una interesante línea de trabajo donde los alumnos pueden ampliar sus horizontes educativos aprendiendo parte de la historia de las matemáticas, la navegación, la astronomía y la geodesia.
3. Otro de los aspectos que aportan los tratados del siglo XVI es el de la trigonometría sin trigonometría. Los libros de texto y materiales

didácticos exponen las definiciones de las razones trigonométricas habituales y estas son aplicadas para resolver los problemas de cálculo de alturas. Como se ha visto, ni Tartaglia ni Digges proponen el cálculo de ninguna razón trigonométrica sino que basan todos sus cálculos en la semejanza de triángulos. Es indudable que ambas resoluciones son equivalentes pero esto nos da una idea de cómo han ido cambiando las ideas a lo largo de la historia. En dos triángulos semejantes, las correspondientes razones trigonométricas de los ángulos homólogos son constantes y esto permite poder trabajar con la función tangente sin necesidad de definirla explícitamente. Evidentemente, la presentación actual del seno, el coseno y la tangente significan una simplificación en todos los procesos algorítmicos ya que llevan implícitas todas las razones entre los distintos lados de los triángulos. No obstante, el hecho de que los lados de los distintos cuadrantes estuvieran divididos en 12 o 60 partes introdujo una medida estándar que puede considerarse un preludio de la necesidad de tener una función como la tangente como base de los cálculos. En este sentido, también se puede analizar por qué razón la trigonometría avanza considerando las circunferencias de radio igual a la unidad y abandona estas escalas antiguas que no aportan tanta precisión como el sistema de numeración decimal habitual.

4. Como curiosidad, se puede introducir el origen de las palabras *seno* y *tangente*, ya que pocas veces nos paramos a pensar con nuestros alumnos por qué motivo llamamos a las cosas de esta manera. Como es sabido, la palabra tangente introducida por Fincke en su *Geometriae rotundi* y su *tangens* proviene directamente de la palabra latina *tangere*, que significa tocar. Por su parte, la palabra seno es una mala traducción medieval. El matemático indio Aryabhata (476–550) lo denominó *jyā* (o *jīva*) que es la palabra sánscrita para referirse a la cuerda de una circunferencia y este término fue transliterado a *jība* por los astrónomos musulmanes (que no significa nada en árabe). Habitualmente, la escritura árabe omite las vocales con lo que la palabra se transformó en *jyb* (جيب) y, en 1145, Robert de Chester la confundió por *jayb* cuyo significado es bahía o ensenada. Por lo tanto, usó la traducción literal al latín *sinus* (Boyer, 1968). Otra versión (Eves, 1969) atribuye el error de traducción a Gerardo de Cremona (1114–1187).
5. Otro de los temas que están íntimamente ligados al desarrollo de la trigonometría en la Europa del siglo XVI son las fórmulas de la prostaféresis. De aquí puede salir la necesidad de la invención de las calculadoras analógicas, las cuales iniciaron su andadura con la máquina inventada en 1623 por Wilhelm Schickard (1592–1635) a la que siguieron aparatos como la *pascalina* (1642) de Blaise Pascal (1623–1662) o la calculadora (1672) de Gottfried W. Leibniz (1646–1716). Además, en la primera mitad del siglo XVII, el escocés John Napier (1550–1617) ideó los logaritmos en su *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614) con el único propósito de poder evitar los «tediosos cálculos» (Dorce, 2014) ya que, al igual que las fórmulas de la prostaféresis, permiten convertir los productos en sumas y las divisiones en restas (a través de las conocidas fórmulas $\log x \cdot y = \log x + \log y$ y $\log x / y = \log x - \log y$). La obsesión de este escocés por la optimización de los cálculos le llevó también a populizar sus famosas «reglas» en su póstuma *Rabdologia* (1617), ya que consiguen computar multiplicaciones, divisiones y raíces de una manera rápida y sencilla.
6. En un cierto punto de sus razonamientos, Tartaglia utiliza la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado. ¿Cuál es el significado de inconmensurabilidad? Una cuestión como esta nos transporta al libro X de los *Elementos* de Euclides y a vislumbrar cuáles fueron las primeras teorías de la historia respecto de la existencia de los números irracionales. ¿Puede imaginarse algún estudiante que la leyenda dice que la persona que descubrió que es irracional fue ejecutado por haberlo explicado? Una vez más, un apunte en una demostración nos puede transportar a una historia muy inte-

resante sobre cómo el hombre llegó a la conclusión de que se necesitaban más números más allá de los racionales. ¿Fue π siempre irracional? La demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, el teorema de Pitágoras, Arquímedes de Siracusa (s. III a. C.) e incluso la resolución de la ecuación cúbica a cargo de Fibonacci (c.1180–c.1250) pueden ser algunos de los protagonistas de una clase tan entretenida como interesante.

7. Un último dato. La conjugación de todos los elementos explicados permiten poder introducir la historia de las matemáticas como una materia propiamente dicha. Fijémonos en que una pequeña excusa nos ha servido para hablar de la evolución de la geometría y de la trigonometría entre griegos, indios, árabes y europeos renacentistas, de calculadoras, astrolabios y cuadrantes. La historia de las matemáticas es un recurso de aula imprescindible y es necesario que los profesionales de la docencia sean muy conocedores de la misma para poder transmitir todos los valores que aporta al aula ordinaria.

Esta es pues la propuesta. A partir de aquí, es seguro que se pueden encontrar otras ideas que mejoren las actuales o que las complementen. En todo caso, una ciencia no puede ser entendida en su totalidad sin que su historia haga aparición en algún momento. Hemos de buscar los contextos que hagan factible que nuestros alumnos lleguen a tener una idea global de toda la materia y, en este sentido, la historia de las matemáticas puede contribuir muy determinantemente en este proceso.

Referencias bibliograficas

Bartoli, C. (1564), *Del modo di misurare le distantie, le superficie, i corpi, le piante, le provincie, le prospettive e tutte le altre cose terrene, che possono occorrere à gli huomini : secondo le vere regole d'Euclide, & de gli altri più lodati scrittori*, Francesco Franceschi Sanese, Venecia.

Bennet, J. A. (1993), «Architecture and Mathematical Practice in England, 1550-1650», en Bold, J., y E. Chaney (Eds.), *English Architecture Public and Private*, The Hambledon Press, Londres y Rio Grande.

Bidwell, J. K. (1993), «Humanize Your Classroom with the History of Mathematics» *Mathematics Teacher*, 86, 461-464.

Boyer, C. B. (1968), *A history of mathematics*, Wiley, Nueva York.

Campano, C., F. S. Benjamin, y G. J. Toomer (1971), *Campanus of Novara and medieval planetary theory. Theorica Planetarum*, University of Wisconsin Press, Madison, Michigan.

Curtze, M. (1900), «Urkunden zur Geschichte der Trigonometrie im christlichen Mittelalter», *Bibliotheca Mathematica*, 3. Folge, 1, 321-316.

Digges, L. (1556), *A boke named Tectonicon briefely shewynge the exacte measurynge*, John Daye for Thomas Gemini, Londres.

Dorce, C. (2008), *Azarquiel. El astrónomo andalusí*, Nívola, Madrid.

— (2013), *Historia de la Matemàtica. Desde Mesopotàmia al Renaixement*, Publicacions de la Universitat de Barcelona, Barcelona.

— (2014), «Un paseo histórico por la invención de los logaritmos», *Suma*, 75, 33-42.

— (2016), «Geometría en el aula a partir de un tratado español de fortificación del siglo xvi», *Unión*, 48, 187-207.

Eves, H. (1969), *An introduction to the history of mathematics*, Rinehart and Winston, Nueva York.

Hunrath, K. (1899), «Des Rheticus Canon doctrinæ triangulorum und Vieta's Canon mathematicus», *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 44 (supplement), 211–240.

Jankvist, U. T. (2009), «A characterization of the *whys* and *hows* of using history in mathematics education», *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.

King, D. (2005), *In Synchrony with the Heavens. Studies in Astronomical Timekeeping and Instrumentation in Medieval Islamic Civilization, Vol. II*, Brill, Leiden y Boston.

Kruft, H. W. (1990), *Historia de la teoría de la arquitectura*, Alianza, Madrid.

Lorch, R. (1971), *Jabir ibn Aflah and his influence in the West* (tesis doctoral), University of Manchester, Manchester.

Marshall, G. L., y B. S. Rich (2000), «The Role of History in a Mathematics Class», *Mathematics Teacher*, 93 (8), 704-706.

Massa-Esteve, M. R. (2003), «Aportacions de la història de la matemàtica a l'ensenyament de la matemàtica», *Biaix*, 21, 4–9.

— (2010), «Understanding Mathematics through its History» en Hunger, H. (Ed.), *Proceedings of the 3rd International Conference of the European Society for the History of Science*, European Society for the History of Science, Viena.

— (2014). «Historical activities in the mathematics classroom: Tartaglia's Nova Scientia (1537)», *Teaching Innovations*, Vol. 27, Issue 3, 114-126.

Massa-Esteve, M. R., I. Guevara, F. Romero, y C. Puig-Pla (2011). «Understanding Mathematics using original sources. Criteria and Conditions» en Barbin, E., M. Kronfellner, y C. Tzanakis (Eds), *History and Epistemology Mathematics Education. Proceedings of the Sixth European Summer University*, Verlag Holzhausem GmbH, Viena.

Mörzer, W. F. J. (1994), *The Cross-Staff: History and Development of a Navigational Instrument*, De Walburg Pers, Zutphen.

Rojas, C. (1598), *Teorica y practica de fortificacion, conforme las medidas y defensas destos tiempos*, Luis Sánchez, Madrid.

Ruthven, K., S. Hennessy, y R. Deaney (2008), «Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice», *Computers & Education*, Vol. 51. Issue 1, 297-317.

Siu, M. K. (2007), «No, I don't use history of mathematics in my class. Why?» en Furinghetti, F., S. Kaijser, y C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings HPM2004 & ESU4* (edición revisada, 268-277). Uppsala Universitet, Uppsala.

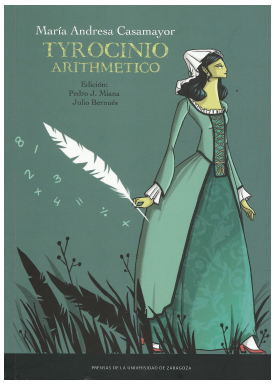
Tartaglia, N. (1537), *Nuova Scientia*, Venecia.

Van Brummelen, G. (2009), *The Mathematics of the Heavens and the Earth. The early history of Trigonometry,* Princeton University Press, Princeton y Oxford.

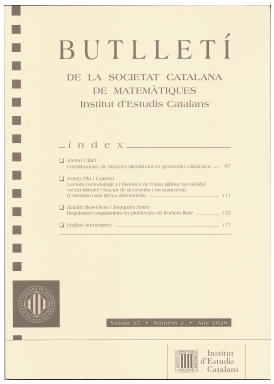
Wilson, P.S., y J. B. Chauvot (2000), «Who? How? What? A Strategy for Using History to Teach Mathematics», *Mathematics Teacher*, 93 (8), 642-645.

Carlos Dorce Polo
Universitat de Barcelona
<cdorce@ub.edu>

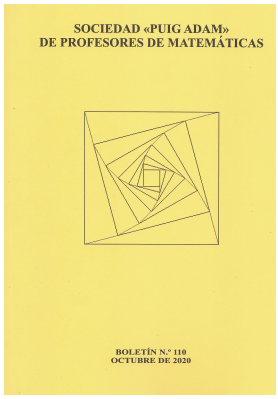
Publicaciones recibidas



María Andresa Casamayor
Tyrocinio Arithmetico
Edición: Pedro J. Miana y Julio Bernués
Prensa de la Univerisidad de Zaragoza
2020
Zaragoza
ISBN: 978-84-1340-248-2



Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Institut d'Estudis Catalans
Vol. 35, n.º 2, 2020
Barcelona
ISSN: 0214-316-X



Boletín de la Sociedad «Puig Adam»
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
N.º 110, octubre 2020
Madrid
ISSN: 1135-0261



Investigación y Ciencia
Prensa científica, S.A.
N.º 534, marzo 2021
Barcelona
ISSN: 022110136X



La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española
RSME
Vol. 23, n.º 3 , 2020
Madrid
ISSN: 1138-8927



Boletín Das Ciencias
Asociación dos Ensinantes de Ciencias de Galicia
Ano XXXIII, n.º 91
Novembro 2020
Lugo
ISSN: 0214-7807

Evidencias de aprendizaje matemático en salas de escape educativas

José Carlos Piñero Charlo

SUMA+ núm. 96
pp. 33-41
Artículo recibido en *Suma* en mayo de 2019 y aceptado en diciembre de 2019

Este trabajo forma parte de una serie de experiencias de gamificación educativa para la enseñanza de las matemáticas. En dicha serie, se pretenden crear entornos gamificados en los que los estudiantes puedan movilizar conocimientos matemáticos de forma autónoma y en situaciones distintas de un contexto clásico de clase. En esta contribución se presenta nuestra experiencia práctica implementando uno de estos entornos gamificados en un CEIP, bajo un entorno de diseño lineal.

Palabras clave: Gamificación educativa, Didáctica de las matemáticas, Salas de escape, Conocimiento matemático, Educación Primaria.

Evidences of mathematical learning in educational escape rooms // This work is to be considered in the frame of a sequence of experiences in educational gamification for teaching mathematics. In such a sequence, gamified environments are created in a way that students can autonomously mobilize mathematical knowledge in a context that differs from that of a classical classroom. This contribution presents our practical experience when implementing one of these gamified environments in a Primary School, under a linear design.

Keywords: Educational gamification, Didactic of the mathematics, Escape room, Mathematical knowledge, Primary Education.

La importancia del aspecto lúdico en la enseñanza de la matemática ha sido resaltada en numerosas ocasiones y es bien conocida desde hace años (Gardner, 1998), circunstancia que ha animado a muchos autores (Chamoso y otros, 2004; Edo y otros 2008; Perelman, 2001) a hacer uso de este tipo de recursos para la enseñanza de las matemáticas en el aula. Dichas propuestas pretendían infundir un cambio en la enseñanza «magistral» de las matemáticas en la que tradicionalmente se da una escasa participación del alumnado. Este hecho provoca desmotivación por el aprendizaje, entrando en conflicto con la bien conocida importancia del mantenimiento del interés del alumnado (Guzmán, 1989). Particularmente, en el mencionado estudio Guzmán afirma que «…la matemática es arte y juego y esta componente artística y lúdica es tan consustancial a la actividad matemática misma que cualquier campo de desarrollo matemático que no alcanza un cierto nivel de satisfacción lúdica, permanece inestable». Por lo tanto, una apro-

ximación lúdica a la enseñanza de las matemáticas, basada en la capacidad de implicación del sujeto, el desarrollo de habilidades personales, la creatividad, etc…, es necesaria para sustentar no solo el interés por aprender, sino el conocimiento en sí mismo.

La creación de entornos lúdicos para el aprendizaje se conoce bajo el nombre de *gamificación*, término proveniente de la palabra inglesa para juego, *game*. La gamificación educativa constituye un elemento innovador que ofrece la posibilidad de que los alumnos se desarrollen a nivel cognitivo, emocional y social. Un entorno gamificado estimula la capacidad de implicación del sujeto, así como el desarrollo de capacidades personales como la creatividad o la persistencia (Mc Gonigal, 2011). En el caso particular de entornos educativos gamificados —concretados en forma de salas de escape educativas— estos influyen en el comportamiento del estudiante a la vez que incrementa su disfrute durante la realización de la actividad (Domínguez y otros, 2013). El diseño de salas de escape educativas constituye una nueva tendencia que está en la vanguardia de la investigación educativa debido a su capacidad para movilizar habilidades transversales como el trabajo en equipo (Warmelink y otros, 2017), el liderazgo (Wu, Wagenschutz y Hein, 2018), el pensamiento creativo (Williams, 2018) o la comunicación (Pan, Lo y Neustaedter, 2017). En este sentido, varios estudios —como los coordinados por Calvillo Castro (2018)— han reflejado un uso exitoso de salas de escape educativas, constituyendo una valiosa base de experiencias que respaldan una metodología que, por su escaso tiempo de vida (las primeras salas de escape documentadas en artículos de impacto científico datan de 2016) no ha gozado de un impacto investigativo relevante hasta muy reciente fecha (Piñero, 2019).

Introducción a salas de escape educativas

Una habitación de escape o *escape room* es un juego de aventura físico y mental (Corkill, 2009) que consiste en encerrar a un grupo de jugadores en una habitación donde deberán solucionar enigmas y rompecabezas de todo tipo para ir desenlazando una historia y conseguir escapar antes de que finalice el tiempo disponible (normalmente, 60 minutos).

Por medio de enigmas matemáticos (tales como situaciones de medida de magnitudes o probabilidades, resolución de cálculos, etc...) los estudiantes acceden a una combinación de números que les permiten abrir mecanismos, presentes en la sala, que les dan acceso a otros enigmas (ver figura 1). El último de tales enigmas, o el resultado combinado de varios

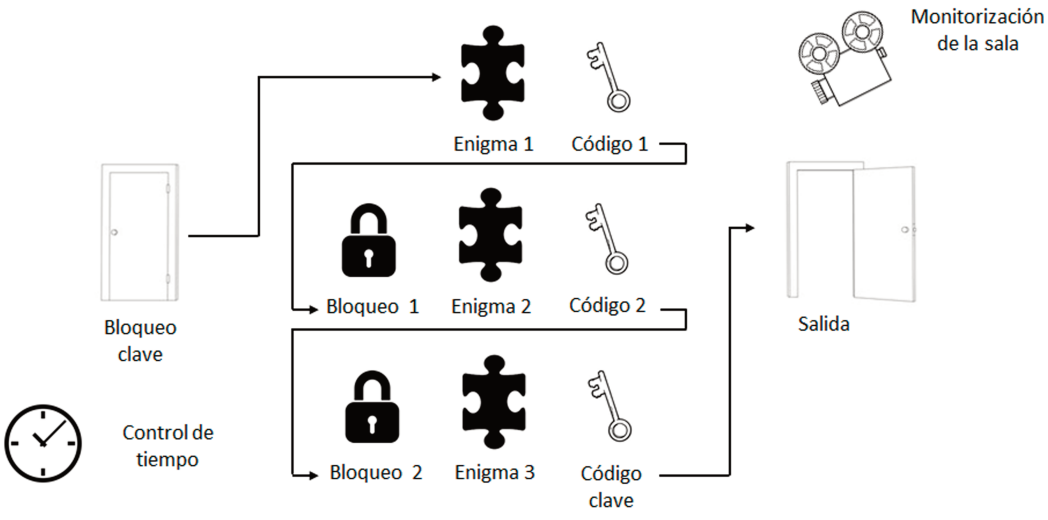


Figura 1. Esquema de funcionamiento simplificado de una sala de escape lineal

enigmas, proporciona el código final con el que pueden salir de la sala en la que han sido encerrados. En una sala de escape lineal, siguiendo la secuencia de resolución, los estudiantes avanzan en grupo mientras son supervisados por el profesor (mediante un seguimiento en video y con una comunicación oral limitada). Escapar de la sala no es el final de la actividad: en el caso de una sala de escape educativa se requiere un diálogo posterior en el que los estudiantes razonen la solución de los problemas que han resuelto, que deben de estar conectados siguiendo un argumento.

Este juego se basa en la *teoría del flow* desarrollada por y Csíkszentmihályi (1990). En dicha teoría se señala que si estamos volcados en una actividad para nuestro propio disfrute, el *flow* sobreviene al producirse un equilibrio entre la dificultad de los retos que se plantean y las habilidades de que se disponen para afrontar dicho reto (ver figura 2, extraída de Nebot y Ventura-Campos (2017) adaptada de Csíkszentmihályi (1997)). El buen funcionamiento de una sala de escape se basa en el mantenimiento de este estado de *flow*.

En esta contribución, los autores consideramos que una actividad basada en una habitación de escape es un gran recurso de gamificación de un aula con el que crear oportunidades de aprendizaje para los estudiantes. Para tener éxito en el juego, el estudiante tendrá que mostrar habilidades o manejar conceptos propios de la etapa educativa en la que se encuentre. Este tipo de recurso, además, propicia elementos de colaboración que ayudan a desarrollar habilidades sociales. En este sentido, el juego cooperativo supone un desafío para los estudiantes ya que para aumentar las probabilidades de victoria tendrán que hacer uso de los conocimientos que hayan aprendido en clase, poniendo en práctica esas habilidades con comunicación (Williams, 2018).

El uso de problemas cruzados y el hecho de que haya varias *pistas* repartidas por la sala implican la necesidad de comunicación entre los componentes del grupo (para conocer todos los códigos obtenidos, las herramientas construidas, llaves encontradas, etc.). Además, el hecho de que los grupos de juego sean

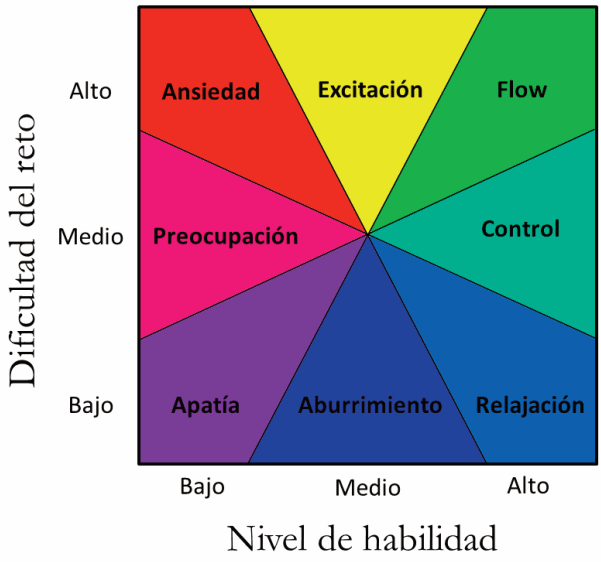


Figura 2. Estado mental en términos de nivel de desafío y nivel de habilidad, según la *teoría del flow*

heterogéneos permite que los distintos miembros puedan ayudarse entre sí en los enigmas más difíciles. En nuestra experiencia, hemos encontrado el uso de un lenguaje variado para comunicar la misma idea a distintos miembros del equipo.

Diseño de una sala de escape: el secuestro del profesor de matemáticas

La sala de escape gira en torno a una historia basada en el secuestro ficticio del docente que imparte las clases de matemáticas en cada centro, quien solo podrá *salvarse* con la ayuda de su alumnado. En el caso particular de esta experiencia, el profesor de matemáticas del grupo de alumnos ha participado en la implementación de la experiencia. La ambientación de la sala de escape (idealmente) es, de hecho, el aula habitual de los estudiantes debidamente adaptada para la experiencia. En dicha aula se encuentran los utensilios del *secuestrador* y que forman parte de la sala de escape.

La sala de escape se compone de dos habitaciones: una primera habitación de acceso del grupo, donde se desarrollan el grueso de las pruebas y una segunda

habitación, convenientemente bloqueada con el código correspondiente, en la que permanece amordazado el profesor de matemáticas. El objetivo de los estudiantes, por lo tanto, es doble:

— Deben escapar de la sala en el tiempo acordado, resolviendo todos los problemas hasta encontrar la llave de salida.
— Deben encontrar y rescatar al profesor de matemáticas.

Antes de entrar en la sala, al grupo de trabajo se le facilita un bloc de notas (que contiene pistas adaptadas al nivel de cada sala de escape), un lápiz y un comunicador con el que establecer contacto con *la central* para que se les faciliten pistas en caso de dificultad. Igualmente, se les explica cómo se manipulan los cerrojos y cómo se introducen los códigos correctamente. Una vez el grupo de trabajo entra en la sala de escape, se cierra la puerta bajo llave y los estudiantes escuchan una grabación (las últimas palabras del secuestrador y del profesor secuestrado), que sirven como introducción al primer desafío. A partir de dicho momento quedan solos en la sala y comienzan a contar los 60 minutos de la prueba. El diseño de la sala, de tipo lineal, facilitó el seguimiento de la historia por parte de los alumnos (que debían resolver los problemas en el orden *histórico* de la sucesión de acontecimientos que se les narraba por el canal de audio).

PERFIL DE LOS PARTICIPANTES

Los alumnos participantes en la sala pertenecen al cuarto curso de Educación Primaria del CEIP Camposoto en San Fernando (Cádiz, España). La sala es dirigida por la portavoz de un grupo de maestros en formación del grado en Educación Primaria de la Universidad de Cádiz bajo la supervisión del autor de este artículo. El diseño de las pruebas de la sala ha corrido a cargo de dichos maestros en formación (Piñero y Costado, 2019) partiendo de actividades ya existentes, algunas de ellas adaptadas de salas de escape comerciales. El diseño de los grupos de alumnos ha sido aleatorio (no se han hecho pruebas previas a la sala ni se ha agrupado a los alumnos siguiendo criterios académicos). El número máximo de alumnos permitidos en la sala se limitó a cinco para hacer manejable la experiencia. Se solicitaron los pertinentes permisos a los tutores y representantes legales de los alumnos antes de la celebración de la experiencia.

ESTRUCTURA DE LA SALA

Las salas de escape han sido diseñadas con un número diferente de enigmas según el nivel educativo al que va dirigida la experiencia, adaptándose tanto el número de enigmas como la dificultad y naturaleza de los mismos. Para no prolongar el desarrollo, mencionamos aquí el caso de una sala de escape implementada en 4.º curso de Educación Primaria en el centro Camposoto anteriormente mencionado.

La configuración de la sala de escape consta de una zona de trabajo despejada frente a la cámara, además de:

— Dos cámaras de video: se monitoriza el comportamiento de los estudiantes, se escuchan sus conversaciones y se registran sus respuestas y dificultades.
— Una sala de control: donde se proporcionan las pistas y respuestas que los alumnos necesiten.
— Una sala en la que permanece amordazado el profesor. La sala tiene comunicación con la sala de control, de manera que el profesor permanece siguiendo la monitorización de los estudiantes hasta que llega el momento de amordazarlo.
— Un dispositivo de audio controlado remotamente, por el que se retransmiten los mensajes o los efectos sonoros oportunos.

En la mayoría de enigmas de la sala de escape se opta por que en la resolución de los problemas no se haga uso de lápiz y papel, como se suelen trabajar las matemáticas tradicionalmente en el aula, pretendiéndose así que los alumnos puedan acceder a ciertos conceptos mediante la manipulación de objetos (aplicando así sus conocimientos y habilidades a los objetos que se les presentan en cada enigma). Dichos enigmas tratan conceptos matemáticos trabajados previamente en el aula, a fin de que los estudiantes consigan alcanzar el nivel de habilidad necesario para lograr la resolución de los mismos.

— Figura 3.1: El primer problema parte de una nota que se les facilita por debajo de la puerta de acceso (son informados de este evento por el sistema de sonido). En dicha nota, deben buscar un patrón de 4 dígitos para introducir en la primera cerradura.

— Figura 3.2: El segundo problema, al que se accede con el código anterior, consiste en crear una figura utilizando piezas de tangram. El cofre contiene tanto las piezas del tangram como un papel con la pista correspondiente para resolver el puzle.

— Figura 3.3: El tercer problema consiste en un baúl en el que hay cuatro caballos de juguete numerados y un par de dados. Por el sistema de audio de la sala, se les envía un mensaje (continuación de la historia) en el que se les hace saber que el secuestrador se había arruinado apostando al caballo perdedor. Deben lanzar y sumar los dados para averiguar qué caballo llega en primer, segundo y tercer lugar. Cada caballo mueve un paso cuando la suma de los dados coincide con su número en el dorsal. La meta se encuentra a cinco pasos.

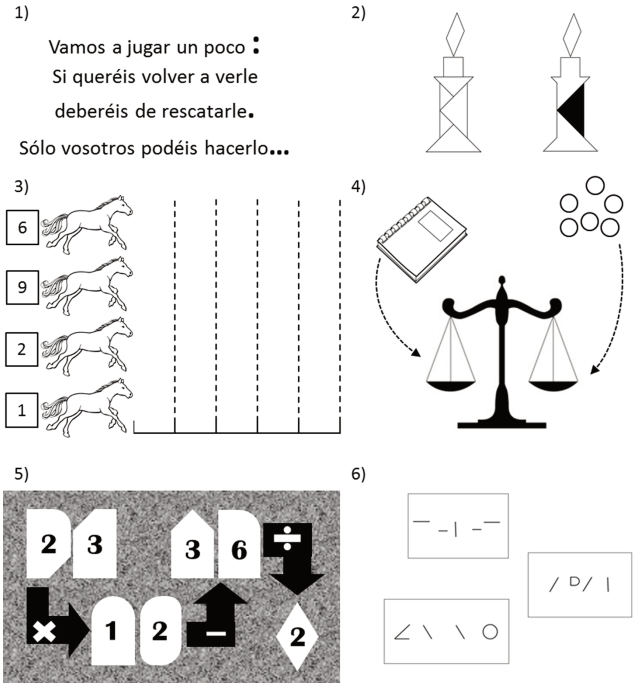


Figura 3. Vista esquemática de las distintas pruebas que componen la sala completa

— Figura 3.4: El cuarto problema consiste en una serie de objetos pertenecientes al secuestrador de la historia: «los dejó caer porque pesaban mucho». Deben pesar los objetos utilizando una balanza y unas canicas que hay en la sala; de tal manera que encontrarán que el bloc de notas pesa 7 canicas, la grapadora 9 canicas, etc.

— Figura 3.5: La obtención del código correspondiente al problema de la balanza, posibilita la apertura de la puerta que comunica con la segunda sala. En dicha sala encuentran al profesor de matemáticas amordazado. Para liberarlo, deben introducir el código correcto en un cerrojo. El código se obtiene solucionando una operación combinada que se crea al encajar unas cartas recortadas sobre un tablero adaptado con los moldes oportunos. Dichos elementos están dispuestos frente al profesor amordazado.

— Figura 3.6: Para finalizar la experiencia, la última prueba se introduce mediante mensaje de audio, donde se invita a los jugadores a buscar la llave de salida de la habitación. Para encontrarla, disponen de una serie de hojas transparentes que, al ser superpuestas, forman una palabra (zapato) donde pueden encontrar la llave de salida.

Transcripción de un fragmento de la experiencia

De acuerdo con el contexto anteriormente expuesto, el fragmento corresponde al problema de la figura 3.4 en una experiencia de 4.º curso de Educación Primaria. Tras 35 minutos implicados en la sala de escape, los jugadores (un grupo de cinco alumnos, ver figura 4) abren el cofre correspondiente al problema 3.4:

1. *Director de juego*: Habéis conseguido resolver casi todos los problemas, ya os queda muy poco..., ¿qué habéis encontrado en el nuevo cofre?

2. *Alumno 1:* Hay un paquete de rotuladores, dos tizas, un cuaderno y muchas canicas.
3. *Alumno 2:* (abre el cuaderno) ¡Mira, hay un dibujo!
4. *Director de juego:* ¿Ah sí?, ¿de qué es el dibujo?
5. *Alumno 2:* De aquello (señala la balanza).
6. *Director de juego:* ¡Muy bien!, ¿qué podéis hacer con los objetos que tenéis?
7. El grupo de alumnos se desplaza hasta la balanza con todos los objetos y colocan los objetos en los platos de la balanza en distintas configuraciones. Empiezan colocando el cuaderno en un plato y las tizas en otro.
8. *Alumno 3:* No, así no es.
9. Reparte todos los objetos entre ambos platos, buscando que la balanza quede equilibrada.
10. *Alumno 3:* ¿Ya?
11. *Director de juego:* Hola, ¿qué estáis intentando?
12. *Alumno 3:* Esto no funciona.
13. *Director de juego:* ¿Por qué no funciona?
14. *Alumno 3:* Porque no sabemos qué número es.
15. *Director de juego:* Mirad bien el dibujo del cuaderno, no habéis puesto bien las cosas en la balanza.
16. Recogen el cuaderno y vuelven a observar el dibujo (adaptado de la figura 3.4). Discuten y colocan todos los objetos en un plato y las canicas en el otro.
17. *Alumno 3:* Está movido (en referencia a que no se logra el equilibrio usando todas las canicas en un plato y todos los objetos en el otro plato).
18. *Alumno 1:* Hay que usar solo el cuaderno y las canicas.
19. Colocan el cuaderno en un plato y varias canicas en el otro. Cometen varios errores, muestran impaciencia a la hora de esperar al equilibrio de la balanza o de juzgar cuando esta está bien equilibrada.
20. *Alumno 3:* Así tampoco es.
21. *Alumno 1:* Sí que es, pero solo vale si no se sigue moviendo.
22. Tras varios minutos de discusión y algunos intentos infructuosos (ligados a la falta de paciencia por esperar al equilibrio de la balanza), logran pesar el cuaderno.
23. *Alumno 1:* Son 5 canicas y un cuaderno.
24. *Alumno 3:* ¿Y ahora?
25. *Alumno 2:* (Consultando la hoja de pistas) Aquí hay tres, son tres números.
26. El alumno 2 hace referencia al número de bloques que figura en su cuaderno de pistas, en cada bloque deben escribir una cifra. El completo de las cifras será el código completo.
27. *Director de juego:* ¡Muy bien!, Pues ya tenéis uno.
28. *Alumno 2:* (Hablando con sus compañeros) Hacen falta otros dos números.
29. *Alumno 3:* Vamos a hacer lo mismo con el estuche.
30. A continuación, los alumnos pesan los objetos restantes de uno en uno y consiguen su equivalente en número de canicas (obteniendo el código al ordenar las cifras de mayor a menor, de acuerdo con las orientaciones del director de juego).



Figura 4. Grupo de estudiantes inmersos en la sala. Se recoge el momento en el que el Alumno 3 continúa en la prueba transcrita, explorando distintas posibilidades

31. El grupo pasa al siguiente problema, mientras el alumno 3 continúa jugando con la balanza y probando distintas combinaciones (ver figura 4).
32. El alumno 3 prueba con combinaciones de distintos objetos y su equivalente en canicas (incluso pesa los caballos de juguete del anterior problema). Tras varias pruebas, retira todos objetos de ambos platos.
33. *Alumno 3:* ¡Eh!, mirad, mirad.
34. El grupo se acerca y pregunta qué pasa.
35. *Alumno 3:* (dirigiéndose al grupo) ¡Mira!, ¡la nada y la nada pesan lo mismo!

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Analizando el fragmento transcrito de acuerdo con los elementos del análisis didáctico reconocidos por Rico (2013) y en acuerdo con el modelo propuesto por Font (2010) se observan:

— Prácticas operativas y discursivas en las que se manifiesta (verbalmente) la acción llevada a cabo para resolver el problema matemático, así como la comunicación de dicha acción a otras personas a fin de validarlas y generalizarlas.
— Objetos y procesos matemáticos, incluyendo el uso de un lenguaje adecuado a la situación, análisis del procedimiento utilizado (17, 18), argumentación y contra-argumentación (20, 21), validación de procedimientos (12).
— La secuencia didáctica se compone de una serie de proposiciones que se van argumentando y contrargumentando entre los alumnos mientras el director de juego los motiva y regula (11, 13, 27). Los alumnos, en función de la secuencia, exploran (7, 32), comunican (33) y validan (8) los procedimientos (20).
— Posteriormente los alumnos consideran el problema resuelto una vez han adquirido el código correspondiente al pesar los distintos elementos en la balanza. Se puede observar un punto a partir del cual establecen unas reglas que conviene seguir para resolver el problema (30). Sin embargo, uno de los alumnos considera el «problema» como no resuelto y continúa explorando a fin de establecer unas «normas» y generalizaciones de orden superior (31-35).

En este breve análisis del fragmento se demuestra el inicio de la adquisición de determinados conceptos como el equilibrio, la unidad de magnitud, el peso, el uso de instrumentos de medida… y el descubrimiento de ciertas realidades que resultan significativas para el alumno. De hecho, el Alumno 1, ante el error inicial, participa en el análisis del proceso e interpreta correctamente la codificación del problema (representado en la figura 3.4).

Si atendemos al comportamiento del Alumno 3, también participa del proceso de resolución, cuestionando la validez de la misma y planteando (posteriormente) una estrategia de resolución sistemática. En este caso, el Alumno 3 identifica un patrón de resolución del problema, explorando nuevas posibilidades y modificando el problema (mostrando una clara disposición productiva, así como un proceso de generalización e idealización que es debidamente comunicado a sus compañeros).

En el caso de la experiencia transcrita, los objetos matemáticos movilizados son los relacionados con la cuantificación (es decir, con el concepto de cantidad). Dicha cuantificación surge al definir una unidad de medida (el peso de las canicas) para asignar una cantidad a la magnitud peso del objeto a medir. Resulta por tanto evidente la movilización de conceptos matemáticos (denominados objetos en el modelo de Font) relacionados a la cantidad, magnitud y unidad de medida. Por otro lado, los procesos de análisis, argumentación, resolución sistemática y generalización son también manifestados durante la experiencia.

Conclusiones

A modo de conclusión, presentamos algunas apreciaciones recogidas tras la puesta en práctica de la actividad de escape descrita en este artículo .

Se ha presentado un extracto de una sala de escape concreta, realizada en un CEIP en el marco de una aplicación sistemática de este procedimiento de gamificación educativa en varios centros. En esta experiencia particular (y en otras, que forman parte de esa

aplicación sistemática) se observa que el juego de escape utilizado como recurso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas motiva a los alumnos en la resolución de problemas, evidenciándose la implicación de todos los participantes por encontrar la solución de cada enigma; así como el aprendizaje y la movilización de conceptos matemáticos.

Este hecho hace que comenten los conceptos aprendidos en el aula, repasando de esta forma los contenidos que nos interesan en ese momento. Además, creemos que esta es una buena experiencia para complementar a los ejercicios *de lápiz y papel*, que puede beneficiar la comprensión de algunos conceptos que resultan abstractos sin la ayuda de la manipulación de materiales didácticos.

Por otro lado, la valoración de la idoneidad del episodio que se ha realizado en este artículo está fundamentada en un análisis sistemático. En dicho análisis solo se ha valorado la idoneidad interaccional, sin embargo no se ha contemplado la idoneidad emocional del episodio (debido al marco teórico utilizado para el análisis didáctico). Concluimos pues, que debe modificarse y ampliarse el marco teórico de análisis didáctico aplicable al estudio de los fenómenos que ocurren en metodologías de entornos gamificados (salas de escape). Esto es debido a que en nuestro caso, hemos aplicado un modelo que permite un análisis sistemático para la descripción, explicación y valoración de episodios de clases de matemáticas… dejando de lado una valoración emocional que, de hecho, es una de las grandes ventajas del método.

Es igualmente destacable que los centros educativos a los que se les ha ofrecido participar en esta actividad, han demandado nuevas implementaciones (incluso en horario lectivo del centro).

Referencias bibliográficas

Calvillo A. (coordinador), (2018), «Escape room en educación (I) y (II)», *Comunicación y pedagogía*, n.º 307–308 y 309-310.

Chamoso, J. M., J. Durán, J. García, J. Martínez y M. Rodríguez-Sánchez (2004), «Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas», *Suma*, 47, 47–58.

Corkill, E. (2009), «Real Escape Game brings its creator's wonderment to life», *The Japan Times*.

Csíkszentmihályi, M. (1990), *Flow: The Psychology of Optimal Experience*, Herper Perennial, New York.

— (1997), *Finding Flow: The Psychology of Engagement With Everyday Life*, Harper Perennial, New York.

De Guzmán, M. (1989), «Juegos y matemática», *Suma*, 4, 61-64.

Diago, P. D., y N. Ventura-Campos, (2017), «Escape Room: gamificación educativa para el aprendizaje de las matemáticas», *Suma*, 85, 33–40.

Domínguez, A., J. Sáenz-De-Navarrete, L. De-Marcos, L. Fernández-Sanz, C. Pagés y J. J. Martínez-Herráiz (2013), «Gamifying learning experiences: Practical implications and outcomes», *Computers and Education*, 63, 380–392.

Edo, M., M. Baeza, J. Deulofeu. y E. Badillo (2008), «Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema», *Union. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 14, 61–75.

Font, V., N. Planas y J. D. Godino (2010), «Modelo para el análisis didáctico en educación matemática», *Infancia y Aprendizaje: Journal for the Study of Education and Development*, 33(1), 89–105.

Gardner, M. (1998), «Un cuarto de siglo de matemáticas recreativas» *Investigación y Ciencia*, 265, 50–57.

McGonigal, J. (2011), *Reality is broken*, Penguin Press, Nueva York.

Pan, R., H. Lo y C. Neustaedter (2017), «Collaboration, Awareness, and Communication in Real-Life Escape Rooms» en *Proceedings of the 2017 Conference on Designing Interactive Systems - DIS '17*, 1353–1364.

Perelman, Y. I. (2002), *Matemática Recreativa*, Martínez Roca, Barcelona.

Piñero J. C., y M. T. Costado (2019), «Escape Room y aprendizaje mixto como herramientas para la formación de maestros de educación primaria», *Brazilian Journal of Development*, 5(6), 5983–5992.

Piñero, J. C. (2019), «Análisis sistemático del uso de salas de escape educativas: estado del arte y perspectivas de futuro», *Espacios*, 40(44), 9.

Rico, L. (2013), «El método del Análisis Didáctico», *Union. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11–27.

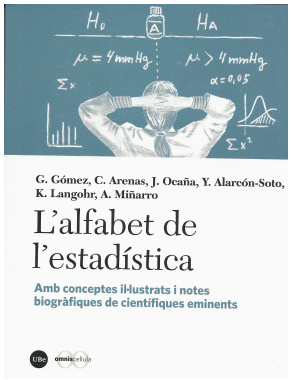
Warmelink, H., I. Mayer, J. Weber, B. Heijligers, M. Haggis, E. Peters y M. Louwerse (2017), «AMELIO: Evaluating the Team-building Potential of a Mixed Reality Escape Room Game» en *Extended Abstracts Publication of the Annual Symposium on Computer-Human Interaction in Play - CHI PLAY '17 Extended Abstracts*.

Williams, P. (2018), «Using escape room-like puzzles to teach undergraduate students effective and efficient group process skills» en *2018 IEEE Integrated STEM Education Conference (ISEC),* Princeton, NJ, 254–257.

Wu, C., H. Wagenschutz y J. Hein (2018), «Promoting leadership and teamwork development through Escape Rooms», *Medical Education*, 52(5), 561–562.

José Carlos Piñero Charlo
Universidad de Cádiz
<josecarlos.pinero@gm.uca.es>

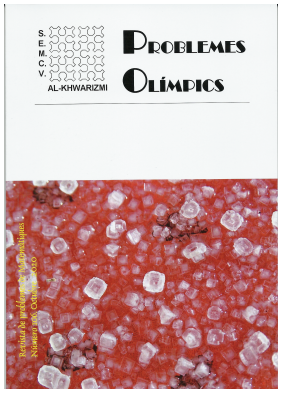
Publicaciones recibidas



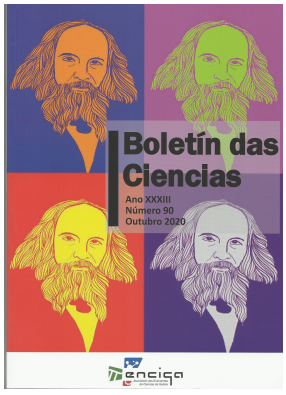
L'ALFABET DE L'ESTADÍSTICA
G. Gómez, C, Arenas, J. Ocaña, Y. Alarcón-Soto, K. Langohr, A. Miñarro
Col·lecció Catàlisi.
Edicions de la Universitat de Barcelona
2020
Barcelona
ISBN: 978-84-9168-571-5



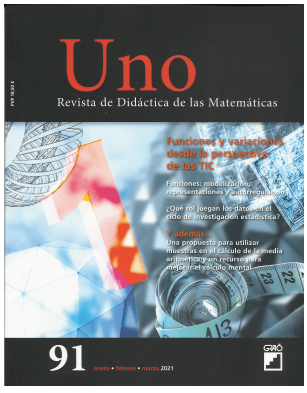
PERIPLO POR LA GEOMETRÍA DE VALLADOLID
Inmaculada Fernández Benito
M.ª Encarnación Reyes Iglesias
Servicio Municipal de Educación del Ayuntamiento de Valladolid
2018
Valladolid
ISBN: 978-84-16678-35-8



PROBLEMES OLÍMPICS
SEMCV
«Al-Kharizmi»
N.º 106, octubre 2020
València
ISSN: 1578-1771



BOLETÍN DAS CIENCIAS
Asociación dos Ensinantes de Ciencias de Galicia
Ano XXXIII, n.º 90
Outubro 2020
Lugo
ISSN: 0214-7807



UNO. REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
Graó Editorial
N.º 91, enero-marzo, 2021
Barcelona
ISSN: 1133-9853



LLULL
Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas
Vol. 43, n.º 87, 2020
Zaragoza
ISSN: 0210-8615

MatemáTICas deportivas

Joaquín Aguilar Barriuso
Diego Alonso Santamaría
Elena Torres María

SUMA+ núm. 96
pp. 43-56
Artículo recibido en *Suma* en julio de 2019 y aceptado en enero de 2020

¿Para qué sirven las matemáticas? Esta es una de las preguntas que nos hacen habitualmente los alumnos. ¿No podemos hacer que esa pregunta deje de tener sentido enseñando las matemáticas de una manera práctica? Con este artículo pretendemos hacer ver las matemáticas relacionadas con elementos de nuestro mundo, en este caso con la lotería del *draft* de la NBA, lo que permite una introducción a la combinatoria y al cálculo de probabilidades y además acercarlas a los alumnos ayudados con las nuevas tecnologías, realizando aplicaciones para el móvil. Para ello hemos utilizado la aplicación AppInventor.

Palabras clave: Draft NBA, AppInventor, Combinatoria, Cálculo de probabilidades, Programación de *apps*.

Sport Maths and ICT // What use is maths? That is a question we get asked a lot by our students. Can we make that question disappear by teaching maths in a more practical way? This article aims to show how mathematics is used in the real world, in this case in the NBA Draft Lottery, with an introduction to combinatorics and the calculation of probabilities. It also strives to make mathematics more accessible through the use of new technologies by creating mobile applications using the APPInventor app.

Keywords: NBA Draft, AppInventor, Combinatorics, Calculation of probabilities, App programming.

El objetivo principal de este artículo es dar la importancia que se merece a una parte de la matemática como es la probabilidad que en muchas ocasiones es como la hermana pobre de todo el bagaje matemático que se ha ido acumulando a través de los siglos.

Es una disciplina relativamente reciente que se desarrolla de forma exponencial en el siglo XX aunque la historia que se cuenta de ella tiene que ver con los juego de azar (cartas, naipes…) a los que tenían mucha afición, allá por el siglo XVII, en Francia, Italia y otros países de la Europa de esa época.

En la enseñanza de las matemáticas se suele relegar la impartición de las lecciones de combinatoria y probabilidad al final del curso escolar aunque la mayoría de las veces, y siempre con la excusa de la falta de tiempo por tantas actividades complementarias y extraescolares a las que sometemos a los alumnos, no se explica y damos mucha más importancia a otras

partes de las matemáticas como el álgebra, la geometría, el análisis, el cálculo y un largo etc.

Proponemos mostrar a nuestros alumnos una aplicación del mundo de la probabilidad a la vida real y, en concreto, desarrollarlo a través de uno de los grandes intereses de la juventud actual como es el deporte, presentando los contenidos de la mano del famoso *draft* de la NBA. Pero vamos más allá. Alejándonos de la educación tradicional y valiéndonos del uso de las nuevas tecnologías, pretendemos que los alumnos apliquen lo aprendido construyendo un artefacto digital, en este caso una aplicación para móvil (figura 1) realizada con Appinventor.

Matemáticas en la NBA

Vamos a estudiar las matemáticas que están inmersas en la NBA, que es la liga más importante de baloncesto que hay en el planeta. En concreto, vamos a hacer de la mano de la lotería del *draft*, una introducción a la combinatoria, al cálculo de probabilidades y a la toma de decisiones basadas en las matemáticas, es decir, cómo utiliza las matemáticas una empresa como la NBA para crear una liga más igualada y competitiva.

Pero empecemos desde el principio, vamos a dar unas pinceladas de cómo es el funcionamiento interno de la NBA y luego seguimos con el sorteo del *draft*.

EE.UU. es un país muy extenso y por eso los 30 equipos que componen la liga se dividen en dos grandes conferencias: la Conferencia Oeste y la Conferencia Este, cada una con 15 equipos. Aunque existe esta división, los equipos juegan todos contra todos en un total de 82 partidos en la liga regular. Sin embargo, a la hora de la clasificación, existe una por conferencia y al finalizar los partidos de la liga regular, se clasifican los 8 mejores equipos de cada conferencia para jugar unos *playoffs* por el título de la NBA. Para los 7 equipos restantes de cada conferencia, la temporada habrá llegado a su fin y tendrán una pequeña ventaja en el siguiente reparto de los jugadores jóvenes más talentosos, lo que llamamos el *draft*.

¿QUÉ ES EL *DRAFT*?

La NBA realiza cada año un sorteo o lotería en la que los peores equipos tienen un mayor número de posibilidades de obtener a los mejores jugadores jóvenes que ese año se convierten en profesionales.

El *draft* está dividido en dos grandes rondas:



Figura 1. Pantalla principal y otras pantallas de la App (Vídeos, Test y Combinatoria)

— La segunda ronda es muy sencilla pues los treinta equipos de la NBA realizan su elección en orden inverso a su clasificación, es decir, en orden inverso al número de victorias que consiguieron esa temporada.
— En la primera ronda, las 14 primeras elecciones del *draft* (los 14 mejores jugadores jóvenes) se sortean entre los 14 peores equipos. Para ello se reparte a cada uno de ellos un número concreto de papeletas o boletos en función de su posición en la liga. Esa cantidad concreta de papeletas ya está preestablecida por la NBA y en el sorteo de este año ha variado muy sustancialmente con respecto al reparto que se llevaba a cabo en los últimos años, y las razones se explicarán en el próximo apartado. Después de la elección de los 14 peores equipos, las elecciones del 15 al 30 se realizan por los equipos de *playoffs* en orden inverso a su clasificación. En consecuencia, en 2019, en los dos últimos puestos estuvieron los finalistas de la NBA, el equipo de los Golden State Warriors y el campeón de ese curso, el equipo de los Toronto Raptors (en el que militaban los españoles Marc Gasol y Sergi Ibaka) y que sería el último equipo que elegiría en la primera ronda.

LA LOTERÍA Y SUS BOLETOS

Cada boleto de la lotería contiene cuatro números, cada uno del uno al catorce, ordenados y sin repetirse. Un posible boleto puede estar formado por los números 4, 7, 10 y 14.

¿Cuántas papeletas existen? Imaginemos una urna en la que tenemos catorce bolas numeradas del 1 al 14. Elegimos una primera bola y miramos el número. Para esta primera bola tenemos un total de 14 posibilidades, pero en la segunda extracción ya solo hay 13 bolas, luego solo hay 13 posibilidades para este segundo número, 12 para el tercero y 11 para el cuarto, es decir, un total de $14 \times 13 \times 12 \times 11 = 24\,024$ posibilidades diferentes. Pero debemos quedarnos solo con los boletos cuyos números están ordenados de menor a mayor. Fijémonos en la cuaterna de números iniciales 4, 7, 10 y 14. Esos cuatro números se pueden poner de un total de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 = 4!$ formas o permutaciones diferentes. Luego si queremos quedarnos solo con los boletos ordenados de 4 números habrá un total de $24\,024 / 24 = 1\,001$. Parece magia, pero exactamente sale esa cifra tan redonda salvo que nos sobra uno para que fuese el millar. Bueno, hay una solución simple: se elimina el boleto cuyos números son 11, 12, 13 y 14 y asunto arreglado.

Como a los matemáticos nos gusta siempre definir las cosas para que no existan dudas, al número de formas diferentes de elegir 4 números diferentes de un total de 14 se les da el nombre de variaciones si se tiene en cuenta el orden y combinaciones en el caso de que el orden no se tenga en cuenta, y se denotan respectivamente por:

— *Variaciones sin repetición* de catorce elementos tomados de cuatro en cuatro:
$$V_{14,4} = 24\,024$$
— *Combinaciones sin repetición* de catorce elementos tomados de cuatro en cuatro:
$$C_{14,4} = 1\,001$$
— El otro número que ha salido se denominan las *permutaciones* de 4 elementos:
$$P_4 = 24 = 4!$$

En términos de factoriales se pueden calcular de la siguiente forma:

$$V_{14,4} = \frac{14!}{(14-4)!} = \frac{14!}{10!} = \cdots = 24\,024$$
$$C_{14,4} = \frac{14!}{(14-4)\cdot!4!} = \frac{14!}{10!\cdot 4!} = \cdots = 1\,001.$$

Indicaremos como primer equipo del *draft* E_1 al último clasificado, el segundo equipo E_2 al penúltimo clasificado, y así sucesivamente, indicando el equipo E_k al equipo clasificado en la posición $(30-k+1)$, siendo $k = 1,2, \ldots, 14$.

Estos catorce equipos van a recibir una cantidad de boletos de los indicados anteriormente. Depende de ese reparto la probabilidad de que en el sorteo cada uno de los equipos resulte premiado. En los *draft* de los años anteriores a 2019 el equipo que quedaba peor clasificado E_1 recibía 250 boletos, el penúltimo clasificado E_2 recibía 199 boletos, el antepenúltimo E_3 re-

cibía 156 boletos y así iba decreciendo el número de boletos según se iba avanzando en la clasificación.

En términos de probabilidades el equipo peor clasificado E_1 tenía una probabilidad del 25 % de que le tocase en el primer sorteo, 19,9 % el equipo E_2 y el 15,6 % el equipo E_3, y esos porcentajes iban disminuyendo hasta el equipo E_{14} con un 0,5 % de probabilidad. Además, no solo se sorteaba la primera elección, sino que después se sorteaban la segunda y la tercera elección.

¿Qué ocurría?, y aquí viene la toma de decisiones basada en matemáticas. Pues que la NBA se dio cuenta que había equipos que perdían a posta para aumentar sus posibilidades en este *draft*. Es decir, equipos que buscaban la peor clasificación posible para recibir el mayor número de boletos para el sorteo y así tener más posibilidades de elegir a los mejores jugadores jóvenes de ese año.

Esta estrategia tan ruin recibe el nombre de *tanking* y, aunque está denunciado y perseguido por el comisionado de la NBA, los equipos lo utilizaban de forma clamorosa y hay numerosos ejemplos que confirman esta mala práctica.

Esto ha motivado que a partir de 2019 se haya modificado de forma importante la asignación de papeletas y así los tres peores equipos clasificado, E_1, E_2 y E_3, han recibido 140 boletos cada uno de ellos y el resto del reparto ha sido más uniforme, por lo que las posibilidades de cada equipo se han modificado de forma importante. Además, ya no solo se sortean las tres primeras elecciones, sino que hay cuatro sorteos.

En la tabla 1 aparecen las probabilidades de cada uno de los equipos en el primer sorteo, tanto en el *draft* de 2018 como en el de 2019. La figura 2 es una representación de estos valores.

Equipo (E_k)	P_k-18	P_k-19
E_1	0,250	0,140
E_2	0,199	0,140
E_3	0,156	0,140
E_4	0,119	0,125
E_5	0,088	0,105
E_6	0,063	0,090
E_7	0,043	0,075
E_8	0,028	0,060
E_9	0,017	0,045
E_{10}	0,011	0,030
E_{11}	0,008	0,020
E_{12}	0,007	0,015
E_{13}	0,006	0,010
E_{14}	0,005	0,005

Tabla 1. Probabilidades en el primer sorteo

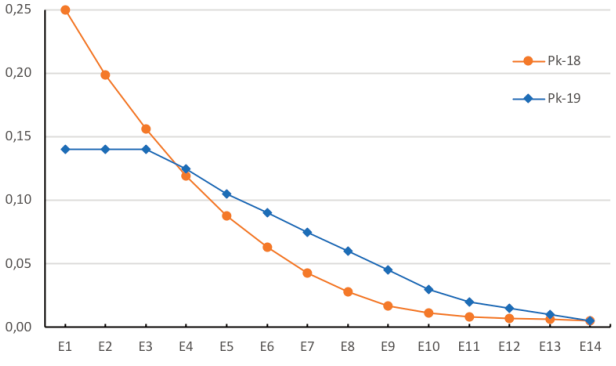


Figura 2. Representación gráfica de la tabla 1

DRAFT Y PROBABILIDADES: SEGUNDO SORTEO

El número de boletos que va a recibir cada equipo E_k lo vamos a indicar por B_k y por P_k a la probabilidad de que en el primer sorteo de la primera ronda del *draft* le toque la lotería al equipo E_k. Usaremos la notación $E_k^{(m)}$ para designar el suceso «al equipo E_k le ha tocado el m-ésimo sorteo de la primera ronda».

Según esto, el valor de P_k es muy fácil de calcular ya que es el cociente entre el número de boletos B_k y el número total de boletos repartidos que es 1 000.

Se realiza el primer sorteo de la primera ronda y le toca a un equipo, dicho equipo tiene que esperar a la segunda ronda para volver a elegir un segundo jugador. Pero hay un segundo sorteo en esta primera ronda, la pregunta es ¿qué probabilidad tiene ahora cada equipo para elegir en este segundo sorteo?

Como el equipo premiado en el primer sorteo ya no entra en este segundo sorteo, sus papeletas se eliminan y no entran en liza, y el número de papeletas es ahora $(1\,000-B_i)$.

Designaremos por S_j las probabilidades teóricas a priori de cada uno de los catorce equipos E_j para elegir en este segundo turno. Para calcularla utilizaremos la probabilidad total, que es la suma de las probabilidades de los sucesos $E_i^{(1)} \cap E_j^{(2)}$ para todo $i \neq j$, en los que suponemos que el equipo que ha hecho la primera elección es E_i.

Vamos a calcular la probabilidad de que en el segundo sorteo le toque al equipo E_1 sumando las probabilidades de los sucesos $E_i^{(1)} \cap E_1^{(2)}$ para todo $i \neq 1$, suponiendo que en el primer sorteo el equipo premiado es el E_i, cuya probabilidad es P_i y luego hay que multiplicar por la probabilidad de que en el segundo sorteo el premiado sea el equipo primero, esta probabilidad es $P_i \times B_1 / (1\,000 - B_i)$. Podemos ver el cálculo de las probabilidades de estos sucesos para el *draft* de 2018 y el *draft* de 2019 en las tablas 2 y 3 respectivamente.

Utilizando los resultados de la tabla 3, para el cálculo de S_1, en el *draft* de 2019 obtenemos que:

$$S_1 = p\left(E_1^{(2)}\right) = \sum_{i=2}^{n} p\left(E_i^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) =$$

$$= \sum_{i=2}^{n} p\left(E_i^{(1)}\right) p\left(E_1^{(2)} / E_i^{(1)}\right) = 0{,}134173189.$$

Y de forma similar se haría para el *draft* de 2018 usando los valores de la tabla 2 y obteniendo:

$$S_1 = p\left(E_1^{(2)}\right) = 0{,}2151011632.$$

La tabla 4 contiene las probabilidades de cada equipo en el segundo sorteo y la figura 2 su representación tanto en el caso del *draft* de 2018 como en el de 2019.

*Draft*18
$p\left(E_2^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}199 \times \frac{250}{801} = 0{,}0621098626$
$p\left(E_3^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}156 \times \frac{250}{844} = 0{,}0462085308$
$p\left(E_4^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}119 \times \frac{250}{881} = 0{,}0337684449$
$p\left(E_5^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}088 \times \frac{250}{912} = 0{,}0241228070$
$p\left(E_6^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}063 \times \frac{250}{937} = 0{,}0168089647$
$p\left(E_7^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}043 \times \frac{250}{957} = 0{,}0112330198$
$p\left(E_8^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}028 \times \frac{250}{972} = 0{,}0072016461$
$p\left(E_9^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}017 \times \frac{250}{983} = 0{,}0043234995$
$p\left(E_{10}^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}011 \times \frac{250}{989} = 0{,}0027805864$
$p\left(E_{11}^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}008 \times \frac{250}{992} = 0{,}0020161290$
$p\left(E_{12}^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}007 \times \frac{250}{993} = 0{,}0017623363$
$p\left(E_{13}^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}006 \times \frac{250}{994} = 0{,}0015090543$
$p\left(E_{14}^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}005 \times \frac{250}{995} = 0{,}0012562814$

Tabla 2

*Draft*19
$p\left(E_2^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}140 \times \frac{140}{860} = 0{,}0227906976$
$p\left(E_3^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}140 \times \frac{140}{860} = 0{,}0227906976$
$p\left(E_4^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}125 \times \frac{140}{875} = 0{,}0200000000$
$p\left(E_5^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}105 \times \frac{140}{895} = 0{,}0164245810$
$p\left(E_6^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}090 \times \frac{140}{910} = 0{,}0138461538$
$p\left(E_7^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}075 \times \frac{140}{925} = 0{,}0113513513$
$p\left(E_8^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}060 \times \frac{140}{940} = 0{,}0089361702$
$p\left(E_9^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}045 \times \frac{140}{955} = 0{,}0065968586$
$p\left(E_{10}^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}030 \times \frac{140}{970} = 0{,}0043298969$
$p\left(E_{11}^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}020 \times \frac{140}{980} = 0{,}0028571428$
$p\left(E_{12}^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}015 \times \frac{140}{985} = 0{,}0021319796$
$p\left(E_{13}^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}010 \times \frac{140}{990} = 0{,}0014141414$
$p\left(E_{14}^{(1)} \cap E_1^{(2)}\right) = 0{,}005 \times \frac{140}{995} = 0{,}0007035175$

Tabla 3

TERCER SORTEO

En el tercer sorteo de la primera ronda, para averiguar $T_k = p(E_k^{(3)})$, la probabilidad de que el k-ésimo equipo no resulte afortunado hasta esta fase del sorteo, hay que calcular mucho más porque hay que sumar la probabilidad de cada una de las $13 \times 12 = 156$ posibilidades de que esto ocurra.

Asi, obtenemos, por ejemplo que:

$$T_1 = p\left(E_1^{(3)}\right) = \begin{cases} 0{,}1274865239 & \text{en 2019} \\ 0{,}177734929 & \text{en 2018} \end{cases}.$$

Utilizando una hoja de cálculo se pueden calcular todas estas probabilidades. En la tabla 5 aparecen, redondeadas a 4 cifras decimales, todas ellas.

EL CUARTO SORTEO DEL DRAFT 2019

Hasta el año 2018 solo se sorteaban los tres primeros equipos que elegían, y a continuación los equipos que no habían salido premiados lo hacían en orden inverso a su puesto en la clasificación. A partir del *draft* de 2019 se sortean cuatro equipos por lo que la probabilidad de que a un equipo le toque la suerte en este último sorteo es tremendamente complicada de calcular puesto que hay que calcular la escalofriante cantidad de $13 \times 12 \times 11 = 1\,716$ sucesos. Para determinar cada una de dichas probabilidades hay múltiples combinaciones. Este cálculo tan sofisticado requiere de un buen programa con un lenguaje de programación que utilice bucles y que explore todas las posibilidades.

Equipo (E_k)	S_k-18	S_k-19
E_1	0,2151	0,1342
E_2	0,1881	0,1342
E_3	0,1574	0,1342
E_4	0,1260	0,1223
E_5	0,0966	0,1054
E_6	0,0710	0,0920
E_7	0,0494	0,0780
E_8	0,0326	0,0634
E_9	0,0200	0,0483
E_{10}	0,0130	0,0327
E_{11}	0,0095	0,0220
E_{12}	0,0083	0,0166
E_{13}	0,0071	0,0111
E_{14}	0,0059	0,0056

Tabla 4. Probabilidades en el segundo sorteo

Equipo (E_k)	T_k-18	T_k-19
E_1	0,1777	0,1275
E_2	0,1712	0,1275
E_3	0,1559	0,1275
E_4	0,1330	0,1189
E_5	0,1068	0,1056
E_6	0,0812	0,0941
E_7	0,0579	0,0814
E_8	0,0389	0,0674
E_9	0,0241	0,0523
E_{10}	0,0158	0,0360
E_{11}	0,0115	0,0245
E_{12}	0,0101	0,0186
E_{13}	0,0087	0,0125
E_{14}	0,0073	0,0063

Tabla 5. Probabilidades en el tercer sorteo

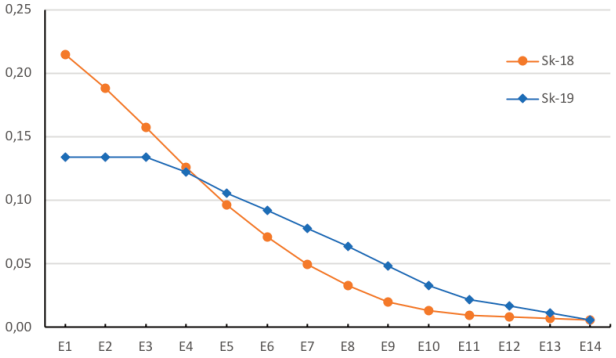


Figura 3. Representación gráfica de la tabla 4

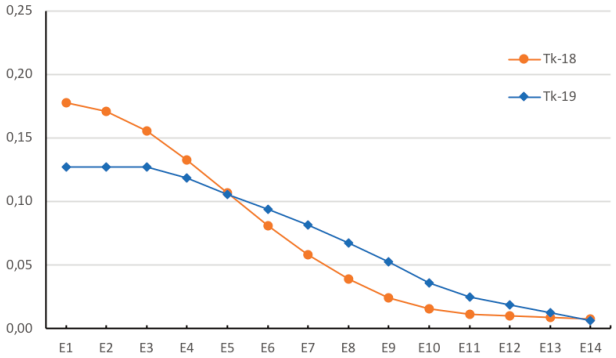


Figura 4. Representación gráfica de la tabla 5

En la figura 5 se muestra un programa en JavaScript que permite realizar el cálculo de las probabilidades de cada uno de los cuatro sorteos.

Por ejemplo, si el equipo E_1 tiene la mala fortuna de no haber salido elegido en ninguno de los tres primeros sorteos, este programa permite obtener que la probabilidad de que salga en este último sorteo, C_1, es:

$$C_1 = p\left(E_1^{(4)}\right) = 0{,}119720473.$$

Todos los valores de las probabilidades en el cuarro sorteo están recogidas en la tabla 6 y respresentadas en la figura 6.

COMPARATIVA DE LOS FORMATOS DE *DRAFT*

En la tabla 7, podemos ver los porcentajes correspondientes a los dos modelos de *draft* (en negrita el *draft* que entró en vigor desde 2019, y entre paréntesis el de años anteriores). Se han resaltado en rojo aquellas probabilidades que han disminuido más de un 10%,

```
/**

Programa para calcular las probabilidades en el sorteo de la
lotería del Draft de la NBA temporadas 2018 y 2019

*/
//b=[250, 199, 156, 119, 88, 63, 43, 28, 17, 11, 8, 7, 6, 5]; Draft18
b=[ 140, 140, 140, 125, 105, 90, 75, 60, 45, 30, 20, 15, 10, 5]; // Draft19
p1=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
p2=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
p3=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
p4=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
for (var i = 0; i < 14; i++){
    p1[i] = b[i]/1000; // Probabilidades primer sorteo
    for (var j = 0; j < 14; j++){
        if(i==j){
        }
        else {p2[j] = p2[j] + p1[i]* b[j]/(1000-b[i]); // Probabilidades segundo sorteo
        }
        for (var k = 0; k < 14; k++) {
            if (i == j || i == k || j == k){
            }
            else {p3[k] = p3[k] + (b[i]/1000) * (b[j]/(1000-b[i]))*(b[k]/(1000-b[i]-b[j]));} // Probabilidades tercer sorteo
                for (var l = 0; l < 14; l++) {
                    if (i == j || i == k || i == l ||j ==k || j == l || k == l){
                    }
                    else {p4[l] = p4[l] + (b[i]/1000) * (b[j]/(1000-b[i]))*(b[k]/(1000-b[i]-b[j]))* (b[l]/(1000-b[i]-b[j]-b[k]));} // Probabilidades cuarto sorteo
                }
        }
    }
}
// Formatea los números a cuatro decimales
for (var i = 0; i < 14; i++){
    p1[i] = p1[i].toFixed(4); p2[i] = p2[i].toFixed(4); p3[i] = p3[i].toFixed(4); p4[i] = p4[i].toFixed(4);
}
// print(' Draft 2018 \n');
print(' Draft 2019 \n');
print(' '+p1); print(' '+p2); print(' '+p3); print(' '+p4);

input

0.1400,0.1400,0.1400,0.1250,0.1050,0.0900,0.0750,0.0600,0.0450,0.0300,0.0200,0.0150,0.0100,0.0050
0.1342,0.1342,0.1342,0.1223,0.1054,0.0920,0.0780,0.0634,0.0483,0.0327,0.0220,0.0166,0.0111,0.0056
0.1275,0.1275,0.1275,0.1189,0.1056,0.0941,0.0814,0.0674,0.0523,0.0360,0.0245,0.0186,0.0125,0.0063
0.1197,0.1197,0.1197,0.1146,0.1053,0.0962,0.0852,0.0722,0.0572,0.0401,0.0276,0.0210,0.0143,0.0072
```

Figura 5. Código en JavaScript para el cálculo de cada uno de los sorteos

Equipo (E_k)	C_k-19
E_1	0,1197
E_2	0,1197
E_3	0,1197
E_4	0,1146
E_5	0,1053
E_6	0,0962
E_7	0,0852
E_8	0,0722
E_9	0,0572
E_{10}	0,0401
E_{11}	0,0276
E_{12}	0,0210
E_{13}	0,0143
E_{14}	0,0072

Tabla 6. Probabilidades en el cuarto sorteo

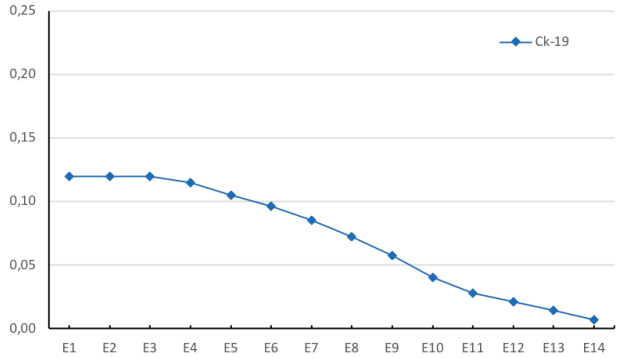


Figura 6. Representación gráfica de la tabla 6

y en naranja si han disminuido entre un 5% y un 10%. Además, se han remarcado en verde oscuro aquellas que han aumentado más de un 10%, y en verde claro si crecieron entre un 5% y un 10%.

Las conclusiones extraídas del estudio de la tabla 7 son claras: con el cambio de probabilidades, los últimos equipos han disminuido sus oportunidades de conseguir a los mejores jugadores. La táctica del *tanking* ya no ofrece una ventaja tal como plantearse apostar por una temporada llena de derrotas.

AppInventor

Una vez hemos explicado la importancia del cálculo de probabilidades en la NBA, podemos proponer a los alumnos el uso de un programa llamado AppInventor para que apliquen lo aprendido, y creen una aplicación para móvil que ayude a realizar estos cálculos. Pero primero, veamos qué es AppInventor.

Appinventor es un entorno de programación visual que permite a cualquier persona, incluyendo a los no familiarizados con la programación, crear aplicaciones para *smartphones* y tabletas con el sistema operativo Android, acercando a niños y mayores a la programación, pasando de ser meros usuario de aplicaciones a los creadores de las mismas.

El proceso de aprendizaje de lenguajes de programación tradicionales es mucho más lento que el de uso de bloques, con los cuales en menos de 30 minutos podemos tener una aplicación totalmente funcional.

Este entorno usa una interfaz gráfica parecida a Scratch, que permite arrastrar y soltar bloques de instrucciones de colores que hay que unir para que la aplicación realice la función deseada. De esta forma nos apartamos de la programación en texto donde debemos aprender y teclear unos comandos para cada una de las tareas a realizar.

A pesar de que no genera ningún código textual como Java, que se pueda descargar para un desarrollo más profundo y no sea tan flexible como este, permite realizar aplicaciones de una gran complejidad, de manera muy sencilla.

¿POR QUÉ APPINVENTOR?

MIT AppInventor es una gran herramienta para trabajar con las nuevas metodologías en el aula. Crear una aplicación móvil supone una gran motivación para los alumnos, ya que obtienen un producto final publicable, percibiendo el sentido de su esfuerzo, aprendizaje y trabajo.

Es gratuita, *online,* sin publicidad, no requiere instalación y es sencilla. Está ampliamente probada y el

Posición en la liga	Boletos en el draft	% de ganar la lotería del draft para elegir en las primeras 14 elecciones, a partir de 2019 (% de ganar la lotería del draft, desde 2005 a 2018)													
		1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª	13ª	14ª
30	140 (250)	14,0 (25,0)	13,4 (21,5)	12,7 (17,8)	12,0 (35,7)	[illegible]									
29	140 (199)	14,0 (19,9)	13,4 (18,8)	12,7 (17,1)	12,0 (31,9)	27,8 (12,3)	20,0								
28	140 (156)	14,0 (15,6)	13,4 (15,7)	12,7 (15,6)	12,0 (22,5)	14,8 (26,5)	26,0 (4,0)	7,0							
27	125 (119)	12,5 (11,9)	12,2 (12,6)	11,9 (13,3)	11,5 (0,9)	7,2 (35,1)	25,7 (16,0)	16,7 (1,2)	2,2						
26	105 (88)	10,5 (8,8)	10,5 (9,7)	10,6 (10,7)	10,5	2,2 (26,1)	19,6 (36,0)	2,7 (8,4)	8,7 (0,4)	0,6					
25	90 (63)	9,0 (6,3)	9.2 (7,1)	9,4 (8,1)	9,6		8,6 (43,9)	29,8 (30,5)	20,5 (4,0)	3,7 (0,1)	0,1				
24	75 (43)	7,5 (4,3)	7.8 (4,9)	8,1 (5,8)	8,5			19,7 (59,9)	34,1 (23,2)	12,9 (1,8)	1,3 (>0)	>0			
23	60 (28)	6,0 (2,8)	6.3 (3,3)	6,7 (3,9)	7,2				34,5 (72,4)	32,1 (16,8)	6,7 (0,8)	0,4 (>0)	>0		
22	45 (17)	4,5 (1,7)	4.8 (2,0)	5,2 (2,4)	5,7					50,7 (81,3)	25,9 (12,2)	3,0 (0,4)	0,1 (>0)	>0	
21	30 (11)	3,0 (1,1)	3.3 (1,3)	3,6 (1,6)	4,0						65,9 (87,0)	19,0 (8,9)	1,2 (0,2)	>0 (>0)	>0
20	20 (8)	2,0 (0,8)	2.2 (0,9)	2,4 (1,2)	2,8							77,6 (90,7)	12,6 (6,3)	0,4 (0,1)	>0 (>0)
19	15 (7)	1,5 (0,7)	1.7 (0,8)	1,9 (1,0)	2,1								86,1 (93,5)	6,7 (3,9)	0,1 (>0)
18	10 (6)	1,0 (0,6)	1.1 (0,7)	1,2 (0,9)	1,4									92,9 (96,0)	2,3 (1,8)
17	5 (5)	0,5 (0,5)	0.6 (0,6)	0,6 (0,7)	0,7										97,6 (98,2)

Con la nueva regla, los peores equipos disminuyen sus oportunidades de ganar

Hay más equipos con opciones de ganar sin tener que perder partidos

Tabla 7. Comparativa de probabilidades entre los dos modelos de *draft*

tiempo para realizar una actividad es corto. Una vez que se familiarizan con la herramienta se pueden realizar aplicaciones sencillas en una o dos sesiones. Las aplicaciones que se pueden crear pueden ser muy útiles y personalizadas, y son escalables, podemos incrementar el número de pantallas o la funcionalidad de la misma.

De esta forma, tenemos la oportunidad de trabajar algunas de las competencias en el aula: se fomenta la creatividad, las competencias sociales y cívicas a la hora de realizar el trabajo en grupo, la competencia digital, competencia en ciencias y tecnología, aprender a aprender, sentido de iniciativa y espíritu emprendedor y comunicación lingüística.

Una vez que se familiarizan con la herramienta se pueden realizar aplicaciones sencillas en una o dos sesiones.

Podemos trabajar de dos formas diferentes:

- Creación guiada de *apps*: se muestra a los alumnos un tutorial con los pasos a seguir para realizar una pequeña aplicación de modo que los alumnos aprendan el uso de la herramienta.
- Proyecto: una vez que los alumnos están familiarizados con la aplicación se les propone la realización de una *app* propia. Aquí es donde los alumnos pueden ser creativos y echar mano de su imaginación.

UN POCO DE HISTORIA

Creada inicialmente por Hal Abelson, profesor de Ingeniería y Ciencias de la Computación del MIT. Abelson se tomó un año sabático y se fue a colaborar con Google Labs, su famoso laboratorio de ideas. Se basó en la tesis de fin de máster de Ricarose Roque, que había realizado una versión general de la interfaz del director del MIT, Eric Klopfer, llamada StarLogo, y creó un sistema visual e intuitivo para desarrollar aplicaciones móviles de manera sencilla y rápida.

StarLogo empezó siendo la tesis de Mitchel Resnick, que dirigía el MIT's Media Arts and Science Program, y cuyos tutores fueron Abelson y Seymour Papert, un pionero de la educación computacional. Papert inventó Logo, un lenguaje de programación simple diseñado para introducir a los niños en las bases de la programación. Inicialmente Logo guiaría a un robot que incluye un lápiz en su estructura, creando un dibujo. Logo fue la base de Lego.

Ejemplo de programación con Logo

```
Dibujar un cuadrado de 70 x 70
REPITE 4[AVANZA 70 GIRADERECHA 90]
```

En 2010 se lanzó la primera versión, llamada Google APP Inventor, y un año más tarde liberaron el código, lo cedieron al MIT, e hicieron una aportación para la financiación inicial. El MIT continuó el proyecto desde la universidad, pasándose a llamar App Inventor Classic. Lo mejoraron y en 2013 sacaron una nueva versión más potente: MIT App Inventor.

En 2016 se introdujo una nueva versión que evita tener que instalar nada en el ordenador, ya que la prueba de aplicaciones se puede realizar de 3 maneras diferentes: conexión USB con el móvil o tablet, por wifi, o por medio del emulador.

¿CÓMO SE TRABAJA?

Consta de 4 fases:

Diseño de la aplicación

Para comenzar el proceso de creación necesitaremos únicamente un ordenador con conexión a internet, preferiblemente con un navegador como Google Chrome o Mozilla Firefox, y tener una cuenta de Google. Además, debemos tener claro qué queremos que realice nuestra aplicación y el diseño de las pantallas, podemos tener un boceto en papel si es necesario. Una vez que tengamos el croquis de nuestra aplicación, debemos crearla. Para

ello tenemos la pantalla **Diseñador** (figura 7), que consta de varios apartados. En la **Paleta** tenemos todos los componentes que puede tener la aplicación. Basta con arrastrar un componente a la sección **Visor**. Veremos el componente en la sección **Componentes**, la cual tiene un botón para cambiar el nombre de estos. Se recomienda poner un nombre que indique la función del propio elemento. Posteriormente, en **Propiedades** podemos cambiar las características de nuestro componente: color, tamaño, etc. En la sección **Medios** podemos subir imágenes, sonidos, etc.

Creación de bloques

Una vez que tengamos el diseño de nuestra *app* creado, debemos darle funcionalidad, en la pantalla **Bloques**. En esta pantalla tenemos dos secciones, como se puede ver en la figura 8.

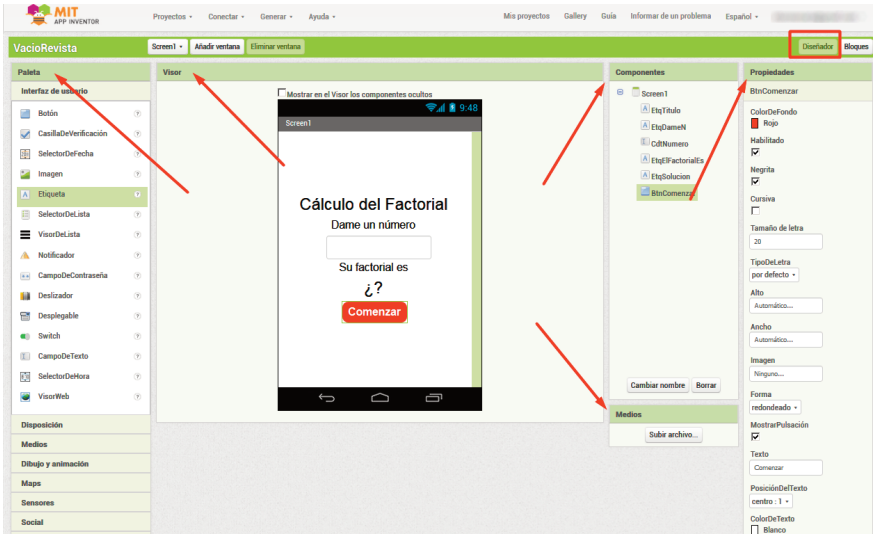


Figura 7. Pantalla Diseñador

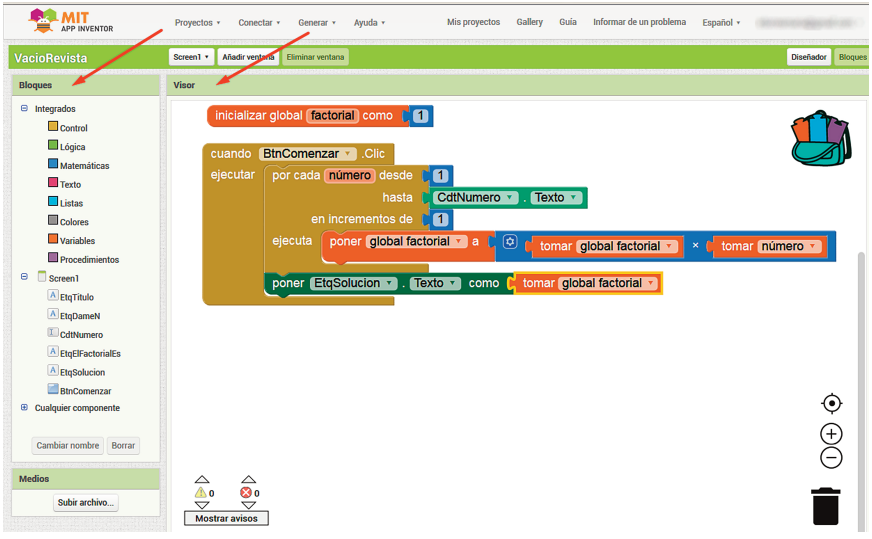


Figura 8. Pantalla Bloques

En la sección **Bloques** disponemos de los **Bloques Integrados**, que son aquellos comunes a cualquier aplicación. Debajo podemos encontrar los correspondientes a cada uno de los componentes (figura 9). Los bloques tienen diferentes formas y colores, que nos indican de qué tipo son y cómo podemos unirlos. Pinchando en cada uno de ellos podemos ver los bloques disponibles de cada componente o de cada tipo.

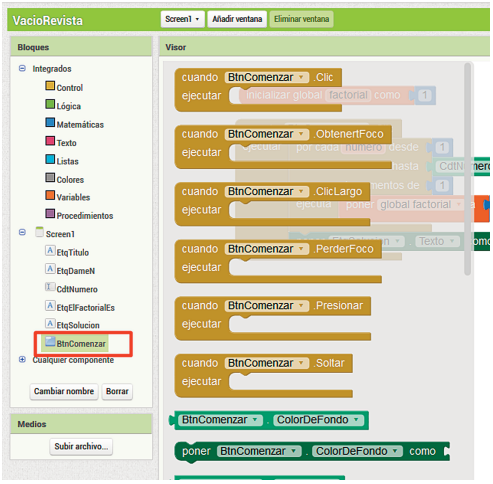


Figura 9. Bloques de cada componente

Realización de pruebas

Para probar nuestra aplicación la forma más sencilla y rápida es tener instalada la aplicación MIT AI2 Companion en el móvil.

Pulsamos en el menú **Conectar** > **AI Companion** (figura 10) y escaneamos el código QR (figura 11) que genera. También podemos usar el **Emulador** o conectar por **USB**.

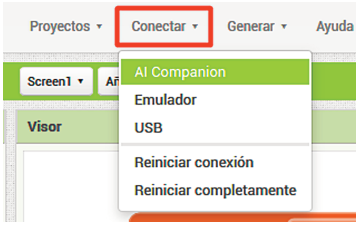


Figura 10. Menú Conectar



Figura 11. Código QR

Generación de la App

Una vez probada podemos generar la aplicación. Podemos generar un código QR o descargarla al ordenador (figura 12).

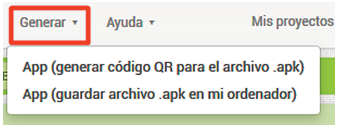


Figura 12. Generar *app*

UN EJEMPLO PRÁCTICO

Veamos ahora un ejemplo práctico de uso de AppInventor en el aula.

Una de las actividades más interesantes es que sean ellos mismos los que realicen una aplicación que calcule las combinaciones con o sin repetición.

Para ello, primero debemos hacer una aplicación que calcule el factorial de un número. Esto lo podemos realizar de forma guiada con ellos, para que posteriormente puedan ampliar la *app* con otras pantallas que calculen variaciones y combinaciones con o sin repetición.

Factorial

El diseño constará de seis elementos. De ellos, cuatro son etiquetas (figura 13):

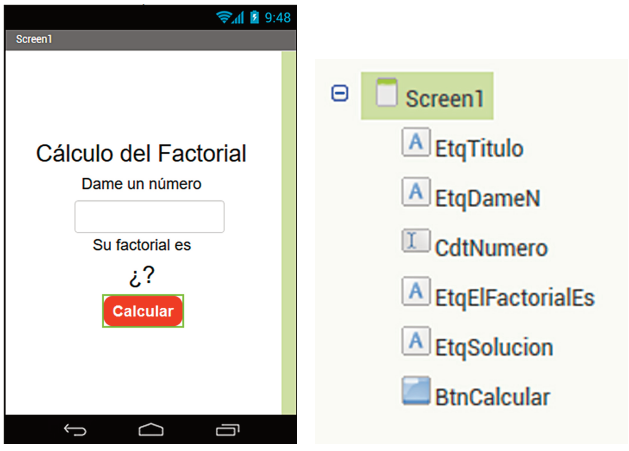


Figura 13. Diseño de la *app* factorial y sus elementos

— *EtqTitulo*: donde pone «Cálculo del Factorial».
— *EtqDameN:* donde se muestra «Dame un número».
— *EtqElFactorialEs*: cuyo texto dice «Su factorial es».
— *EtqSolucion*: que en principio muestra dos interrogaciones, pero será donde se muestre el resultado del cálculo del factorial.
— *CdtNumero*: campo de texto donde el usuario puede introducir el número del cual se quiere conocer el factorial. Es importante que en las propiedades se indique que solo puedan introducirse números.
— *BtnCalcular*: botón que si se pulsa realiza el cálculo.

Conviene ahora hacer pensar a los alumnos, cómo programar el factorial de un número (figura 14).

Combinaciones

Ahora vamos a realizar un programa que calcule las combinaciones. Vamos a explicar solo los elementos que consideramos imprescindibles, empezando por el diseño de la pantalla (figura 15).

Primero realizaremos la programación solo de las combinaciones sin repetición, y dejaremos para la siguiente tarea el cálculo de las combinaciones con repetición.

Para ello, creamos cinco variables (figura 16).

Reutilizamos el cálculo del factorial de la práctica anterior para crear el procedimiento *factorial* (figura 17)

Usamos el procedimiento *factorial* para calcular las combinaciones de n elementos tomados de m en m (figura 18):

— Calculamos el factorial de n y asignamos el resultado a la variable *factorialN*.
— Calculamos el factorial de m y asignamos el resultado a la variable *factorialM*.
— Calculamos el factorial de $n-m$ y asignamos el resultado a la variable *factorialNmenosM*.
— Asignamos el resultado de la operación *factorialN* / (*factorialM* × *factorialNmenosM*) a la variable *combinaciones*.

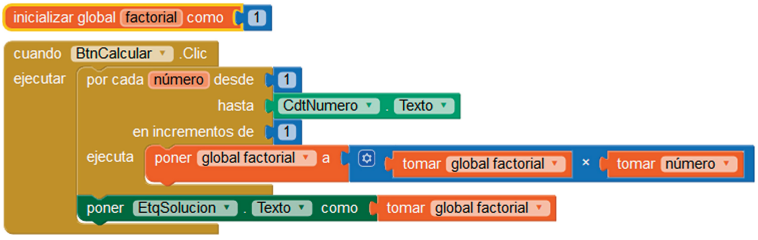


Figura 14. Programación del factorial por bloques

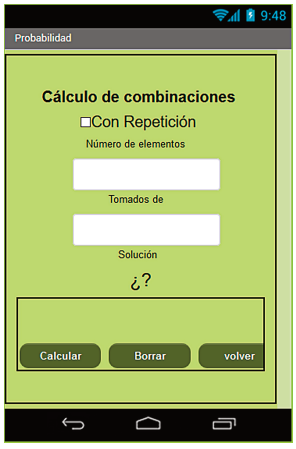


Figura 15. Diseño de la *app* combinaciones



Figura 16. Variables de la *app* combinaciones

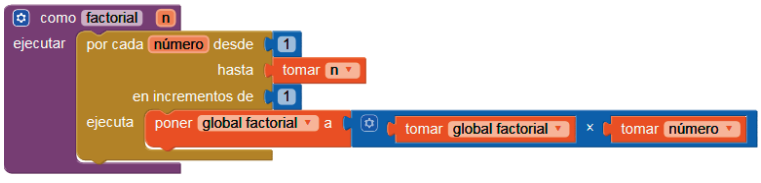


Figura 17. Procedimiento factorial. Programación por bloques

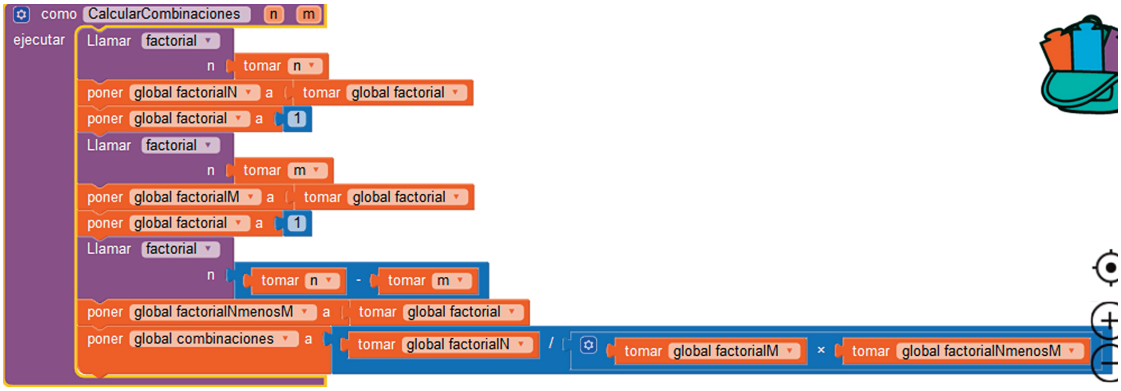


Figura 18. Programación del procedimiento para el cálculo de combinaciones

Ahora vamos a darle funcionalidad al botón *BtnCalcular* (figura 19):

— Primero inicializamos las variables.
— Después llamamos a *CalcularCombinaciones*.
— Por último vamos a modificar este botón para añadir la funcionalidad de cálculo de combinaciones con repetición. Para ello introducimos un condicional si-entonces-sino que está controlado por la variable *CdVConRepetición* (figura 20).

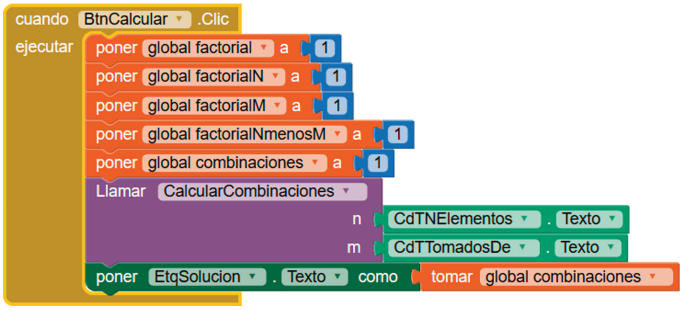


Figura 19. Programación del botón para el cálculo de combinaciones

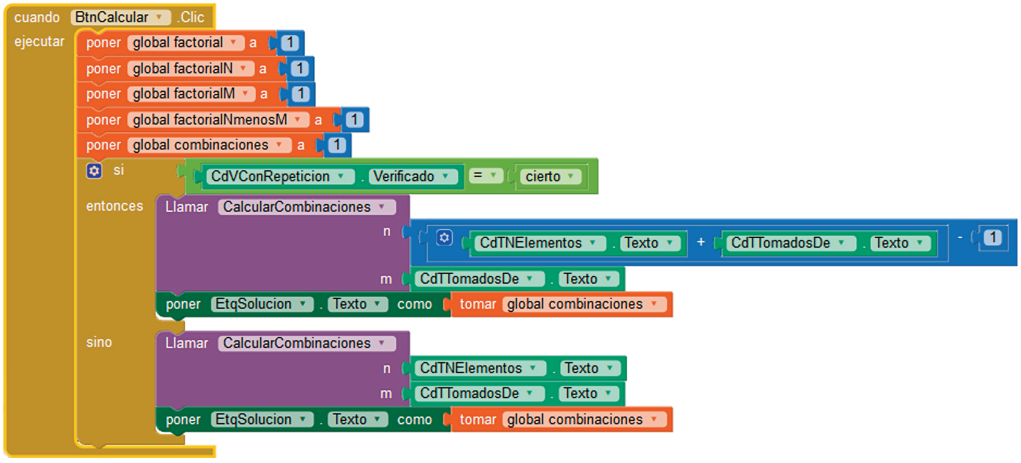


Figura 20. Programación del botón para el cálculo de combinaciones con repetición

Mejoras que pueden realizar los alumnos:

— Evitar que se puedan introducir números negativos.
— Evitar que se pueda meter un número *m* mayor que el *n*.
— Evitar números decimales.
— Añadir una pantalla para el cálculo de variaciones.
— Añadir una pantalla con un test sobre el *draft* de la NBA y la combinatoria.

Nosotros hemos realizado una aplicación a modo de ejemplo. Esta aplicación puede pasársele a los alumnos o servir de ejemplo para que vean cómo debe quedar la suya. Tiene tres secciones:

— La primera es un enlace a varios vídeos de YouTube que explican el *draft* de la NBA y la combinatoria asociada al mismo. Se pueden usar en el aula o pasar a los alumnos la aplicación.
— La segunda parte consta de un test, que puede servir de modelo para que los alumnos realicen uno propio o para que lo realicen y comprueben su puntuación.
— La tercera es una aplicación para el cálculo de combinaciones con o sin repetición.

Se puede ver y descargar la aplicación, incluidos los manuales, mediante el código QR que aparece abajo.

Referencias bibliográficas

ALONSO, D. (2019a), «Las matemáticas del draft NBA», *Revista ZONA AZUL*, n.º 29, 26-27.

— (2019b), «Draft, tanking y matemáticas», *Revista ZONA AZUL*, n.º 30, 24-25.

CABELLO, J. M. (2015), *Crea tus aplicaciones android con app inventor 2*, IC Editorial, Antequera, Málaga.

HARDESTY, L. (2010), «The MIT roots of Google's new software», *MIT News*, <http://news.mit.edu/2010/android-abelson-0819>.

HUERTAS, J.I (2013), «Estrenamos versión 2 de App Inventor», *Programamos,* < https://programamos.es/estrenamos-version-de-app-inventor/>.

POSADA, F. (2019), «Creando aplicaciones para móviles Android con MIT App Inventor 2», *INTEF*, <https://intef.es/wp-content/uploads/2019/03/MIT-App-Inventor-2.pdf>.

STEWART, I. (2016), *Números increíbles*, Planeta, Barcelona.

App Inventor for Educators, <http://teach.appinventor.mit.edu/>

MIT App Inventor, <https://appinventor.mit.edu/explore/about-us.html>.

<http://www.blogdebasket.com/tag/nba-draft-2019>.

<https://revistasuperlopez.lopezdemendoza.info/>.

Joaquín Aguilar Barriuso
IES Cardenal López de Mendoza (Burgos)
<joaquinaguilar@lopezdemendoza.es>

Diego Alonso Santamaría
IES Cardenal López de Mendoza (Burgos)
<diegoalonsosan@hotmail.com>

Elena Torres María
IES Cardenal López de Mendoza (Burgos)
<etorresmaria@hotmail.com>

seccione S

MUJERES MATEMÁTICAS:
ROMPIENDO MOLDES

Klára Dán Von Neumann, olvidada pionera de la computación

Marta Macho Stadler

SUMA+ núm. 96
pp. 59-64
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2020 y aceptado en enero de 2021

> Mucho antes de que se terminara la máquina, me convertí en el conejillo experimental de Johnny. Fue de lo más divertido. Aprendí a traducir ecuaciones algebraicas en formas numéricas, que luego a su vez tienen que pasarse al lenguaje de la máquina en el orden en el que esta tiene que calcularlo.
>
> Cita de Klára Dán Von Neuman
> en *La catedral de Turing* de George Dyson.

Klára Dán Von Neumann, como otras muchas mujeres, vivió a la sombra de un científico brillante, de su marido, el que llama *Johnny* en la cita que abre este escrito. Klára no tenía formación matemática posterior a la del instituto, pero aprendió a programar de manera autodidacta. Aparece citada como «ayudante» en diferentes proyectos en el libro de historia de la computación *La catedral de Turing: Los orígenes del universo digital* de George Dyson. Muchas otras mujeres se nombran en este libro como «asistentes» de sus maridos. Quizás muchas de ellas fueron algo más que meras auxiliares: ese es el caso de Klára Dán Von Neumann.

Pero empecemos por el principio…

Las máquinas ENIAC, EDVAC y MANIAC

La máquina ENIAC[1], puesta en marcha en 1946, fue uno de los primeros ordenadores de propósito general. Dos ingenieros, John Presper Eckert[2] y John William Mauchly[3], la construyeron. Y seis mujeres la programaron[4], las llamadas *Las mujeres del ENIAC*: Betty Snyder Holberton, Betty Jean Jennings Bartik, Kathleen McNulty Mauchly Antonelli, Marlyn Wescoff Meltzer, Ruth Lichterman Teitelbaum y Frances Bilas Spence. Todas ellas tenían formación matemática —excepto Betty Snyder Holberton, que era periodista— y aprendieron prácticamente de manera autodidacta a programar.

Procedían de un grupo de unas doscientas mujeres empleadas como computistas en la Escuela Moore

de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Pensilvania. Su trabajo consistía en obtener resultados numéricos —en general con calculadoras mecánicas— a partir de fórmulas matemáticas incluidas en estudios científicos o proyectos de ingeniería. Cuando llegaron las primeras computadoras, algunas de estas mujeres estudiaron la lógica, la estructura física y el funcionamiento de estas máquinas para comprender no solo las matemáticas de la computación, sino también la estructura interna de esos ordenadores.

Herman Goldstine[5] era quien seleccionaba a las programadoras entre estas computistas. En un momento en el que los programas de ordenador aún no existían, Herman y Adele Goldstine[6] dirigieron a estas mujeres en el estudio de los planos y la estructura física de ENIAC, ya que debían entender cómo manipular sus cables e interruptores. Adele Goldstine fue, por cierto, la primera persona en documentar un manual técnico de computación con la ENIAC.

La máquina ENIAC, diseñada inicialmente para calcular tablas de tiro de artillería para el Laboratorio de Investigación Balística del Ejército de los Estados Unidos, fue posteriormente reprogramada para resolver otro tipo de problemas numéricos. Trabajando en esas reprogramaciones también hubo muchas mujeres.

Entre otros proyectos, en 1950, ENIAC fue empleada por un grupo de meteorólogos del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton[7] para producir un pronóstico del tiempo mediante técnicas numéricas. Este pronóstico, de tan solo 24 horas, marcó los comienzos de la predicción numérica del tiempo. En ese grupo también estaba el conocido matemático John von Neumann[8].

La máquina EDVAC[9] fue diseñada antes de que la ENIAC se pusiera en marcha. A diferencia de la primera, EDVAC era binaria y sus programas podían diseñarse para ser almacenados. También la construyeron Eckert y Mauchly. Se les unió posteriormente von Neumann quien, en 1945, redactó el informe *First Draft of a Report about the EDVAC*[10] como memoria del grupo de trabajo. Herman Goldstine difundió este documento entre algunos colegas implicados en el proyecto EDVAC, pero lo hizo citando a von Neumann como único autor. Ellos, a su vez, remitieron este borrador a otros investigadores de Estados Unidos e Inglaterra. Aunque incompleto, este informe[11] se convirtió en un modelo para el diseño lógico de una computadora que utiliza el concepto de programa almacenado, y la arquitectura de la EDVAC pasó a conocerse como *arquitectura de von Neumann*[12], nombre que generó una comprensible polémica. La máquina EDVAC comenzó a funcionar en 1951.

Nicholas Constantine Metropolis[13] diseñó y construyó en 1952 la máquina MANIAC I[14] en el Laboratorio Nacional de Los Álamos[15]. Se basaba en la *arquitectura de von Neumann* de la máquina IAS[16] que von Neumann había desarrollado en Princeton. Comenzó a operar con éxito en marzo de 1952 hasta que fue reemplazada por la máquina MANIAC II[17] en 1957. Una tercera versión, MANIAC III[18], fue construida en la Universidad de Chicago en 1964.

Además del significado oficial del acrónimo MANIAC, Metropolis eligió el nombre de esta computadora con la esperanza de terminar con el auge de acrónimos con los que se nombraban a las máquinas. Aunque es probable que con su elección solo esti-

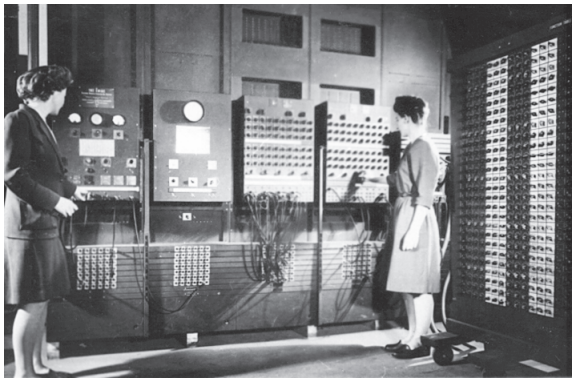


Figura 1. Betty Jennings y Frances Bilas operando en la máquina ENIAC
Fuente: Wikimedia Commons <https://es.wikipedia.org/wiki/ENIAC#/media/Archivo:Two_women_operating_ENIAC.gif>

mulara más aún su uso. El propio Metropolis explicaba un significado más «personal»[19]:

> Había regresado a Los Álamos para intentar organizar parte de los proyectos aquí, y pasé el año en Princeton aprendiendo sobre la máquina que estaba construyendo Johnny. Ese era el proyecto que se estaba llevando a cabo en Princeton.
> Yo había propuesto que se llamara MANIAC, y Johnny pensó que eso era demasiado frívolo. Pero tenía en mente llamarlo MANIAC, porque acabaría con la denominación de máquinas. No se le permitiría pasar. Porque [pero] tuvo el efecto contrario.
> Entonces George Gamow, el astrofísico, dijo que «Metropolis y Neumann inventan un artilugio terrible». Pero en realidad, la palabra «MANIAC» se adelantó a lo que representaba.

El primer trabajo que se asignó a MANIAC I fue realizar cálculos rigurosos y amplios de los mecanismos que rigen una reacción termonuclear. En 1953, MANIAC I obtuvo la primera ecuación calculada mediante integración de Montecarlo[20] modificada sobre el espacio de configuración.

Muchas de las programadoras de esas primeras computadoras eran mujeres. La mayoría de ellas tenían una completa formación matemática; sus conocimientos y habilidades consiguieron que aquellas enormes máquinas funcionaran. Una de estas mujeres fue Klára Dán Von Neumann.

Klára Dán Von Neumann (1911-1963)

Además de sus numerosas contribuciones a las matemáticas y la física, la influencia de John von Neumann en el mundo de la computación ha sido esencial a través, en particular, de la citada *arquitectura de von Neumann* utilizada prácticamente en cualquier ordenador. La denominación de esa arquitectura ignoró la contribución de Eckert y Mauchly. Aunque no son las únicas personas cuyo papel en la historia de la computación ha quedado oculto a la sombra de von Neumann: su segunda esposa, Klára, también lo fue.

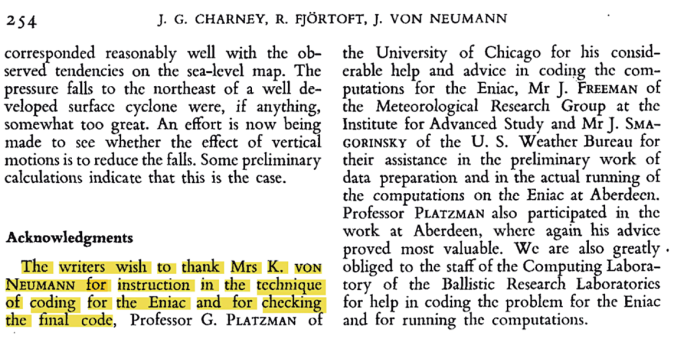
Klára Dán nació el 18 de agosto de 1911 en Budapest, en el seno de una familia acomodada. Conoció a von Neumann en un viaje a Budapest antes del comienzo de la Segunda Guerra Mundial. En 1938 el matemático se divorció de su primera esposa y Klára



Figura 2. Klára Dán y John von Neumann hacia 1950
Fuente: <https://bit.ly/3b0itsk>

Dán se separó de Andor Rapoch, su segundo marido, para casarse con él. El matrimonio emigró a Estados Unidos, donde von Neumann ocupó una cátedra en la Universidad de Princeton.

En 1943, von Neumann se trasladó al Laboratorio Nacional de Los Álamos para trabajar en cálculos relacionados con el Proyecto Manhattan[21]. Klára permaneció en Princeton hasta 1946, trabajando en la Oficina de Investigación Demográfica[22] de Princeton. Tras la guerra, se unió a su marido en Nuevo México para programar la máquina MANIAC I; había sido diseñada por von Neumann y Julian Bigelow[23] para apoyar la investigación de fusión nuclear.



254 J. G. CHARNEY, R. FJÖRTOFT, J. VON NEUMANN

corresponded reasonably well with the observed tendencies on the sea-level map. The pressure falls to the northeast of a well developed surface cyclone were, if anything, somewhat too great. An effort is now being made to see whether the effect of vertical motions is to reduce the falls. Some preliminary calculations indicate that this is the case.

Acknowledgments

The writers wish to thank Mrs K. VON NEUMANN for instruction in the technique of coding for the Eniac and for checking the final code, Professor G. PLATZMAN of the University of Chicago for his considerable help and advice in coding the computations for the Eniac, Mr J. FREEMAN of the Meteorological Research Group at the Institute for Advanced Study and Mr J. SMAGORINSKY of the U. S. Weather Bureau for their assistance in the preliminary work of data preparation and in the actual running of the computations on the Eniac at Aberdeen. Professor PLATZMAN also participated in the work at Aberdeen, where again his advice proved most valuable. We are also greatly obliged to the staff of the Computing Laboratory of the Ballistic Research Laboratories for help in coding the problem for the Eniac and for running the computations.

Figura 3. Agradecimientos en el artículo *Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation:* «Los autores desean dar las gracias a Mrs. K. VON NEUMANN por la instrucción en la técnica de programación del ENIAC y por revisar el código final [...]».

Klára también trabajó en la máquina ENIAC para producir el primer pronóstico meteorológico con ayuda de una computadora. Tradujo a código de programación las ecuaciones simplificadas de la dinámica atmosférica, con lo que, en 1950, fue posible realizar la primera predicción del tiempo por ordenador. Klára enseñó al equipo de meteorólogos a programar ENIAC y revisó el programa final. Von Neumann y los meteorólogos Jule Charney[24] y Ragnar Fjörtoft[25] publicaron en 1950 el artículo *Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation*[26] con los detalles de este experimento. Klára no firmó ese trabajo y, de este modo, quedó al margen de los reconocimientos posteriores. Tan solo aparecía como Mrs. K. von Neumann, de nuevo invisibilizada, en los agradecimientos finales (figura 3):

> Klára Dán von Neumann, la brillante esposa del más famoso Johnny, enseñó a los autores de Tellus[27] cómo codificar ENIAC y verificó el código final, ¿todas las 100.000 tarjetas perforadas?... Pero ¿cuántos meteorólogos, incluso mujeres en nuestro campo, lo saben? Paul Edwards lo sabe, porque mencionó a Klára en su excelente A Vast Machine, pero pocos más[28].
>
> John Knox

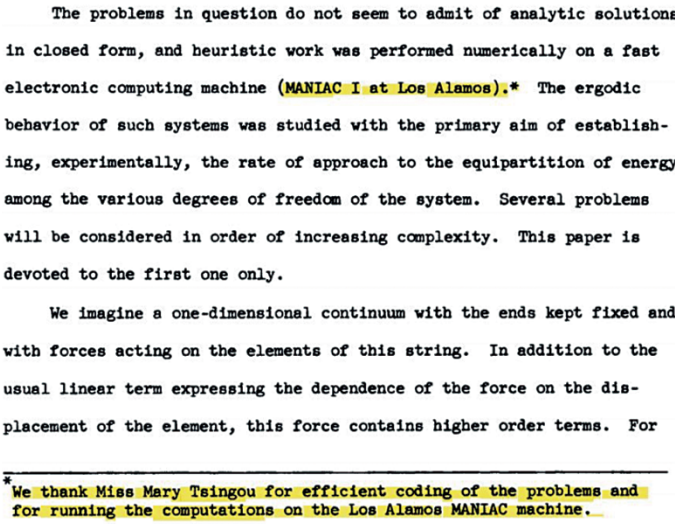
Tras la muerte de von Neumann en 1957, Klára Dán editó el texto y escribió el prefacio de las *Conferencias Silliman*[29] que el matemático impartió, ya enfermo, entre los años 1955 y 1956. Fueron publicadas en 1958, y posteriormente editadas y publicadas bajo el título de *The Computer and the Brain*[30].

Dán se casó en 1958 con Carl Eckart[31] y se mudaron a La Jolla, California. Klára sufrió numerosas depresiones durante su vida. Falleció ahogada en la playa en 1963; probablemente se suicidó.

Bonus

En 1956, Enrico Fermi[32], John Pasta[33] y Stanislaw Ulam[34] publicaron el informe técnico *Studies of the Nonlinear Problems*[35] elaborado en el Laboratorio Científico de Los Álamos. En este artículo analizaban los métodos y los resultados de algunas simulaciones físicas desarrolladas en la máquina MANIAC. Este trabajo se denominó *problema de Fermi-Pasta-Ulam*. En una nota a pie de página, los autores agradecían su colaboración a Mary Tsingou[36] (figura 4).

La matemática y física Mary Tsingou (1928) fue una de las primeras programadoras de la computadora MANIAC. Como le sucedió a Klára Dán, Mary Tsingou debió conformarse con un simple agradecimiento por haber desarrollado el algoritmo usado en el experimento Fermi-Pasta-Ulam, problema que mostró la importancia de las simulaciones computacionales en la investigación en física.



The problems in question do not seem to admit of analytic solutions in closed form, and heuristic work was performed numerically on a fast electronic computing machine (MANIAC I at Los Alamos).* The ergodic behavior of such systems was studied with the primary aim of establishing, experimentally, the rate of approach to the equipartition of energy among the various degrees of freedom of the system. Several problems will be considered in order of increasing complexity. This paper is devoted to the first one only.

We imagine a one-dimensional continuum with the ends kept fixed and with forces acting on the elements of this string. In addition to the usual linear term expressing the dependence of the force on the displacement of the element, this force contains higher order terms. For

* We thank Miss Mary Tsingou for efficient coding of the problems and for running the computations on the Los Alamos MANIAC machine.

Figura 4. Agradecimientos en el artículo *Studies of the Nonlinear Problems:* «Agradecemos a la señorita Mary Tsingou la eficiente programación de los problemas y el haber implementado los códigos en la máquina MANIAC de Los Álamos».

En el caso de Tsingou, fue un artículo publicado en 2008[37] el que reivindicó la aportación de la matemática en este experimento. Su autor, el físico Thierry Dauxois, solicitó además el cambio de designación de *problema de Fermi-Pasta-Ulam* a *problema de Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou*. En algunas referencias, este cambio ya aparece.

¿Cuántas contribuciones relevantes de mujeres en los principios de la computación habrán quedado olvidadas?

Referencias bibliográficas

Coyle, K. (2012), *Turing's Cathedral, or Women Disappear,* Coyle's InFormation, <http://kcoyle.blogspot.com/2012/11/turings-cathedral-or-women-disappear.html>.

Macho, M. (2021), «Klára Dán Von Neumann, desconocida pionera de la programación», *Mujeres con ciencia, Vidas científicas,* 6 de enero de 2021, <https://mujeresconciencia.com/2021/01/06/klara-dan-von-neumann-desconocida-pionera-de-la-programacion/>.

Sánchez, C. (2017), «Klara von Neumann: la programadora pionera que fue olvidada por la historia», *El Confidencial,* 21 de octubre de 2017 <https://www.elconfidencial.com/tecnologia/2017-10-21/klara-von-neumann-programadora-pionera-eniac_1464078/>.

Shepherd, M. (2017), «How A Woman You Never Heard Of Helped Enable Modern Weather Prediction», *Forbes*, 24 de enero de 2017 <https://bit.ly/3rMKycA>.

Klara Dan von Neumann, Wikipedia <https://en.wikipedia.org/wiki/Klara_Dan_von_Neumann> [Consultado el 25 de diciembre de 2020].

Marta Macho Stadler
Universidad del País Vasco
<marta.macho@ehu.eus>

1 ENIAC es el acrónimo de *Electronic Numerical Integrator And Computer* <https://es.wikipedia.org/wiki/ENIAC>.

2 El ingeniero eléctrico John Presper Eckert (1919-1995) fue un pionero de la informática <https://es.wikipedia.org/wiki/John_Presper_Eckert>.

3 El físico John William Mauchly (1907-1980) creó, junto a John Presper Eckert la primera empresa de ordenadores, la *Eckert-Mauchly Computer Corporation* <https://es.wikipedia.org/wiki/John_William_Mauchly>.

4 Betty Snyder Holberton (1917-2001) <https://mujeresconciencia.com/2015/03/07/betty-snyder-holberton-programadora/>, Betty Jean Jennings Bartik (1924-2011) <https://mujeresconciencia.com/2014/12/27/betty-jean-jennings-bartik-programadora/>, Kathleen McNulty Mauchly Antonelli (1921-2006) <https://mujeresconciencia.com/2015/02/12/kathleen-mcnulty-mauchly-antonelli-programadora/>, Marlyn Wescoff Meltzer (1922-2008) <https://es.wikipedia.org/wiki/Marlyn_Wescoff_Meltzer>, Ruth Lichterman Teitelbaum (1924-1986) <https://es.wikipedia.org/wiki/

Ruth_Lichterman_Teitelbaum> y Frances Bilas Spence (1922-2012) <https://mujeresconciencia.com/2016/03/02/frances-bilas-spence-programadora/>.

5 El matemático y administrador científico Herman Heine Goldstine (1913-2004) fue uno de los principales desarrolladores de ENIAC <https://es.wikipedia.org/wiki/Herman_Goldstine>.

6 La matemática y programadora Adele Goldstine (1920-1964) fue la primera programadora de ENIAC. Después lideró y formó a *Las mujeres del ENIAC* <https://mujeresconciencia.com/2019/12/21/adele-goldstine-programadora/>.

7 <https://es.wikipedia.org/wiki/Institute_for_Advanced_Study>.

8 El matemático John von Neumann (1903-1957) realizó contribuciones fundamentales en numerosos campos científicos como física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, teoría de juegos, ciencias de la computación, economía, análisis numérico o estadística. Se le considera uno de los matemáticos más importantes del siglo xx <https://es.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann>.

9 EDVAC es el acrónimo de *Electronic Discrete Variable Automatic Computer* <https://es.wikipedia.org/wiki/EDVAC>.

10 *First Draft of a Report about the EDVAC* es un documento incompleto de 101 páginas escrito por John von Neumann y distribuido el 30 de junio de 1945 por Herman Goldstine. <https://en.wikipedia.org/wiki/First_Draft_of_a_Report_on_the_EDVAC>.

11 <http://web.mit.edu/STS.035/www/PDFs/edvac.pdf>.

12 <https://es.wikipedia.org/wiki/Arquitectura_de_von_Neumann>.

13 El matemático y físico Nicholas Constantine Metropolis (1915-1999) construyó la computadora MANIAC I en 1952 y MANIAC II en 1957 <https://es.wikipedia.org/wiki/Nicholas_Metropolis>.

14 MANIAC I es el acrónimo de *Mathematical Analyzer, Numerator, Integrator, and Compute*r <https://es.wikipedia.org/wiki/MANIAC_I>. En la película de ciencia ficción *The Magnetic Monster* aparece un ordenador llamado MANIAC I (aunque su aspecto no es el del ordenador real). Parece que se incluyó para dar un aspecto «más científico» al largometraje, <https://en.wikipedia.org/wiki/The_Magnetic_Monster>.

15 El Laboratorio Nacional de Los Álamos se fundó durante la Segunda Guerra Mundial. Era una instalación secreta que coordinaba el Proyecto Manhattan, proyecto Aliado para conseguir las primeras armas nucleares <https://es.wikipedia.org/wiki/Laboratorio_Nacional_de_Los_%C3%81lamos>.

16 La máquina IAS fue el primer computador digital construido por el Instituto para el Estudio Avanzado (IAS, por sus siglas en inglés de Institute for Advanced Study), en Princeton (Estados Unidos) <https://es.wikipedia.org/wiki/IAS_machine>.

17 <https://es.wikipedia.org/wiki/MANIAC_II>.

18 <https://en.wikipedia.org/wiki/MANIAC_III>.

19 Nicholas Metropolis: «I had returned to Los Alamos to try to do some of the organizing of the projects here, and spent the year in Princeton learning about the machine there that Johnny was building. That was the project that was going on at Princeton.

«I had proposed that it be called the MANIAC, and Johnny thought that that was too frivolous. But I had in mind calling it the MANIAC, because it would put an end to the naming of machines. It would not be allowed to pass. Because [but] it had just the opposite effect.

So George Gamow, the astrophysicist, said that "Metropolis and Neumann Invent Awful Contraption." But actually, the word "MANIAC" came ahead of what it stood for».

Cita extraída de *Atomic Heritage Foundation* <https://www.atomicheritage.org/tour-stop/computing#.X-dabNhKjXV>.

20 <https://es.wikipedia.org/wiki/Integración_de_Montecarlo>.

21 <https://es.wikipedia.org/wiki/Proyecto_Manhattan>.

22 <https://en.wikipedia.org/wiki/Office_of_Population_Research>.

23 El ingeniero Julian Bigelow (1913-2003) fue un pionero en computación <https://en.wikipedia.org/wiki/Julian_Bigelow>.

24 Jule Charney (1917-1981) desempeñó un importante papel en el desarrollo de las primeras predicciones numéricas meteorológicas y en el diseño de modelos matemáticos de la atmósfera <https://en.wikipedia.org/wiki/Jule_Gregory_Charney>.

25 Ragnar Fjørtoft (1913-1998) formó parte del equipo de Princeton que, en 1950, realizó la primera predicción meteorológica numérica utilizando la computadora ENIAC <https://en.wikipedia.org/wiki/Ragnar_Fjørtoft>.

26 J. G. Charney, R. Fjørtoft, J. von Neumann, «Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation», *Tellus 2 (4)* (1950) 237-254 <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/j.2153-3490.1950.tb00336.x>.

27 Revista en la que se publicó el artículo «Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation».

28 «Klara Dan von Neumann, the brilliant wife of the more famous Johnny, taught the Tellus authors how to code ENIAC, and checked the final code, all 100,000 or so punch-cards of it?...But how many meteorologists, even women in our field, know about this? Paul Edwards knows, because he mentioned Klara in his excellent A Vast Machine--but few others». Cita extraída de *How A Woman You Never Heard Of Helped Enable Modern Weather Prediction.*

29 <https://en.wikipedia.org/wiki/Silliman_Memorial_Lectures>.

30 <https://en.wikipedia.org/wiki/The_Computer_and_the_Brain>.

31 El físico y oceanógrafo Carl Henry Eckart (1902-1973) codesarrolló el teorema de Wigner–Eckart. También se le deben las llamadas c*ondiciones de Eckart* en mecánica cuántica y el *teorema de Eckart-Young* en álgebra lineal <https://es.wikipedia.org/wiki/Carl_Eckart>.

32 El físico Enrico Fermi (1901- 1954) realizó importantes contribuciones al desarrollo de la teoría cuántica, la física nuclear y de partículas y la mecánica estadística. Recibió el Premio Nobel de Física en 1938 por sus trabajos sobre radiactividad inducida <https://es.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi>.

33 El físico John R. Pasta (1918-1981) fue especialista en física computacional <https://en.wikipedia.org/wiki/John_Pasta>.

34 El matemático Stanisław Ulam (1909-1984) participó en el proyecto Manhattan y desarrolló varias herramientas matemáticas en teoría de números, teoría de conjuntos, teoría ergódica y topología algebraica. Junto con John Von Neumann contribuyó al llamado el método de Montecarlo <https://es.wikipedia.org/wiki/Stanisław_Ulam>.

35 Fermi, E., P. Pasta, S. Ulam y M. Tsingou (1955), *Studies of nonlinear problems,* Technical Report, Los Alamos Scientific Lab. of University of California, <https://www.osti.gov/servlets/purl/4376203>.

36 Rocío Benavente, «Mary Tsingou, la Dama Misteriosa que ayudó a abrir el campo de la física no lineal y el uso de simulaciones por ordenador para estudiarla», *Mujeres con ciencia, Vidas científicas,* 10 de diciembre de 2020, <https://mujeresconciencia.com/2020/12/10/mary-tsingou-la-dama-misteriosa-que-ayudo-a-abrir-el-campo-de-la-fisica-no-lineal-y-el-uso-de-simulaciones-por-ordenador-para-estudiarla/>.

37 Thierry Dauxois (2008), «Fermi, Pasta, Ulam, and a mysterious lady», *Physics Today,* n.º 61 (1), 55-57 <http://perso.ens-lyon.fr/thierry.dauxois/PAPERS/pt61_55.2008.pdf>.

DEL MMACA AL AULA

¡A grandes males, mayores remedios!

MMACA

SUMA+ núm. 96
pp. 65-70
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2020 y aceptado en enero de 2021

El curso 2019-2020 lo acabamos con las aulas cerradas y, como consecuencia, el museo también. Costó aceptar que la cosa iba para largo, pero ya desde los primeros momentos empezamos a pensar en nuevas maneras de acercar las matemáticas a los centros educativos, con el firme propósito de mantener el máximo número de educadores con nosotros.

Como ya hemos dicho en otras ocasiones, uno de nuestros mayores activos es nuestro equipo de educadores, titulados superiores que han hecho nuestro curso específico de educadores y ya llevan mucho tiempo con nosotros, de ahí nuestro interés en mantener el máximo posible sus condiciones laborales.

El curso anterior, con la finalidad de reducir nuestra lista de espera, ya ofrecíamos dos talleres en los que nos desplazábamos a los centros. Uno, el de las cúpulas de Leonardo ya de sobras conocido, otro, al que llamamos visita portátil, es una pequeña exposición formada por más de veinte paneles con las piezas correspondientes, que plantean distintos retos, muchos de ellos sacados de la exposición permanente. Son una parte de nuestras maletas de material manipulativo.

Siguiendo la idea de estos talleres en los centros, ya en los primeros días del confinamiento, nos planteamos ampliar la oferta, nos pusimos las pilas generando hasta 10 talleres más.

El resultado: durante el primer trimestre de este curso ya hemos realizado unos 180 talleres, con cerca de 4 500 alumnos, desde ciclo inicial de primaria hasta bachillerato, triplicando la demanda de todo el curso anterior. Para el resto del curso tenemos todas las horas reservadas, especialmente intenso ha sido el mes de marzo, Mes de las Matemáticas, cosa que nos alegra muchísimo.

En estos momentos estamos revisando el contenido de estos talleres para mejorar algunos aspectos y adaptarlos a las distintas edades y necesidades. Nos proponemos añadir materiales y propuestas para facilitar que el profesorado pueda ampliar e incorporar las ideas del taller al trabajo docente. Nuestra voluntad es que estos talleres sean una ayuda para incorporar los materiales manipulativos a la práctica docente.

Los talleres van destinados a las mismas franjas de edad que atendemos en el MMACA de forma presencial, parece que han venido para quedarse, a pesar de no sustituir en ningún caso, ni pretenderlo, la experiencia de una visita a la exposición permanente y a sus alrededores.

En nuestra página web podéis encontrar la siguiente oferta:

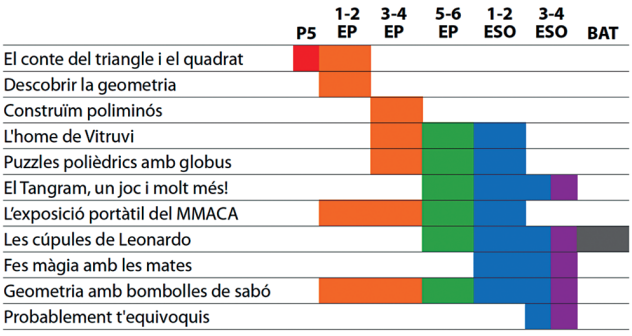


Figura 1. Propuesta de talleres por edades

Hablemos un poco de cada taller siguiendo este mismo orden.

El cuento del triángulo y el cuadrado

Gracias a la propuesta de nuestro compañero David Pinyol, disponemos de un taller para alumnos de infantil.

El taller tiene el formato de cuento infantil, consiste en la charla entre un triángulo y un cuadrado, con la ayuda de cojines de estas formas. Captando la atención de los niños y reclamando su participación se introducen y trabajan conceptos como superficie, altura, doble o mitad.

Es muy bonito ver cómo reaccionan las criaturas ante las distintas preguntas, cómo las intentan resolver a su manera, y cómo participan construyendo nuevas formas (figura 2).

Descubrir la geometría

En la exposición permanente, ofrecemos este taller para los pequeños de ciclo inicial. Se trabaja, en primer lugar, el vocabulario matemático con la identificación de las piezas poligonales, sus características y relaciones. A continuación, se trabaja en pequeños grupos formando espectaculares rosetas, desarrollando con ello la creatividad de los niños (figura 3).

A pesar de trabajar con un material que ya va siendo usual en las escuelas, la propuesta del taller introduce detalles poco habituales que enriquecen el trabajo escolar posterior.

Construyamos poliminós

Es un taller para el alumnado de tercero y cuarto de primaria, en el que se propone descubrir el mundo de los poliminós.



Figura 2. Comparando figuras

Se construyen los triminós, tetraminós y pentominós, descubriendo cuántos hay. Se investigan sus características y se resuelven los puzles consistentes en combinarlos para formar rectángulos y otras figuras, con la misma área (figura 4).

El hombre de Vitruvio

A partir de la conocida obra de Leonardo da Vinci sobre las proporciones del cuerpo humano, hemos desarrollado una estimulante propuesta interactiva en la que todos comprobaremos en nuestra propia persona las relaciones que Leonardo detalla entre la altura, envergadura y las distintas partes de nuestro cuerpo.

La segunda parte del taller, trata de la escritura especular utilizada por Leonardo de la que ya hemos visto un ejemplo en el grabado del hombre de Vitruvio. Con la ayuda de pequeños espejos individuales desciframos algunos aforismos de Leonardo y escribiremos nuestros propios textos compartiendo las diferentes estrategias de escritura utilizadas (figura 5).



Figura 3. Mosaicos

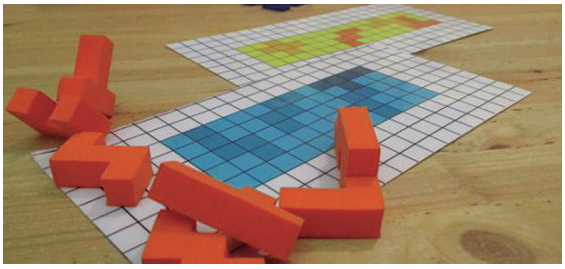


Figura 4. Pentominós

Puzles poliédricos con globos

La idea de usar globos para construir poliedros, la descubrimos de la mano de Caroline Ainslie y nos pareció muy interesante llevarlo a los centros.

Es un taller que requiere adaptación a cada edad. La manipulación de los globos puede resultar un problema para algunos niños, por ello proponemos también el trabajo con otros materiales como las varillas, pajitas de refresco o canutillos de papel enrollado. Colocamos a lo largo del interior de estos cilindros una goma elástica que permite crear conjuntos de varios segmentos así como enlazarlos o anudarlos fácilmente.

Si la longitud de los globos (o varillas) es de un metro, es posible utilizarlos para una espectacular presentación del sistema métrico decimal con la construcción del metro cuadrado y del metro cúbico que se utilizan para realizar colaborativamente distintas estimaciones.

Por otro lado, si el taller se enfoca a la construcción libre de distintos poliedros, el espectacular resultado



Figura 5. Hombre de Vitruvio

es una variedad de ellos que normalmente incluye el cubo, el tetraedro, así como distintos prismas y pirámides. A partir de las construcciones realizadas, el diálogo interactivo que se establece en su descripción y comparación, permite establecer el extenso vocabulario de este tema. Es imposible agotar las posibilidades de este material en una sesión, el taller representa solo una muestra de la idoneidad del trabajo del tema de la geometría del espacio utilizando materiales manipulativos.

Por último, para los mayores, el taller se plantea como la construcción de los 5 poliedros platónicos con el mínimo número de globos (subdivididos linealmente). Es un reto atractivo relacionado con los poliedros vistos como un grafo y que requiere un trabajo de imaginación espacial importante (figura 6).

El tangram, un juego y mucho más

Este taller tiene su origen en nuestra propuesta «Tangram» de la exposición de Cornellà dedicada a los pequeños (de 6 a 10 años) así como de los materiales que Guido Ramellini, Pura Fornals y Eulalia Tramuns han ido creando y adaptando con su experiencia.

En el taller, se construye con papel el tangram tradicional chino utilizando las técnicas de plegado y de corte que las investigaciones sobre la utilización didáctica de la papiroflexia han demostrado efectivas. Interactivamente, de forma individual y en grupo se exploran las figuras creadas y sus propiedades y relaciones (figura 7).

Visitas portátiles

Este taller, que ofrecemos ya desde cursos anteriores, consiste en la instalación en los centros de una pequeña exposición formada por paneles en formato DIN A3 o DIN A4 y las piezas correspondientes aprovechando las mesas de la propia aula, biblioteca o similar. Proponemos que los alumnos vayan pasando y resolviendo los distintos retos que cada panel plantea.

La interacción entre ellos, los razonamientos en voz alta que hacen, las propuestas de resolución, etc., resultan de lo más gratificante y enriquecedor. Como siempre, más que ofrecer la solución sin más, lo importante es proponer preguntas para abrir caminos al razonamiento.

Los materiales tienen su origen en nuestras exposiciones, tanto la permanente como las itinerantes. Inicialmente generamos más de 50 módulos de los temas de geometría, cálculo, estrategia y probabilidad que agrupamos en dos maletas destinadas al ciclo superior de primaria y primer ciclo de secundaria.

Con el propósito de incidir también en la educación matemática de los niveles anteriores hemos producido una exposición portátil y las maletas correspondientes



Figura 6. Figuras con globos

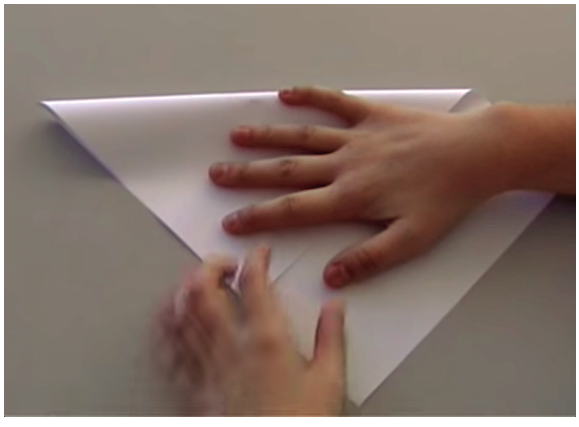


Figura 7. Construyendo el tangram

pensadas para los 4 primeros años de la educación primaria. En estos momentos estamos ultimando otra nueva maleta-exposición para la educación infantil (figura 8).

Las cúpulas de Leonardo

Este taller se ha convertido en el más emblemático del museo, se trata de construir colectivamente cúpulas de 4 a 5 m de diámetro con unas 250 piezas iguales de 50 cm que se sostienen mutuamente. No hace falta, por tanto, ningún elemento de sujeción (figura 9).

Un grupo de 10 a 20 personas consigue construirlas en tan solo 15 minutos. Los pequeños se afanan por entrar dentro gateando, pero además un grupo de mínimo 15 personas trabajando coordinadamente puede levantarla para verla desde abajo. Una vez levantada se puede hacer rodar y mover. También se puede comprobar como su flexibilidad le confiere resistencia a los terremotos.

Este taller tiene su origen en las investigaciones y trabajos del escultor neerlandés Rinus Roelofs que redescubrió las láminas de Leonardo da Vinci donde aparecen dos de estos patrones de encabalgamiento mutuo. Enric Brasó ha desarrollado esta versión didáctica con la que trabajamos.

Geométricamente las piezas forman un teselado plano que se deforma como un casquete esférico gracias a la diferencia de altura de las muescas de cada pieza. Inicialmente encontramos y trabajamos con 11 teselados. En investigaciones posteriores hemos demostrado que existen infinitos patrones distintos.

Es un taller en que se combinan los aspectos lúdicos y didácticos incluyendo el valor del trabajo colectivo, el pensamiento geométrico espacial, la historia, el arte y la tecnología.



Figura 8. Visita portátil para infantil



Figura 9. Desde el interior de una cúpula

Haz magia con las mates

Este taller ha sido desarrollado a partir de las propuestas de nuestro compañero Sergio Belmonte, nuestro mago particular.

Adaptamos y presentamos distintos efectos de matemagia en función de la edad de los alumnos.

El criterio para escoger los efectos del taller ha sido que por una parte su presentación y resultado sean



Figura 10. Pensando algunas variantes

lo suficientemente espectaculares, pero que además su explicación matemática sea sencilla e involucre conceptos matemáticos conocidos.

El taller es interactivo, el alumnado, trabajando en grupos, puede practicar los efectos de matemagia explicados, comprender su funcionamiento y ensayar sus propias variantes y ampliaciones.

Geometría con pompas de jabón

No dudamos que todos conocéis las fantásticas propiedades matemáticas de las pompas de jabón de la mano de Anton Aubanell o de otros divulgadores. Basándonos en su propuesta pensamos este taller, en el que se combina la magia efímera de las pompas con el estudio de sus estructuras y propiedades geométricas (figura 11).

Desafortunadamente, los requerimientos sanitarios para impedir la circulación del CODIV-19 son incompatibles con las características del taller, lo que nos ha obligado a desprogramarlo.

Probablemente te equivoques

No podíamos dejar de pensar en los alumnos de cuarto y bachillerato, por eso nos decidimos a proponer este taller de probabilidad. Hemos usado materiales fáciles de reproducir en el aula para que en los próximos cursos sea el profesorado de cada centro quien los desarrolle directamente. Las actividades que proponemos son variaciones de unos de los talleres que el MMACA diseñó para el proyecto «Ven x + matemáticas» de la FESPM, que en Cataluña se sigue desarrollando, gestionado por nuestras diferentes sociedades federadas.

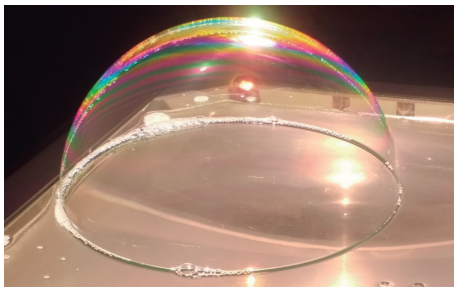


Figura 11. Pompas de jabón

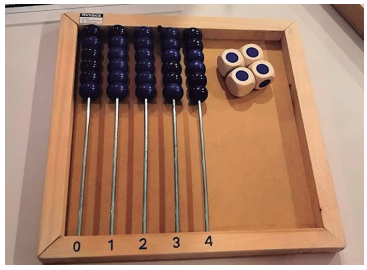


Figura 12. Probabilidad y azar

El taller consiste en la exploración de juegos y situaciones de azar donde la intuición nos puede fallar. Se trabaja en pareja, experimentando y recogiendo datos. Cada actividad va acompañada de una lluvia de ideas y una explicación matemática. Se concluye con un «Bingo matemático» donde el alumnado pondrá a prueba lo que ha aprendido.

En conclusión y recogiendo nuestras reflexiones después de un tiempo invirtiendo esfuerzos en estos talleres: hay que conseguir que la intervención inevitablemente puntual del momento del taller se expanda al máximo e incida en la dinámica cotidiana de las aulas. Para ello, además de ofrecer al profesorado la información de recursos adicionales seleccionados en la línea del taller, tenemos que evaluarnos continuamente para conseguir que nuestros talleres sean una buena muestra de cómo trabajar la educación matemática con materiales.

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya, Cornellá de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

Modelización: ¿qué nos aportan las otras disciplinas STEM?

Carmen Gámez Valero
Miguel L. Rodríguez González
Rafael Ramírez Uclés

SUMA+ núm. 96
pp. 71-78
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2020 y aceptado en enero de 2021

Una riqueza del proyecto ESTALMAT es la variedad de temas que se abordan en las diferentes sesiones. Además de los contenidos de las diferentes áreas de conocimiento matemático, se abordan sesiones STEM relativas a las ciencias (como cosmología o astronomía), a la ingeniería (optimización de ubicaciones) y tecnología (programación, utilización de software dinámico, etc.). En este trabajo vamos a describir una propuesta basada en la modelización de un problema real que se aborda desde las diferentes perspectivas científicas, reflexionando con los estudiantes los aportes de conectarlas y tener una visión global del trabajo científico, más allá de disciplinas concretas.

En las últimas décadas, se ha centrado la atención en la importancia de trabajar de forma interdisciplinaria en el campo de la educación. El término STEM es el acrónimo de los términos en inglés Science, Technology, Engineering and Mathematics (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas). Actualmente, se ha desarrollado el concepto de «Educación STEM» como una nueva manera de enseñar conjuntamente ciencia, matemáticas y tecnología (en general, no solo informática) con una perspectiva integradora y de aplicación práctica de los conocimientos teóricos (Satchwell y Loepp, 2002).

De esta forma, se propone la concepción de las distintas disciplinas como una entidad cohesionada, cuya enseñanza sea integrada y coordinada, al igual que se emplean en la resolución de problemas del mundo real (Sanders, 2009). En este trabajo presentamos los aportes que para la resolución de un mismo problema pueden derivarse al considerarlo desde la perspectiva de cada una de las disciplinas implicadas. El análisis de este problema conecta contenidos teóricos con resultados experimentales y facilita al estudiante la comprensión del proceso de modelización (Ramírez y Gámez, 2019).

A continuación, describimos las tareas propuestas en la sesión para «veteranos», asociada al enriquecimiento de contenidos de primero de Bachillerato relativos a problemas de optimización y problemas métricos. También se enriquecen elementos de razonamiento matemático como la existencia y unicidad de soluciones, la notación matemática y las estrategias de demostración.

Motivación inicial

Por desgracia, nos hemos acostumbrado a hablar de distancia social y de querer situarnos en los espacios lo más alejados posible. Este interés hace tiempo que se aborda en distintas situaciones menos dramáticas que pretenden optimizar la ubicación de instalaciones con la intención de minimizar los desplazamientos o maximizar el campo de acción de una fuente energética. En esta sesión vamos a intentar resolver un problema con interés en la actualidad, derivado directamente de una necesidad en el campo de las telecomunicaciones. Nos convertiremos en los investigadores *I+D+I* de una reconocida empresa para optimizar el rendimiento en la ubicación de antenas. Este es nuestro reto.

Tarea 1. Trabajando desde la ingeniería

Queremos instalar un conjunto de antenas lo más alejadas posibles unas de otras, pero cumpliendo que toda la región tenga cobertura suficiente. Los ingenieros de la empresa nos formulan el problema de la siguiente manera:

Dado un punto $P=(x,y)$, en el plano, denotaremos la norma euclídea por

$$||P||=\sqrt{x^2+y^2},$$

y la distancia entre dos puntos, $P=(x,y), Q=(x_1,y_1)$ la denotaremos por

$$d(P,Q)=||P-Q||=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}.$$

Buscamos un conjunto de N puntos

$$A=\{r_i=(x_i,y_i)\in\mathbb{R}^2, i=1,\ldots,N\}, \quad (0,0)\notin A$$

tales que:

$$A\{r_1,\ldots r_N\}=\arg\min_{i=1,\ldots,N}\{d(r_i)\}.$$

Donde $d(r_i)$ representa el mínimo de las distancias de r_i a todos los demás puntos del conjunto,

$$d(r_i)\equiv\min_{i\neq j}\{d(r_i,r_j)\}.$$

Y se pretende que este valor sea lo mayor posible. Además, imponemos una restricción de normalización:

$$\frac{1}{N}=\sum_{n=1}^{N}||r_i||=1.$$

La distribución que se está utilizando actualmente y que queremos mejorar es la siguiente, donde se han distribuido 16 antenas como se muestra en la figura 1.

Nuestra traducción del problema se simplifica de la siguiente manera. Dado un conjunto de puntos en el plano se llama distancia vecinal a la distancia de los dos puntos más cercanos. ¿Cómo conseguir distribuir los puntos para que la distancia vecinal sea lo mayor posible?

Se plantean las siguientes preguntas para debatir:

— ¿Cuál es la distancia vecinal de esta distribución?
— ¿Qué ocurre cuando desplazamos uno solo de los puntos?

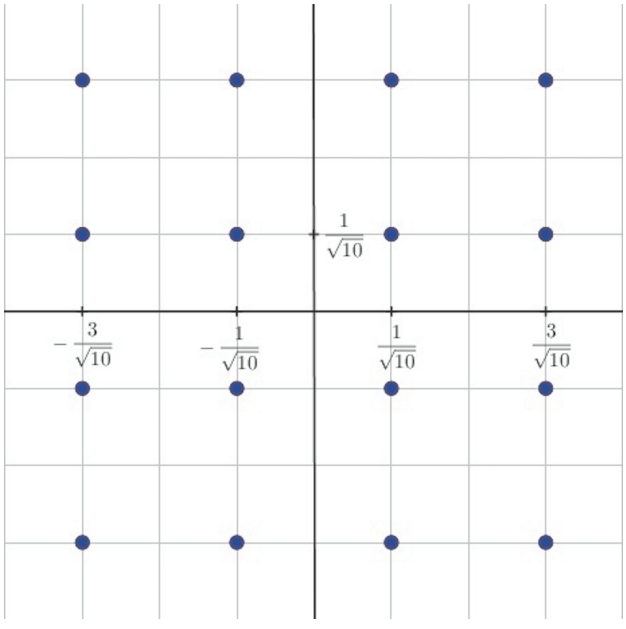


Figura 1

— ¿Cómo varía la distancia vecinal al ir moviendo los puntos?

En la puesta en común se enfatiza que la distancia vecinal se alcanza en los dos puntos más cercanos y se marca $2/\sqrt{10}$ como el objetivo a mejorar al instalar 16 antenas. Como el problema viene restringido a la norma 1, se les orienta a considerar la variación correspondiente a que todos los puntos estén en círculo de radio 1. Se comenta que para abordar problemas de modelización, en ocasiones se buscan simplificaciones que permitan matematizar el problema y abordarlo con menos restricciones, Para luego, retomar las condiciones iniciales y estudiar los aportes de la solución obtenida.

Así, replanteamos el problema: ¿Cómo colocar n puntos en un círculo lo más alejados posibles unos de otros?

Es decir, si *n* vecinos deben ubicar sus casas en un círculo y quieren estar lo más distanciados posible, ¿cómo colocarlos? Lo que hemos denominado distancia vecinal sería la distancia entre los dos vecinos que vivan más cerca. ¿Cómo conseguir que esa distancia vecinal sea lo mayor posible?

En grupo, se buscan ideas intuitivas y se les invita a que intenten formularlo con lenguaje matemático e incluso indagar si es posible encontrar una función cuyo máximo o mínimo resuelva el problema. Ante la dificultad que surge para abordarlo como los problemas escolares de optimización que conocen, le animamos a afrontar el problema desde las diferentes perspectivas STEM, comenzando por el siguiente experimento.

Tarea 2. Experimentación con la Ciencia

Se les plantea una experimentación para abordar el problema desde la manipulación. Consiste en introducir *n* imanes de neodimio en un recipiente con agua cuya superficie de flotación sea circular y estudiar la posición que ocuparán estos imanes (el número de imanes dependerá del caso que queramos estudiar). Los imanes estarán simulando la situación del problema inicial propuesto, de forma que los imanes son los puntos o antenas a situar y el recipiente la región acotada en la que queremos ubicarlos. Los imanes, gracias a sus fuerzas de atracción y repulsión, lograrán una distribución óptima en el recipiente que variará en función del número de imanes considerados.

Para llevar a cabo dicho experimento necesitamos los siguientes materiales:

— *n* imanes de neodimio
— *n* tapones de plástico del mismo tamaño
— agua
— un recipiente con superficie de flotación circular
— pegamento resistente al agua

En primer lugar, para evitar que los imanes se hundan en el agua, es necesario adherirlos a alguna superficie, todos por el mismo polo, consiguiendo así que los imanes floten. Las superficies elegidas, como se aprecia en las figuras 2 y 3, que en nuestro caso hemos empleado tapones, deben tener un tamaño considerablemente pequeño, similar al de los imanes puesto que podría afectar a su fuerza (figura 2)

El experimento consiste en ir introduciendo en el agua los *n* imanes pegados y observar cuál es el comportamiento de estos.

— ¿Observas algún patrón o regularidad en los casos?
— ¿Crees que habrá un número de imanes en el que la distribución sea muy diferente a la anterior? ¿Por qué?



Figura 2

— ¿Qué diferencias existen entre el comportamiento de los imanes y la ubicación de las antenas? ¿Buscan los imanes maximizar la distancia vecinal?

Se recoge la lluvia de ideas, experimentando con los aportes que hagan los estudiantes y destacando que el caso $n = 6$ es relevante por los polígonos regulares encontrados para valores menores.

Se observa que los imanes se comportan de una manera especial: se posicionan en el borde del recipiente y, una vez en el borde, se separan unos de otros hasta conseguir su posición de equilibrio.

— ¿La distancia que existe entre cada par de imanes situados en la posición de equilibrio será la distancia vecinal buscada para n puntos?

A partir de este experimento, conjeturamos que la estrategia anterior puede conseguir la posición óptima de n puntos, siendo $n < 6$, situados en el interior de un círculo. También hemos podido comprobar cuántos puntos podemos introducir en el interior de la circunferencia cuando hemos fijado sobre ella p puntos. Ver un ejemplo en la figura 3.

Concluimos que para obtener distribuciones estables, a partir de un cierto n, es necesario formar circunferencias concéntricas a la inicial y buscar polígonos regulares tanto en el exterior como en el interior de dicha circunferencia, de forma que las distancias entre los imanes sean máximas. Por otro lado, podemos intuir que existe una relación entre las distancias entre los diferentes puntos, teniendo en cuenta la distancia entre los puntos situados en el borde, la distancia entre los puntos situados en la circunferencia interior, la distancia entre los puntos interiores y la distancia de los puntos situados en el interior a los puntos situados en el exterior.



Figura 3

Este apartado es especialmente útil para trabajar el siguiente punto, ya que en él se ha manipulado el problema, facilitando así la comprensión del mismo. Gracias a este experimento, los alumnos pueden obtener ideas y estrategias sobre cómo trabajar posteriormente el problema desde el campo de las matemáticas. Así, en el siguiente apartado del trabajo estudiaremos con mayor profundidad la estrategia de ubicar n puntos, siendo $n < 6$, demostrando distintos lemas que nos ayuden a obtener la distancia vecinal buscada.

Tarea 3. Argumentación matemática

Tras realizar el experimento, se procede a matematizar las ideas obtenidas buscando a la vez la solución óptima al problema inicial. Como se ha observado en el comportamiento de los imanes se pueden distinguir dos casos bien diferenciados: $n < 6$ y $n \geq 6$.

Vamos a intentar matematizar lo observado en la estrategia aportada por el experimento de los imanes estudiando las distancias entre los puntos (Gámez, 2017). El procedimiento a seguir es ubicar los puntos sobre la circunferencia con una distancia entre sí máxima, siguiendo los mismos pasos que los imanes (ver la figura 4).

Se les propone argumentar en los casos más sencillos:

— Para dos puntos, ¿es el diámetro de la circunferencia la distancia vecinal?

En la recogida de ideas, se intenta que formalicen sus razonamientos y vayan más allá de argumentaciones empíricas.

— ¿Puede haber dos puntos en un círculo más alejados que la longitud del diámetro?

Estas preguntas dan pie a profundizar en el propio concepto de diámetro y recordar la propiedad de «anchura constante» en las figuras geométricas.

Abordamos ahora el caso para tres puntos. A partir de lo observado con los imanes, planteamos demostrar el siguiente teorema:

> Dado tres puntos en un círculo, la distancia vecinal es el lado del triángulo equilátero que forman al distribuirse los tres puntos en la circunferencia.

Se recogen lo que pueden ser ideas intuitivas y se les guía para que formalicen la demostración

Dados tres puntos *P*1, *P*2 y *P*3 cualesquiera en un círculo, se comprueba inicialmente que se consigue una distribución *P*1´, *P*2 y *P*3 con distancia vecinal mayor situando *P*1´ en el borde (figura 4). Se les plantea una conclusión de esta idea:

— ¿Esta propiedad implica que los tres puntos estarán en la circunferencia?

Se motiva a que sus argumentaciones sean lo más formales posibles, convirtiendo las ideas intuitivas o apreciaciones a partir de ejemplos en razonamientos válidos para cualquier caso. Se introduce la notación como un elemento importante tanto para organizar las ideas como para clarificar los pasos de la demostración.

Tras esta reflexión, renombramos *P*1, *P*2 y *P*3 a esta nueva distribución. Repitiendo el razonamiento para *P*2 y *P*3, se obtiene una mejor solución con los tres puntos en la circunferencia.

— ¿Si los tres puntos están en la circunferencia, cuál es la distribución que maximiza la distancia vecinal?

Tras la discusión de las ideas propuestas y determinar el triángulo equilátero como distribución óptima, se les plantea como tarea el cálculo de la distancia vecinal a partir de los conocimientos trigonométricos (figura 5).

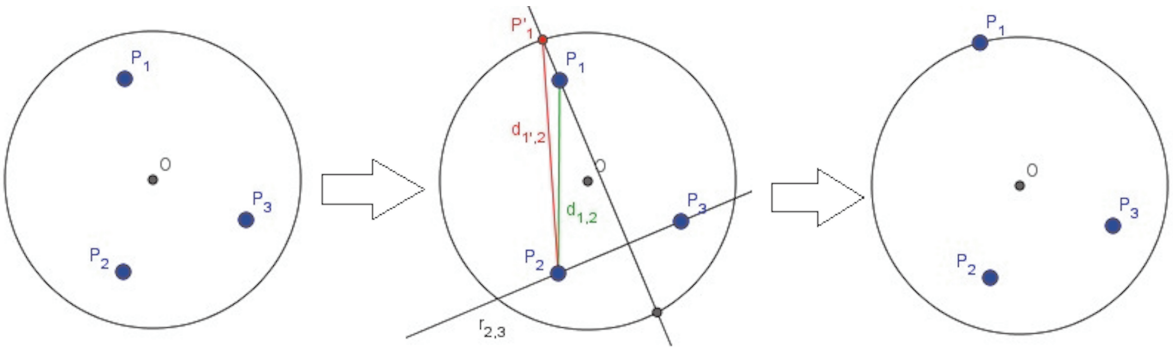


Figura 4

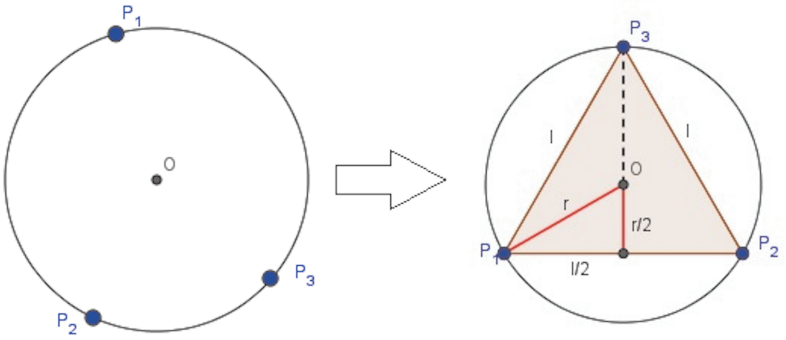


Figura 5

Como tarea de profundización, se les invita a trasladar el razonamiento al caso de cuatro y cinco puntos. Dada la complejidad, se les plantea como proyecto de investigación posterior a la sesión de clase.

Ahora se aborda la unicidad de solución en cada caso.

— ¿Para qué número de puntos, hay dos o más soluciones que optimizan la distribución? ¿Qué ocurre cuando $n=6$?

Se les deja tiempo para que trabajen en grupo e intenten argumentar para qué casos (n<8) hay unicidad de solución. Es interesante considerar soluciones equivalentes cuando se consiga una a partir de la otra utilizando movimientos como giros y simetrías. Y se les muestra el caso para $n=6$ para ejemplificarlo (figura 6).

Para los casos en los que $n>6$ empleamos la otra estrategia obtenida en el experimento, en la cual se forman círculos concéntricos sobre los que se situarán los puntos formando de nuevo polígonos regulares, teniendo en cuenta la distancia entre los puntos exteriores (situados sobre la circunferencia inicial), la distancia entre los puntos interiores (situados sobre una nueva circunferencia concéntrica e interior a la inicial) y la distancia entre los puntos interiores y exteriores (Gámez, 2017). Dada la complejidad que requieren estos casos atendiendo a las matemáticas que conocen, se les plantea una nueva perspectiva del problema utilizando simulación en ordenador, dando lugar a la perspectiva STEM.

Tarea 4. Aplicando la tecnología

La última versión del problema corresponde con el enfoque tecnológico, el cual lo abordaremos mediante el uso del software GeoGebra. Este software nos permitirá representar las distintas situaciones que se producen al variar el número de puntos a colocar, en particular, facilitando la comprensión donde n>6, en los cuales su estudio presenta una mayor dificultad.

Se muestran las soluciones encontradas con simulación informática para $n>7$ en un artículo que aborda un problema equivalente. Es el caso del trabajo de *optimal packing* propuesto por Graham y otros (1998) donde se considera el problema formulado del modo siguiente: insertar n círculos congruentes (radio unidad) dentro de un círculo de radio mayor.

Inicialmente se les plantea a los estudiantes la relación entre este problema y el planteado en la sesión y cómo se traduce la solución de uno en el otro. Si el radio del círculo mayor es 1 y consideramos n círculos que se «empaqueten» dentro con el mayor radio posible todos ellos, los resultados de este trabajo también sirven de ayuda e inspiración a la hora de buscar la solución óptima (figura 7). En el trabajo realizado por Graham y otros (1998) se propone la solución, mediante algoritmos computacionales, para llegar a introducir en un círculo hasta 65 círculos congruentes. En la figura 7, se muestra la distribución propuesta en dicho trabajo para la ubicación de 16 puntos.

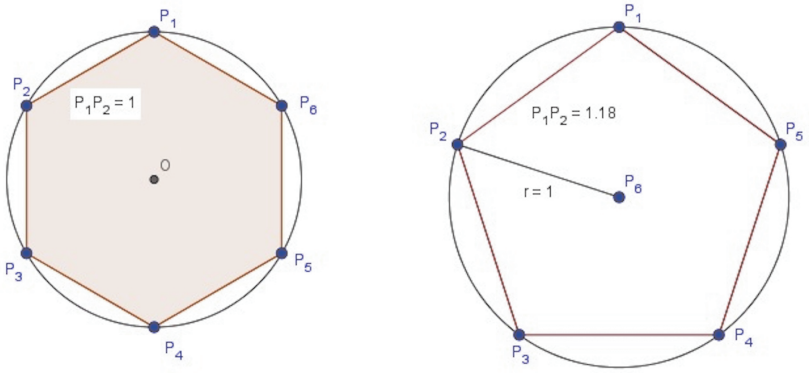


Figura 6

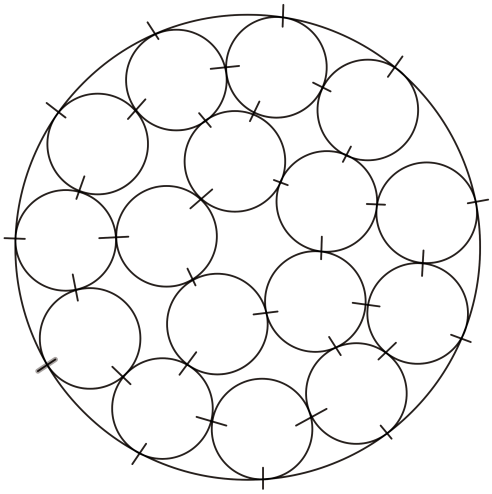


Figura 7

Como se ha indicado anteriormente, gracias a GeoGebra (figura 8), se realiza una construcción basándonos en la idea obtenida con el experimento de los imanes (considerando circunferencias concéntricas, polígonos regulares y distancias entre puntos) y tomando como referencia el artículo mencionado en el cual se realizó computacionalmente. GeoGebra, a partir de sus herramientas para «arrastrar» puntos, permite la construcción de los polígonos interiores y exteriores. El alumno puede dinamizar la construcción para obtener empíricamente la distribución con mayor distancia vecinal.

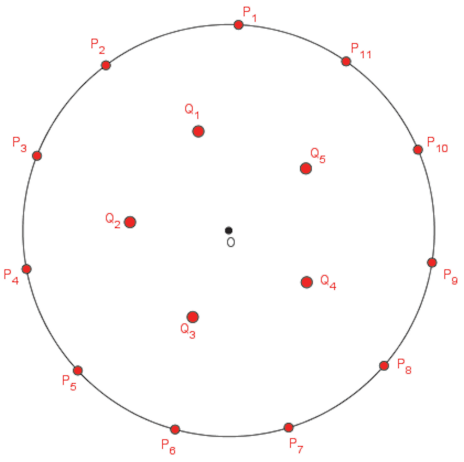


Figura 8

A partir de la solución propuesta por Graham y otros (1998), se construye de manera dinámica un polígono regular de 11 lados en la circunferencia unidad y otro de 5 lados en la interna. De manera dinámica, se van transformando estos polígonos hasta que las tres distancias (entre puntos externos, entre puntos internos y entre internos y externos) coinciden.

Manipulando con GeoGebra y estudiando todos los casos, se llega finalmente a $n = 16$, caso correspondiente al planteado en el problema en ingeniería.

Conclusiones finales

Finalmente, comparamos la distancia vecinal en la ubicación de 16 antenas como la figura 1, a la obtenida con la simulación informática. Tras los cálculos, recordemos que en la actualidad se emplea una distribución cuya distancia vecinal es $2/\sqrt{10}$ y nuestro objetivo es encontrar una nueva distribución en la que dicha distancia sea mayor. La nueva solución obtenida, transformada para que la media de la norma sea 1, presenta una distancia vecinal de 0,661.

La mejora tras la optimización de la distribución supone una mejora de 0,192 decibelios (Gámez, 2017). Desde un punto de vista práctico, la mejora obtenida no es significativa, pero aporta una aproximación de la solución óptima y la cota para una mejor eficiencia. Como consecuencia, se comprueba que el modelo actual utilizado, si bien no es el óptimo, es una distribución simple que satisface los requisitos.

Se cierra la sesión valorando los aportes de cada una de las perspectivas: la formalización matemática, la experimentación científica, la simulación tecnológica y la aplicación en ingeniería. Creemos que implementar o mejorar la educación STEM debe ser un objetivo en el campo de la educación, ya que se ha demostrado en numerosas ocasiones que favorece el desarrollo de habilidades esenciales en el desarrollo de un estudiante, como el pensamiento crítico, el trabajo en equipo y la capacidad de resolver problemas actuales, proporcionándole más oportunidades de aprender cercanas al desarrollo y aplicación de avan-

ces científicos y tecnológicos (Vásquez, 2014). Un estudiante con formación STEM no solo será un innovador, un pensador crítico, también será capaz de hacer conexiones significativas entre el colegio, su entorno, el trabajo y los problemas del mundo real.

Referencias bibliográficas

Gámez, C. (2017), «La estrategia de maximizar la mínima distancia desde una perspectiva STEM». (Trabajo de Fin de Máster no publicado). Universidad de Granada.

Graham, R. L., B. D. Lubachevsky, K. J. Nurmela y P. R. J. Östergard (1998), «Dense packing of congruent circles in a circle», *Discrete Mathematics* n.º 181, 139-154.

Ramírez, R., y C. Gámez (2019), «Resolución de un problema de modelización desde una perspectiva STEM», Comunicación presentada en 19 JAEM (Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las matemáticas), A Coruña, España. Disponible en <http://hdl.handle.net/10481/64712>.

Sanders, M. (2009), «STEM, STEM education, STEM mania», *The Technology Teacher,* n.º 68, 20-26.

Satchwell, R., y F. L. Loepp (2002), «Designing and Implementing an Integrated Mathematics, Science, and Technology Curriculum for the Middle School,» *Journal of Industrial Teacher Education* n. º 39, <http://scholar.lib.vt.edu/ejournals/JITE/v39n3/satchwell.html>.

Vásquez, A. L. (2014), «Hacia un perfil docente para el desarrollo del pensamiento computacional basado en educación STEM para la media técnica en desarrollo de software», Proyecto de investigación para optar el título de Maestría en Ingeniería con especialidad en tecnologías de información para educación, Universidad EAFIT, Medellín.

Carmen Gámez Valero
I.E.S. Aricel, Albolote, Granada
<cgval22@gmail.com>

Miguel L. Rodríguez González
Universidad de Granada
<miguelrg@ugr.es>

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada
<rramirez@ugr.es>

SÍ A LAS CALCULADORAS

Cálculo mental y propiedades aritméticas

Jesús Serrano Higueras
M.ª Cristina Naya Riveiro

SUMA+ núm. 96
pp. 79-87
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2020 y aceptado en enero de 2021

Uno de los principios generales de la educación primaria que se recoge en la Ley Orgánica 2/2006 de Educación (LOE), es adquirir habilidades culturales básicas relativas al cálculo, y señala, como uno de sus objetivos, desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo. En la Ley Orgánica 8/2013 para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) se recoge que en la educación primaria se busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito. Para lograr una verdadera alfabetización numérica no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito, es necesario actuar con seguridad ante los números y las cantidades, utilizarlos siempre que sea necesario e identificar las relaciones básicas que se dan entre ellos. Pero aun así, bien sea por falta de formación o conocimiento, bien por simple reproducción de los tradicionales o clásicos modelos de enseñanza con los que muchos aprendimos la materia de matemáticas, en muchas aulas de educación primaria los únicos modelos de enseñanza existentes se basan en premiar la mecanización y memorización que carece de significado para los/as estudiantes. De ahí parte la realidad de que gran parte del alumnado no encuentre atractivas o motivadoras las matemáticas. Cabe señalar que en esta etapa es fundamental construir los fundamentos del razonamiento lógico matemático, y no centrarse únicamente en la enseñanza del lenguaje simbólico matemático.

Diferentes autores, como por ejemplo Bruner (1960), Kamii (1990) o Cascallana (1993) defendían ya hace mucho tiempo la manipulación de objetos y/o materiales por parte del alumnado como una estimulación

o fase inicial para adquirir conceptos matemáticos, ya que generan referentes concretos de los conceptos abstractos, y cuanta mayor sea esa manipulación, mayor será la interiorización y asimilación de los conceptos matemáticos. Defienden, por una parte, su libre manipulación para permitir que el alumnado perciba sus propiedades físicas y por otra, la manipulación guiada por el docente con un objetivo concreto.

M.ª Antonia Canals (Biniés, 2008) afirma que las operaciones entre números deben hacerse de tal manera que permitan trabajar con el alumnado tres aspectos fundamentales: el primero, la lógica de las operaciones (se han de hacer operaciones entendiendo su significado, no solo su ejecución mecánica, reconociendo la operación inversa y descubriendo las leyes fundamentales de aquella operación concreta que se está realizando, es decir, las propiedades de las operaciones); el segundo es el aspecto funcional o de relación con la vida (el alumnado ha de ver que aquella operación sirve para resolver situaciones concretas y ha de reconocer la operación en estas situaciones concretas y saber aplicarla para poder resolverlas); y el tercer aspecto, es la resolución práctica de la operación, propiamente dicha, es decir, saber hacerla primero mentalmente y cuando haga falta con los instrumentos, entre ellos la calculadora, y las técnicas necesarias, entre ellas los algoritmos escritos. Señala además que el primer cálculo ha de ser experimental, concretándose en el uso de muchos y diversos materiales manipulables, después viene el cálculo mental, exacto o aproximado, que es el objetivo prioritario del cálculo.

Teniendo en cuenta la importancia del material manipulativo y el primer y tercer aspecto destacado por Canals, se presenta una propuesta de aula para trabajar la decena y las propiedades aritméticas de la suma y la resta a través de las regletas de Cuisenaire o de Canals o también conocidas como números de color y la calculadora.

Estas actividades se diseñan en el grupo de trabajo del seminario *La calculadora como recurso didáctico en Educación Primaria* de la FESPM en colaboración con la División Educativa CASIO España.

Experiencias de aula

Las experiencias de aula que a continuación se van a presentar se han realizado en un aula de segundo curso una, y otra en tercer curso de Educación Primaria del Colegio de Educación Infantil y Primaria Tomé y Orgaz de Casarrubuelos (Madrid).

El material que se ha utilizado, como se ha dicho, son las regletas de Cuisenaire y la calculadora.

Las regletas son un material compuesto por prismas de madera o de plástico de un centímetro cuadrado de sección con longitudes desde 1 cm hasta 10 cm. Cada longitud está asociada a un color (que puede variar según el modelo seleccionado: regletas de Cuisenaire o de Canals) y cada regleta representa un número que corresponde a su longitud (Fernández, 1989). Es un material que se puede utilizar para iniciar a los escolares (tanto de infantil como de primaria) en el aprendizaje de los números naturales y de las operaciones básicas. Podemos destacar, entre otros aspectos, que este material permite formar la secuencia ordenada del 1 al 10, ordenando las regletas según su tamaño, color y por los números que representan, y asociar cada cifra a una cantidad de longitud, descomponer y componer números y realizar operaciones aritméticas cuando intervengan números pequeños, trabajar equivalencias numéricas, la decena, etc.

La calculadora con la que se trabaja es una calculadora básica de oficina que consta de las cuatro operaciones aritméticas, en concreto en esta experiencia se trabajó con el modelo CASIO SL-310UC.

Las propuestas didácticas se basan en ideas de actividades expuestas en Canals (1986, 1986a , 1986b) y en Kamii (1994).

CONOCIENDO LAS DECENAS

Esta experiencia se ha realizado con el alumnado de segundo curso de Educación Primaria. Está habituado a trabajar con el material (regletas de Cuisenaire y calculadora), y en concreto ha estado trabajando la descomposición de los diez primeros

números naturales. Han realizado las descomposiciones con las regletas y después han representado dichas descomposiciones de manera numérica mediante el lenguaje simbólico utilizando sumas o restas según corresponda. En un inicio de la experiencia se les permite utilizar cualquier número de regletas para realizar la descomposición, pero luego solo se les permite usar dos regletas para formar el número dado, descubriendo lo que muchos autores ya usaban en sus prácticas (por ejemplo, Kamii, 1994) y que ahora denominan *Los amigos del 9, del 10, etc.* (ver tabla 1) que no son más que los complementarios al número correspondiente.

Bajo este contexto se invita a los/as estudiantes a realizar la actividad *Conociendo las decenas* (ver figura 1). El objetivo es fomentar el cálculo mental trabajando con las decenas a través de sus descomposiciones, mediante la suma de tres números que se disponen en las aspas de las cruces presentadas. En particular, deben completar las aspas de las cruces sumando tres números tanto de forma horizontal como de forma vertical para obtener el número que aparece en la casilla que hay debajo de cada cruz. Se les indica además que solo pueden utilizar las decenas (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90) y que cada una de ellas solo la pueden emplear una vez en cada cruz. La actividad va añadiendo una dificultad progresiva porque se les va indicando en cada cruz una decena que deberán utilizar para conseguir la suma indicada.

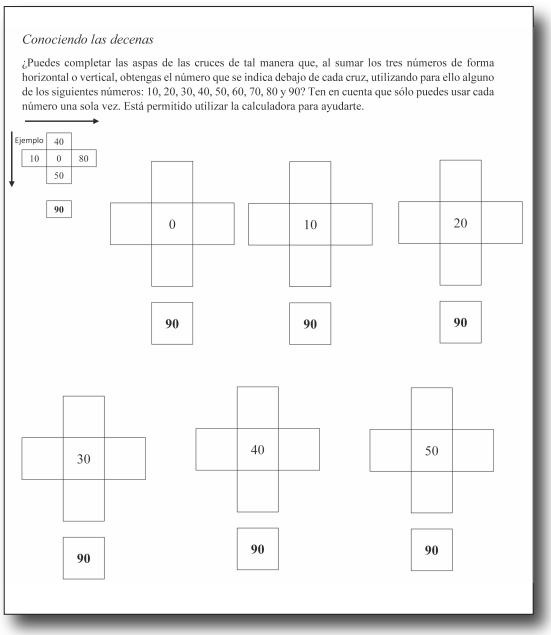
En cualquier momento pueden ayudarse de la calculadora si lo precisan, y se les incita a la reflexión a través de preguntas dirigidas para ir deduciendo conjeturas. La experiencia se realizó en dos sesiones de aula de aproximadamente 50 minutos.

9	90	900
8+1	80+10	800+100
7+2	70+20	700+200
6+3	60+30	600+300
5+4	50+40	500+400

Tabla 1. *Los amigos del 9* y su extensión a las decenas y centenas

A continuación, se presenta una descripción del desarrollo de las sesiones donde se realizaron estas tareas.

En la primera sesión se les presentó la primera parte de la actividad, donde tenían que cubrir seis cruces para llegar a obtener una suma de 90 (es decir, tendrían que buscar 12 combinaciones para obtener una suma de 90).



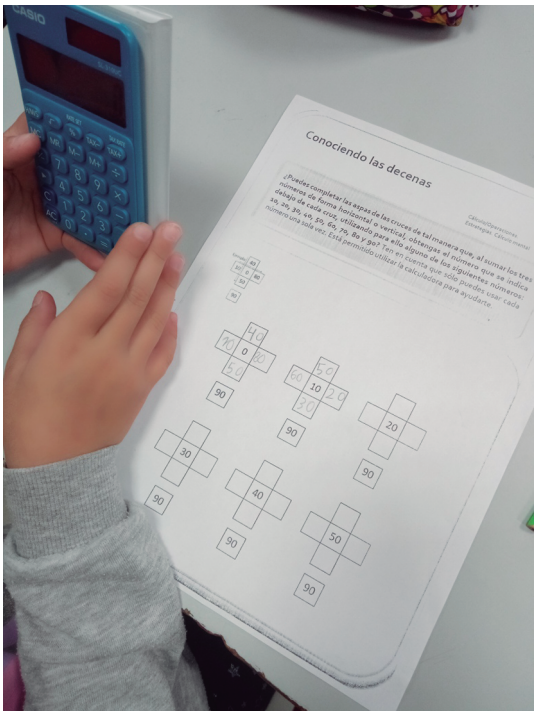


Figura 1. Actividad presentada al alumnado

Con la ayuda del ejemplo, los/as estudiantes comienzan a realizar la actividad. Algunos/as alumnos/as completan la primera cruz con los mismos números del ejemplo, otros/as utilizan *Los amigos del 9* que tienen aprendido, y en general todos/as los/as estudiantes completan la primera cruz sin problema y sin ayuda de la calculadora. En la segunda cruz se encuentran con la dificultad de que el número que aparece en el centro de la misma es distinto del 0, de igual forma que en las siguientes cruces, ahora necesitan realizar la descomposición teniendo en cuenta dicha cantidad. Se abre un diálogo:

Profesor: ¿Qué números de los indicados en la ficha se pueden utilizar en la segunda cruz?
Alumno 1: Todos
Alumno 2: El 10 está en la cruz, no se puede utilizar
Profesor: ¿Por qué no se puede?
Alumno 2: Porque lo pone en la ficha, ya hay un 10 en la cruz.
Alumno 3: Pero ese no vale.
Profesor: ¿Por qué no vale?
Alumno 3: Porque lo tengo que poner yo.
Profesor: Entonces, ¿podéis utilizar el 10?
Alumno 3: Sí.

Esta reflexión sirve a toda la clase para acordar que los números que hay escritos en las distintas cruces, como no los han usado los/as propios/as estudiantes, no cuentan a la hora de repetir los números que se podían emplear, por lo que favorece la aparición de distintas descomposiciones y abrir el abanico de posibilidades para dar solución a la actividad.

Al ir completando las cruces (ver figura 2), algunos/as alumnos/as observan que cada vez tienen menos opciones para completarlas, que los números más grandes no se pueden utilizar pues no permiten cubrir las dos casillas que faltan en cada aspa de la cruz. También descubren que en la segunda cruz (la que tiene el 10 en la casilla central) no se puede emplear el número 80, en la tercera (la que tiene el 20 en la casilla central) el 70, en la cuarta (la que tiene el 30 en la casilla central) el 60 y en la quinta (la que tiene el 40 en la casilla central) el 50.

Todos/as en mayor o menor medida, cuando cubren una cruz comprueban sus resultados con la calculadora, para evitar errores.

Cuando llegan a la última cruz, un/a estudiante comenta que esa no se puede cubrir. Al preguntarle el por qué, comenta que solo se puede poner el 30 y el 10, que el 20 no se puede repetir con lo que la cruz queda sin completar, pues 20 + 50 son 70 y faltarían 20 para llegar a 90.

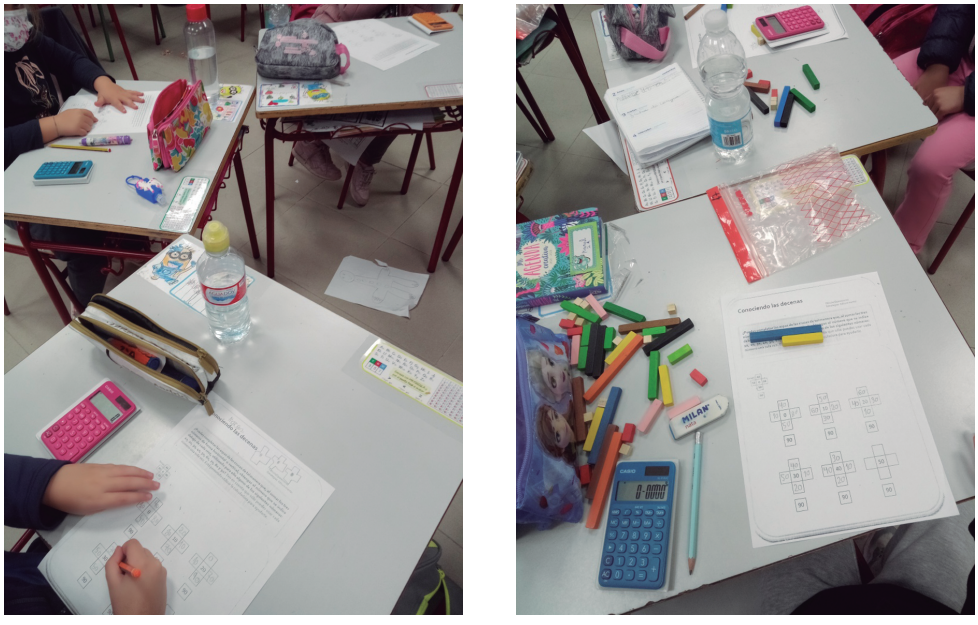


Figura 2. Materiales y momentos durante la realización de la actividad

De este modo, se obtienen los siguientes resultados que se ponen en común con el gran grupo en clase:

— 1.ª cruz: **0** + 80 + 10; **0** + 70 + 20; **0** + 60 + 30; **0** + 50 + 40.
— 2.ª cruz: **10** + 70 + 10; **10** + 60 + 20: **10** + 50 + 30.
— 3.ª cruz: **20** + 60 + 10; **20** + 50 + 20; **20** + 40 + 30.
— 4.ª cruz: **30** + 50 + 10; **30** + 40 + 20.
— 5.ª cruz: **40** + 40 + 10; **40** + 30 + 20.
— 6.ª cruz: **50** + 30 + 10.

El docente pregunta al alumnado si los datos son correctos, si recogen todas sus respuestas o si se podrían considerar otras opciones. Entonces un/a alumno/a comenta que en la segunda cruz él también tiene **10** + 40 + 40, pero sus compañeros/as le recuerdan que solo puede usar cada número una vez, y ha puesto 40 dos veces. Y entonces otro/a comenta que ya está en la 5.ª cruz recogido, y que ahí vale porque un 40 estaba ya escrito en el folio y el otro lo pusieron ellos/as. Se hace un silencio, y algunos/as cogen las calculadoras y empiezan a hacer cálculos, pero pronto se convencen de que no hay otras opciones.

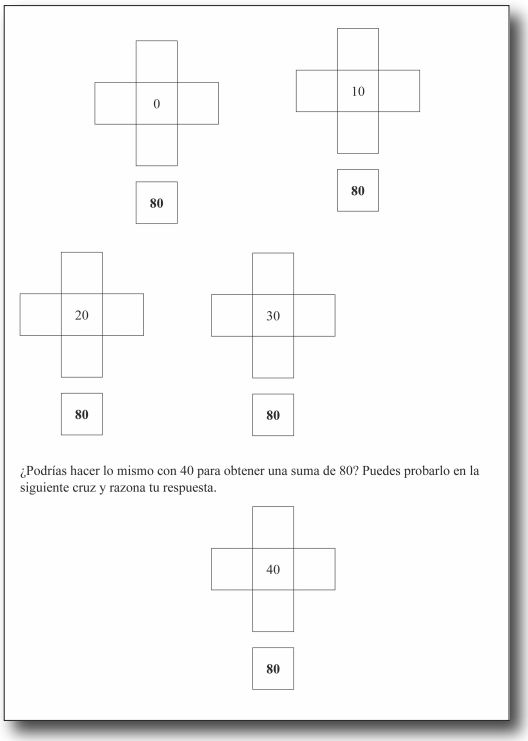


Figura 3. Actividad de la segunda sesión

Durante la actividad, los/as alumnos/as han utilizado distintas estrategias para ir completando las cruces: algunos/as utilizaron las regletas de Cuisenaire, mediante la descomposición de los 10 primeros números que luego extendieron a las decenas; otros/as utilizaron el cálculo mental y, aunque no un gran número de ellos/as, también utilizaron el cálculo escrito; y tanto los/as del cálculo mental como los/as del cálculo escrito comprobaron su resultado con la calculadora, casi como un medio de retroalimentación para verificar que no hubiesen cometido errores. En los cálculos expuestos algunos/as han realizado sumas para obtener el 90, pero otros/as también han empleado las restas para complementar el resultado.

En la segunda sesión se entrega una ficha similar a la trabajada en la sesión anterior pero ahora se tiene que conseguir alcanzar el número 80 (consultar figura 3).

Algunos/as alumnos/as se dan cuenta que en vez de tener 6 cruces como en la actividad anterior ahora tienen 5 para cubrir. Entonces empiezan a comentar que en la última cruz de la sesión anterior no se podría cubrir toda, y que por eso creen que ahora solo tienen cinco para cubrir.

Puesto que ya saben la mecánica para la realización de la actividad se entretienen menos y la van completando con las mismas estrategias que utilizaron en la sesión anterior. Dándose cuenta de que sucede lo mismo: cada vez tienen menos posibilidades para cubrir las cruces y que la última cruz no la pueden completar. Se obtienen los siguientes resultados:

— 1.ª cruz: **0** + 10 + 70; **0** + 20 + 60; **0** + 30 + 50.
— 2.ª cruz: **10** + 10 + 60; **10** + 20 + 50, **10** + 30 + 40.
— 3.ª cruz: **20** + 10 + 50; **20** + 20 + 40.
— 4.ª cruz: **30** + 10 + 40; **30** + 20 + 30.
— 5.ª cruz: **40** + 10 + 30.

Al finalizar se les pregunta «¿cuántas cruces serían necesarias para obtener una suma de 70? ¿Y para obtener una suma de 60, 50, 40, 30, 20 o 10?».

Del mismo modo que observaron que para 80 haría falta una menos que para 90, rápidamente algunos/as estudiantes respondieron que una menos que para 80, es decir 4 cruces. Y que entonces para 60 harían falta tres cruces, para 50 dos cruces y para 40 una cruz. Entonces, «¿qué pasa con el 30, 20 o 10?», les vuelve a preguntar el docente.

Se quedaron pensando, hasta que un/a estudiante comentó: «Es que $30 = 10 + 10 + 10$, y como no podemos usar el número más de una vez no podemos cubrir una cruz».

El docente nuevamente pregunta: «¿pasaría lo mismo con 20?».

Y uno/a comenta que «sí», pero otro/a dice que «no, porque $20 = 10 + 10$, o $20 + 0$, no tendríamos tres números, ni tampoco para el 10».

Terminamos la sesión exponiendo todas las ideas que se fueron descubriendo en la pizarra.

DESCUBRIENDO PROPIEDADES ARITMÉTICAS

La actividad se presenta al aula de 3.er. curso, con el objetivo de que descubran propiedades aritméticas de la suma y la resta con ayuda de la calculadora, y se desarrolla en una sesión. Inicialmente se encuentran con la siguiente actividad:

> Con ayuda de tu calculadora completa y realiza las operaciones que se indican para obtener el resultado expuesto.
>
> $17 + ___ = 38 = ___ + 21$ $\quad$ $35 + ___ = 51 = 16 + ___$
>
> $18 + ___ = 43 = 25 + ___$ $\quad$ $___ + 25 = 47 = 22 + ___$
>
> $12 + ___ = 39 = ___ + 27$ $\quad$ $29 + ___ = 55 = ___ + 26$
>
> a) ¿Qué puedes deducir de las operaciones anteriores? Si tengo $37 + 25$, ¿el resultado obtenido será el mismo que al realizar $25 + 37$? ¿Por qué lo crees?
>
> b) ¿Podrías escribir con tus palabras una norma o regla expresando lo que has descubierto?

Los/as alumnos/as empiezan a realizar los cálculos y a investigar (ver figura 4). Cuando tienen todos los resultados y pasado un tiempo, creen que han descubierto la relación numérica que se da en las operaciones anteriores y se les solicita que escriban con sus palabras una norma o regla que pueda generalizar dicha relación. Algunas de las respuestas que exponen son las siguientes:



Figura 4. Momentos durante la realización de la actividad

> No pasa nada si cambias los números de sitio en la suma porque el resultado siempre es el mismo. No pasa nada porque la suma sigue como está, porque el resultado sigue siendo el mismo. Da igual qué número esté el primero porque da lo mismo.

Se establece un diálogo en gran grupo con toda la clase para intentar llegar a una generalización consensuada que no lleve a confusión, y el docente pregunta a un/a alumno/a: «¿Qué quieres decir cuando dices *si cambias los números de sitio*?» Responde que «da igual si el número lo pones de primero o de segundo cuando lo sumas, si son siempre los mismos números». Enseguida se llega a la conclusión de que no importa el orden en el que se pongan los sumandos, que el resultado es el mismo. Y el docente les afirma que esta propiedad de la suma se le llama, propiedad conmutativa.

Seguidamente, el docente les invita a experimentar: «Si en vez de la suma hay una resta, ¿pasaría lo

mismo? ¿Qué pasaría si fuera una resta, por ejemplo 17−11, daría el mismo resultado que 11−17?»

Algunos/as estudiantes rápidamente responden que «17−11 da 6, pero que 11−17 no se puede hacer porque 11 es más pequeño que 17, y no se puede restar, aunque otros/as prueban a teclear en la calculadora 11−17 y comentan que sale también 6 pero con una raya delante, como la de la resta».

Todos/as están de acuerdo con que no es lo mismo, y el docente comenta que −6 es un número negativo, pero si el resultado no es lo mismo, «¿entonces la resta tiene la misma propiedad que la suma?». Y con rotundidad, todos/as afirman que «no, que la resta no tiene o no cumple la propiedad conmutativa».

Entonces el profesor plantea otro reto para realizarlo con la calculadora, si la necesitan, y se les presenta al alumnado:

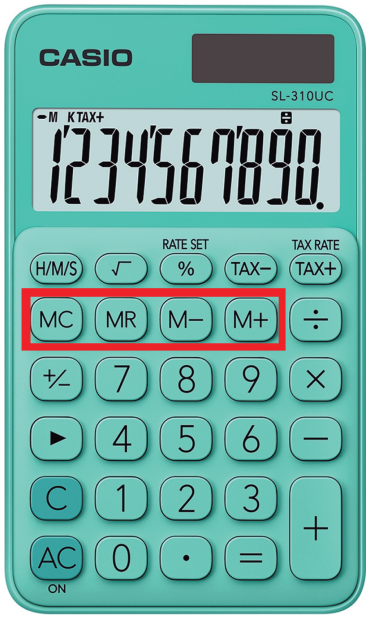


Figura 5. Teclas de memoria de la calculadora

> Escribe en tu calculadora los siguientes cálculos y copia el resultado que aparece por pantalla:
>
> 12−11+25−14= 12+25−11−14=
>
> 24−20+14−3= 24+14-20−3=
>
> 35−13+15−18= 35+15−13−18=
>
> ¿Qué resultados obtienes si comparas los números de las filas?

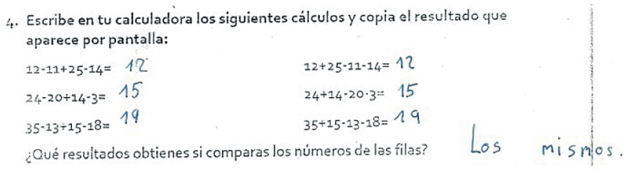

4. Escribe en tu calculadora los siguientes cálculos y copia el resultado que aparece por pantalla:
12-11+25-14= 12 12+25-11-14= 12
24-20+14-3= 15 24+14-20-3= 15
35-13+15-18= 19 35+15-13-18= 19
¿Qué resultados obtienes si comparas los números de las filas? Los mismos.

Figura 6. Ejemplo de los resultados obtenidos

Esta actividad tiene como objetivo la introducción e iniciación de las operaciones combinadas y el uso del paréntesis. Además, se les explica el uso de las teclas de memoria de la calculadora (aquellas denominadas MC, MR, M− y M+, ver figura 5).

Una vez realizadas las operaciones solicitadas y que hayan comprobado que al cambiar los operandos de posición sigue sin variar el resultado (figura 6), se les solicita agrupar con paréntesis las operaciones con el mismo signo de la segunda columna.

En general, el alumnado encierra entre paréntesis sin dificultad las sumas, ya que es lo primero que hacen, pero cuando tienen que agrupar las restas muestran dudas. Se abre un debate en gran grupo, y se les incita a pensar qué le pasa a un número cuando se le resta primero una cantidad y luego otra, si pudieran hacer esto mismo pero de otra manera, restando únicamente una vez una única cantidad, y se les expone un ejemplo sencillo como 9−5−1. Entonces, de este modo ya se dan cuenta y se convencen de lo que tiene que hacer, y alguno/a comenta «los dos números que tienen que agrupar están restando con lo que dentro del paréntesis deben sumarse, ya que es lo mismo quitarle al 9 primero 5 y luego 1, o quitarle 5 + 1, que es 6». Ante esta deducción, todos/as llegan a la conclusión de que las operaciones expuestas quedan de la siguiente manera:

$$(12+25)-(11+14) \qquad (24+14)-(20+3)$$
$$(35+15)-(13+18).$$

Entonces el docente les pregunta: «¿Qué resultado creéis que van a dar estas operaciones?». Algunos/as afirman «que no saben, no están seguros de lo que darán, que creen que lo mismo», y otros/as dicen que «lo mismo que antes». En este momento se les pide que realicen los cálculos con la calculadora para verificar qué obtienen, y para ello se les explica el funcionamiento de las teclas de memoria, ya que se les comenta que la calculadora puede guardar datos, tiene una pequeña memoria, y se les expone:

— la tecla **MC** borra la memoria de la calculadora;
— la tecla **M+** suma un número al dato guardado en la memoria;
— la tecla **M–** resta un número al dato guardado en la memoria,
— la tecla **MR** recupera el número guardado en la memoria, lo muestra en la pantalla.

Se les informa cómo es el procedimiento para operar con la calculadora con estos cálculos con un ejemplo: para obtener el resultado de la expresión $(12+25)-(11+14)$ en la calculadora, se teclea primero **MC** para borrar cualquier dato que estuviese almacenado en nuestra calculadora. Luego se les pregunta qué cálculos se deberían de hacer primero, y contestan que los que están entre paréntesis, es decir las sumas: $12+25$, y $11+14$. Entonces para hacer esto en la calculadora, se les indica que primero deben calcular la primera operación, $12+25$ y teclear **M+**, para que el resultado de esta operación quede guardado en la memoria, en este caso 37; y luego teclear, $11+14$, pero haciendo una llamada de atención, ya que el resultado de esta operación «¿qué le va a pasar con respecto al 37? Se le va a restar, ¿no?», comenta el docente. Entonces ahora no podemos teclear **M+**, ya que no lo queremos sumar, sino que lo queremos restar al cálculo obtenido previamente, por tanto debemos teclear **M–** para obtener $37-(11+14)$.Y para conocer el resultado de esta operación, «¿qué tecla debemos usar ahora? ¿Vamos a seguir sumando o restando?», a lo que todos contestan que no y como tampoco queremos borrar el dato de la memoria, entonces usamos **MR**, que es la tecla que nos muestra el dato obtenido. Se obtiene 12 por pantalla.

Hacen de una forma análoga las siguientes operaciones, y entonces ya pronto empiezan a comentar que obtienen los mismos resultados que antes, confirmando las creencias de algunos/as, y poniendo en valor la propiedad asociativa de la suma.

Conclusiones

Se han expuesto dos ejemplos sencillos de uso de la calculadora, en donde se recogen diferentes aplicaciones de su manejo. Se muestra como un recurso que puede ser complementario de otro material didáctico como las regletas; como medio para fomentar el cálculo mental en la resolución práctica de la operación suma (aspecto ya recogido por Canals en Biniés, 2008) trabajando además la descomposición de los diez primeros números y su extensión a la decena correspondiente; como herramienta que fomenta la autonomía y la retroalimentación individual para verificar y depurar errores, tanto en el cálculo mental como en el escrito; y como medio que ayuda a realizar conjeturas matemáticas, a descubrir patrones o regularidades y propiedades aritméticas.

Además, también se ha fomentado su uso dando a conocer diferentes funcionalidades de sus teclas de memoria facilitando el cálculo de operaciones combinadas.

Cabe destacar que, aunque el currículo de la Comunidad de Madrid no recoja su uso hasta el 5.º curso de Educación Primaria, se muestra cómo es interesante y enriquecedor su uso y conocimiento en edades tempranas para realizar pequeñas investigaciones o comprobar cálculos, entre otros objetivos, ya que se ha experimentado que los/as estudiantes con menor competencia numérica pueden superar sus deficiencias con su ayuda, mejorando su actitud ante las matemáticas, en las destrezas de cálculo personales y en la comprensión de conceptos.

En cualquier caso, no existe ningún estudio que avale que el uso de las calculadoras produzca algún efecto adverso sobre la capacidad de cálculo o que reduzca la necesidad de comprender las matemáticas, pero sí

bastantes —recogemos algunos de los más significativos, por ejemplo Cockcroft (1985), Fielker (1986) y Fraile (1997)— que muestran que puede ser un elemento estimulante en el aprendizaje de los/as estudiantes, como sucede en las experiencias aquí recogidas.

> [...] no existe ningún estudio que avale que el uso de las calculadoras produzca algún efecto adverso sobre la capacidad de cálculo o que reduzca la necesidad de comprender las matemáticas

Puede ser que la falta de orientaciones concretas de cómo y cuándo usar la calculadora sea la principal causa de su escaso uso en las aulas de educación primaria, al generar indecisión entre el profesorado sobre la posibilidad de admitir o no su empleo. Sin embargo, la realidad es que desde edades muy tempranas se hace uso de ellas en el hogar, y si pensamos en su futuro, será una herramienta que tendrán que manejar y conocer en algún momento de su desempeño profesional. Es una habilidad análoga a aquella que se manifiesta en el conocimiento de herramientas de procesamiento de texto, bien sea a través de un correo electrónico o de un software especializado, y no orientamos ni enseñamos a que se corrijan las faltas ortográficas con un diccionario, sino usando el corrector de dicha herramienta digital. La aversión al uso de calculadoras en las escuelas contrasta con su aceptación general en la vida diaria y en el lugar de trabajo.

Referencias bibliográficas

Biniés, P. (2008), *Conversaciones matemáticas con María Antònia Canals. O cómo hacer de las matemáticas un aprendizaje apasionante,* Graó, Barcelona.

Bruner, J. (1960), *The process of education*, Vantage Books, Nueva York.

Cascallana, M. T. (1993), *Iniciación a la matemática: materiales y recursos didácticos*, Santillana, Madrid.

Canals, M. A. (1986), *El càlcul mental i la calculadora, 1,* Eumo Editorial, Barcelona.

— (1986*a*), *El càlcul mental i la calculadora, 2,* Eumo Editorial, Barcelona.

— (1986*b*). *El càlcul mental i la calculadora, 1 i 2, Guia-solucionari,* Eumo Editorial, Barcelona.

Cockcroft, W. H. (1985), *Las matemáticas sí cuentan, Informe Cockcroft,* Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

Fernández, J. A. (1989), *Los números en color de G. cuisenaire. Relaciones dinámicas para el descubrimiento de la Matemática en el aula,* Seco-Olea, Madrid.

Fielker, D. S. (1986), *Usando las calculadoras con niños de 10 años*, Consellería de Cultura, Educació i Ciencia, Direcció General d'Ensenyaments Universitaris i Investigació, Generalitat Valenciana, Valencia.

Fraile, J. (1997), «Más allá de los algoritmos: uso de la calculadora y aprendizaje de estrategias con alumnos de 8 años», *Suma*, n.º 26, 95-102.

Kamii, C. (1990), «¿Qué aprenden los niños con la manipulación de objetos?», *Infancia*, n.º 2, 7-10.

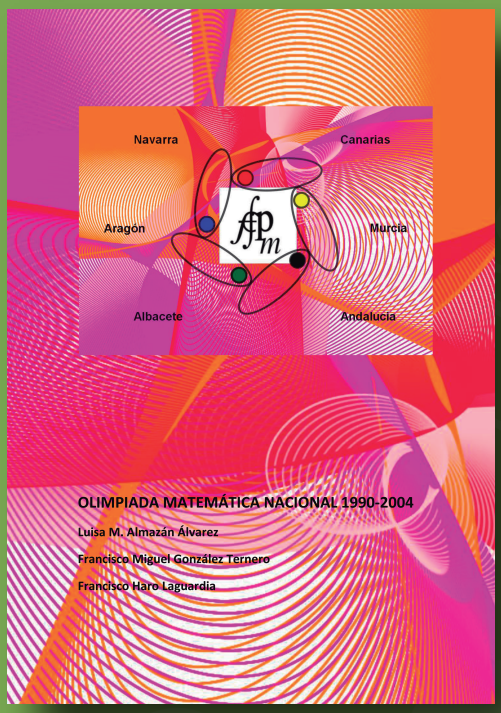
— (1994), *El niño reinventa la aritmética: implicaciones de la teoría de Piaget*, A. Machado Libros, Madrid.

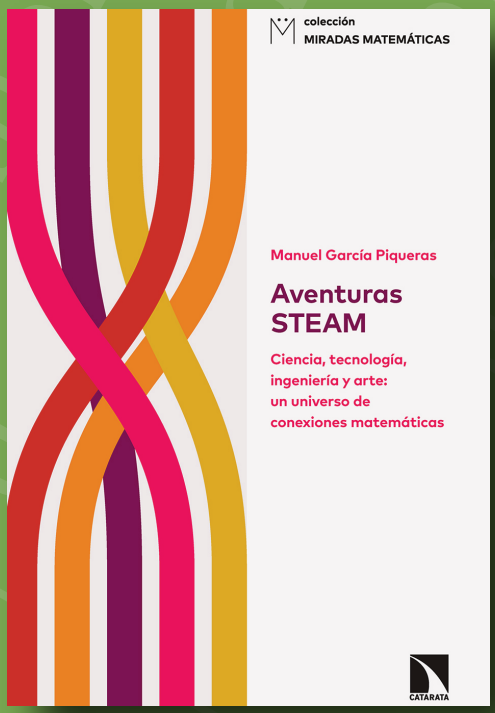
Jesús Serrano Higueras
CEIP Tomé y Orgaz de Casarrubuelos, Madrid
jserrano@educa.madrid.org

M.ª Cristina Naya Riveiro
Universidade da Coruña
<cristina.naya@udc.es>

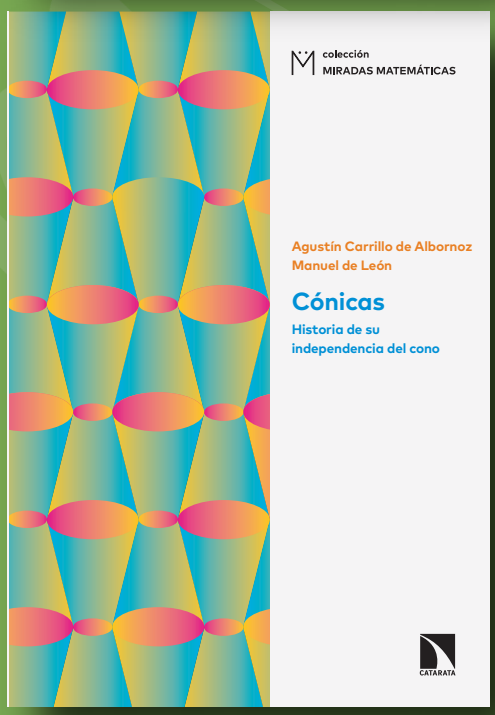
Servicio de Publicaciones de la FESPM

<publicaciones@fespm.es>









DIARIO DE EXPERIENCIAS MATEMÁTICAS

¿Y tú qué quieres ser de mayor?

Magdalena Martí Pons
Susanna Morell Torrens
Catalina Maria Pizà Mut

SUMA+ núm. 96
pp. 89-98
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2020 y aceptado en enero de 2021

¿Cuántas veces hemos oído esta pregunta, o la hemos formulado nosotros mismos?

Si se la hacemos a nuestros alumnos o alumnas ¿nos dirán «matemático» o «matemática»?

¿Y si les pedimos que digan nombres de matemáticos, matemáticas, o personas relacionadas con las matemáticas? ¿Qué ocurrirá?

¿Sucederá lo mismo si les proponemos citar científicos, inventores, pintores, escritores, jugadores de fútbol, cantantes famosos o *youtubers*?

Es evidente que los alumnos conocen el trabajo de profesor de matemáticas, pero bajo su punto de vista, tras la palabra «matemático» ¿hay algo más?

Creemos que dar a conocer a una matemática, a un matemático o a una persona que ha utilizado las matemáticas en sus investigaciones, es un excelente recurso para tener una visión globalizada de un momento histórico, social, artístico y, por supuesto, matemático.

¡Os lo contamos!

¿Cómo podemos presentar a un matemático en la escuela?

— A partir de un libro.
— A propuesta de una organización local o mundial.
— A partir de una noticia de un periódico.
— Por un interés o necesidad surgidos en el aula.
— A través de películas, series o documentales.
— En ocasión de una efeméride.
— Con materiales de divulgación (juegos, calendarios, pósters…).
— En exposiciones.

Primera propuesta

LEONARDO DA PISA

¿Cómo se ha presentado Fibonacci en el aula?

Una de las actividades que ofrece el CentMat (Centro científico matemático de les Illes Balears) es «El tresor dels nombres» (El tesoro de los números), y uno de los materiales con el que se trabaja es el libro de Joseph D'Agnese *Fibonacci, el soñador de números*.

¿Quién fue?

Fibonacci, también conocido como Leonardo Bigollo, Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano, Leonardo Bonacci o Fibonacci, fue un matemático italiano nacido en Pisa el año 1170.

Fibonacci se asocia al número phi y a la proporción áurea, conceptos que no se trabajan en primaria. Pero en contra de lo que podemos pensar en un principio, hay mucho por descubrir.

¿Cómo se ha llevado a cabo la actividad? ¿Empezamos?

El trabajo se ha realizado en una clase de quinto.

Nos planteamos tres grandes bloques de actividades:

— ¡Una investigación 10!
— La serie infinita
— Tres de Artemáticas

¡UNA INVESTIGACIÓN 10!

Se plantea investigar sobre la existencia de sistemas de numeración distintos al nuestro.

Descubrimos que a lo largo de la historia se han utilizado otros sistemas: maya, egipcio, chino, hindú, sumerio-babilónico, griego y romano. Cada gran civilización ha tenido su propia numeración y todas son muy diferentes (figura 1).

Los alumnos reflexionan sobre otro sistema de numeración que se enseña en la escuela, el romano. Esta numeración, tan poco utilizada actualmente, estuvo presente en el día a día de toda Europa durante muchos siglos. Llegan a la conclusión de que debió ser un sistema muy importante para que siga apareciendo hoy en día en los libros de texto.



Figura 1. Sistemas de numeración

Un análisis curioso es la relación que observan entre el sistema sexagesimal empleado en la medida del tiempo y de los ángulos con uno de los sistemas de numeración más antiguos que se conocen, el sumerio-babilónico.

Toman conciencia de que nuestro sistema de numeración es posicional y decimal, conceptos que se trabajan desde los primeros cursos de primaria, pero que no siempre comprenden.

¿Qué papel jugó Fibonacci?

En la época en que vivió Fibonacci el sistema de numeración usado habitualmente era el romano.

En uno de sus viajes al norte de África descubrió el sistema de numeración indo-arábico y quedó fascinado. ¡Utilizando únicamente diez cifras se agilizaba enormemente el cálculo!

Pero tardamos muchos siglos en incorporar este sistema. Los viejos hábitos son difíciles de abandonar.

LA SERIE INFINITA

En este bloque se proponen dos actividades:

La serie

Se trabaja la serie Fibonacci y los alumnos toman conciencia del infinito.

A partir de aquí nuestro interés estará encaminado en descubrir la relación de los números de la serie con la naturaleza.

Después de ver el vídeo de Cristóbal Vila *Nature by Numbers*, la motivación es inmediata. Descubren, que por arte de magia, la naturaleza parece haber aprendido matemáticas.

Los números de la serie y el número de pétalos de las flores. (*1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…*) La sorpresa es enorme (figura 2).



Figura 2. Flores para contar pétalos



Figura 3. Espirales en la naturaleza

La espiral

Se realiza la espiral a partir de los cuadrados de los números de la serie. Los conceptos de línea, ángulo y las diferentes posiciones en el espacio surgen de manera natural.

¿Dónde podemos encontrar esta espiral?¡Más magia!

En los tallos de las plantas, en las caracolas, en las piñas, en los girasoles, en los huracanes, en las galaxias...(figura 3).

ARTEMÁTICAS

Se proponen tres producciones y a través de ellas se trabajan diferentes conceptos.

Composiciones planas con círculos de radio *1,1, 2, 3, 5, 8 …* centímetros. Concepto de superficie, figura plana, círculo, circunferencia, radio, diámetro, longitud de la circunferencia. Medidas de longitud (figura 4).



Figura 4. Círculos con diámetro de la serie de Fibonacci

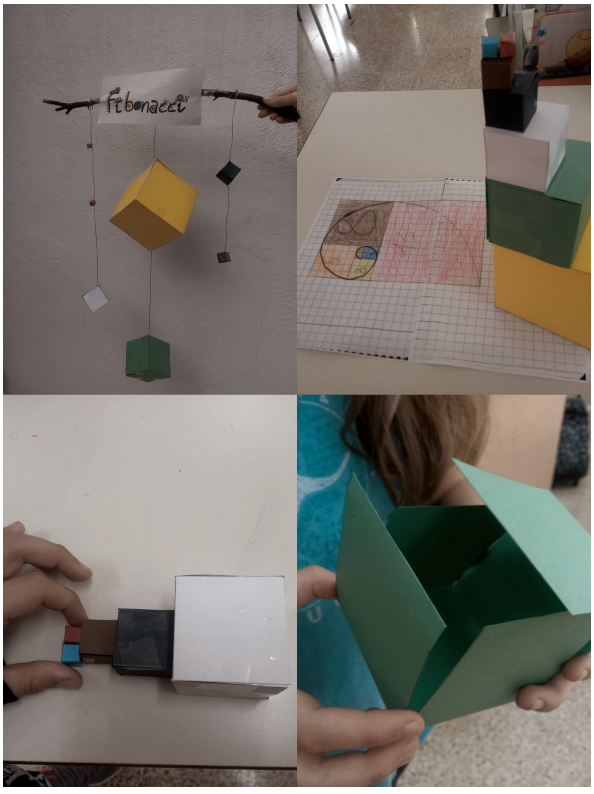


Figura 6. Cubos de arista *1, 1, 2, 3, 5*...

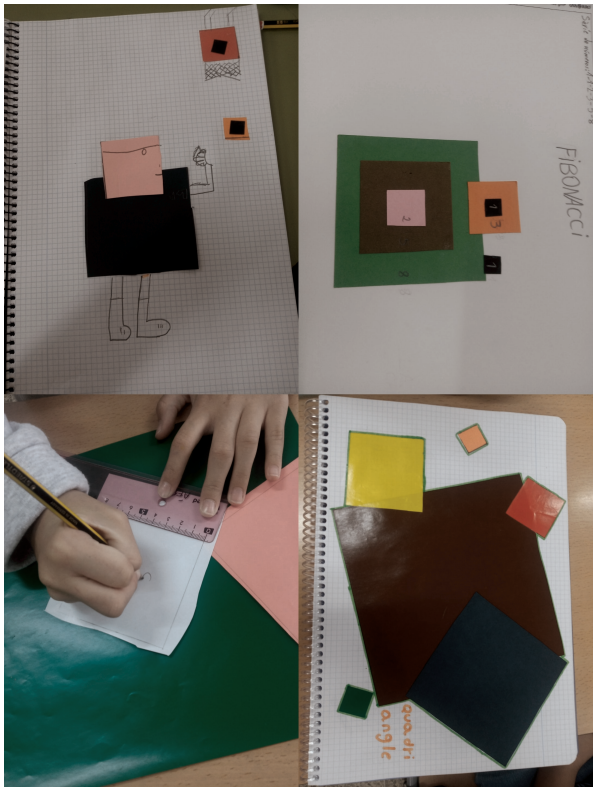


Figura 5. Cuadrados de lado *1, 1, 2, 3, 5*...

Composiciones planas con cuadrados de lado *1, 1, 2, 3, 5, 8*... centímetros. Concepto de figura plana, cuadrilátero, cuadrado, ángulo, rectas paralelas, rectas perpendiculares, números cuadrados, potencias. Medidas de longitud y superficie (figura 5).



Figura 7. Ventana del CEIP Guillem Frontera Pascual

Móvil con cubos. La medida de las aristas también son *1, 1, 2, 3, 5, 8*... centímetros. Concepto de superficie, cuerpo geométrico, poliedro, prisma, cara, arista, vértice. Medidas de longitud y volumen (figura 6).

Detalle de una ventana del CEIP Guillem Frontera Pascual, Ariany (Mallorca) (figura 7).

Segunda propuesta

FLORENCE NIGHTINGALE Y JOHN SNOW

¿Cómo se presentaron en el aula?

Florence Nightingale llegó a partir de una iniciativa de Bubbly Maths llamada «Global Maths and Science Lessons».

Desde hace unos años Bubbly Maths y Aimssec realizan una propuesta de matemáticas a nivel mundial de una duración aproximada de 30 minutos.

En 2020 tuvo lugar el 17 de septiembre y tenía por título *People Stats*. Su pretensión era relacionar la estadística con la salud; a ello se debe su elección y a que, además, se cumplen 200 años de su nacimiento.

Nos pareció un tema muy adecuado a explorar en plena pandemia COVID-19.

¿Quiénes fueron?

Florence Nightingale fue una enfermera, estadística y reformadora social.

Nació en Florencia en 1820 y murió en el Reino Unido en 1910.

Se la conoce como la «Dama de la lámpara» por su trabajo y dedicación en el hospital de Scutary con los heridos de la guerra de Crimea.

Representó el número de muertos en un «diagrama de la rosa», modelo revolucionario en esa época, para dar a conocer sus investigaciones y convencer a la reina Victoria y a la sociedad en general de la necesidad de aumentar la higiene en los hospitales.

John Snow fue un médico al que podemos considerar precursor de la epidemiología.

Nació en York en 1813 y murió en Londres en 1858.

Investigó cómo se propaga el cólera.



Figura 8. Cartel de la Global Maths & Science Lesson 2020

¿Cómo se lleva a cabo la actividad? ¿Empezamos?

Esta segunda propuesta también se lleva a cabo en una clase de quinto. Se divide la clase en dos grupos. Cada uno de ellos lee uno de los textos.

Primer texto

En <https://mujeresconciencia.com/2017/08/22/florence-nightingale-mucho-mas-la-dama-la-lampara/>, se narra la investigación de Florence Nightingale sobre la causa de la muerte de los soldados de la Guerra de Crimea (1855-56).

Segundo texto

En <https://culturacientifica.com/2019/04/11/el-mapa-del-colera-de-john-snow/>, se explican las deducciones de John Snow con respecto a la epidemia de cólera de 1854 en Londres.

Cada grupo explica a sus compañeros lo que ha podido extraer del texto, de tal manera que en la conversación se pueden comparar ambos personajes y descubrir la relación que tuvieron con las matemáticas.

¿Qué tienen en común ambos personajes?

Fue la pregunta clave para adentrarnos en los modelos matemáticos y en la importancia de registrar los datos.

Se observan varias coincidencias:

- Los dos trabajan en hospitales.
- Son de la misma época.
- Viven en la misma ciudad, Londres («crónica de sociedad»: ¿se conocieron?).
- Los dos registran datos: las enfermedades o los muertos.
- Los dos investigan para saber si tienen razón.
- Los dos protestan: ella va al Parlamento a explicar lo que ha descubierto para pedir más higiene en los hospitales; él va a hablar con los parlamentarios (con la reina Victoria según una serie emitida en TV) para que cierren la bomba de agua de Broad Street.

Florence Nightingale utiliza un diagrama de cuñas, muy fácil de interpretar, distribuido por meses y utiliza tres colores para tres causas de muerte: heridas,

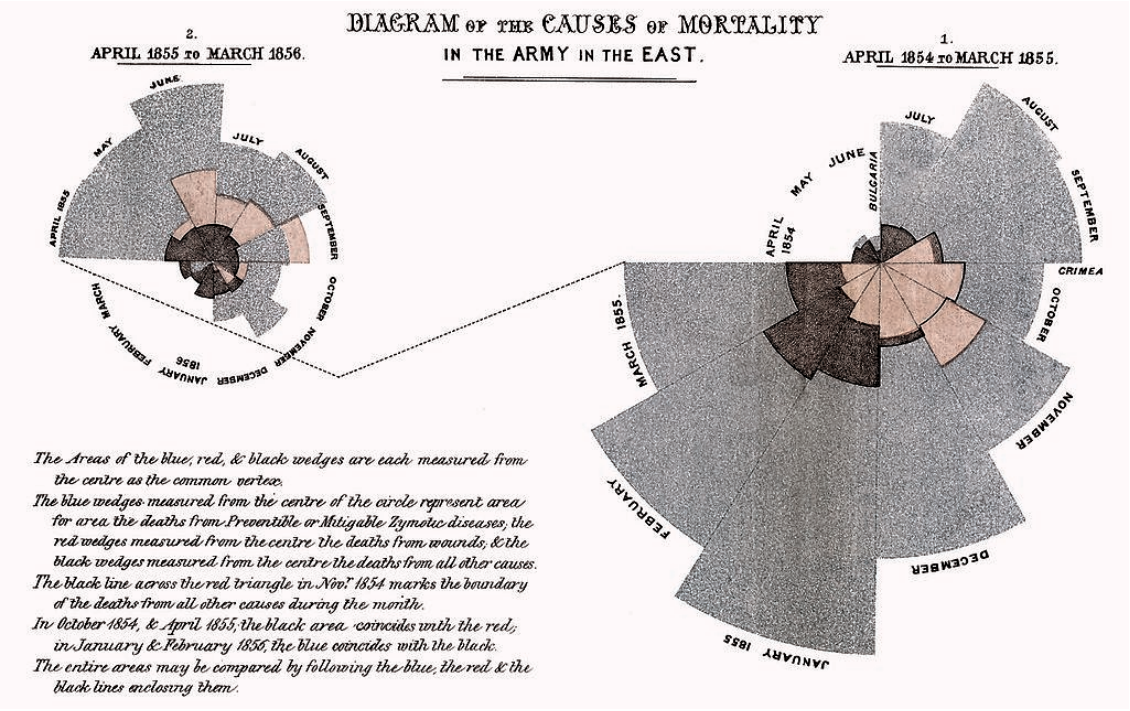


Figura 9. Gráfico elaborado por Florence Nightingale

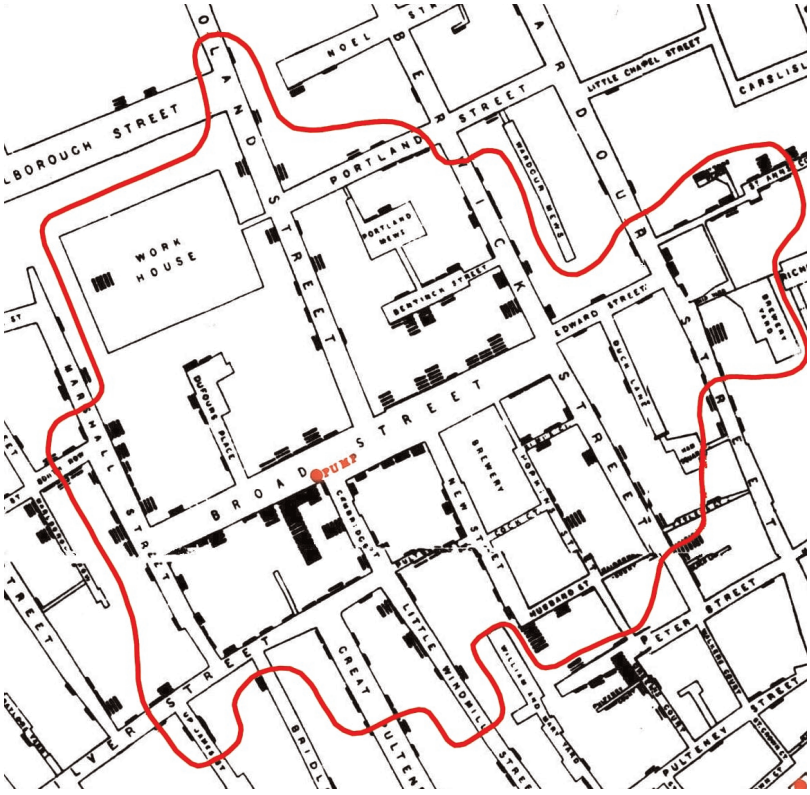


Figura 10. Mapa elaborado por John Snow

infecciones y otros (figura 9). «Se entiende sin ninguna explicación», según una alumna.

John Snow utiliza un mapa, en realidad un diagrama de Voronoi y posteriormente un mapa isócrono, donde se ve reflejada la distancia caminada con respecto a las bombas de agua, para poder detectar el foco de propagación. «Muy fácil de comprender, también, aunque no se ve muy bien donde están las bombas de agua», según otro alumno (figura 10).

Se llega a la conclusión de que los dos querían solucionar un problema y para ello utilizaron modelos matemáticos para refrendar sus hipótesis.

¿Cómo se lleva a cabo la actividad propuesta por Bubbly Maths y Aimssec?

Se proponen dos criterios (figura 11):

— Si han leído un texto o el otro.
— Si han nacido entre enero y junio o entre junio y diciembre.

Así la clase queda dividida en cuatro partes (figura 12). A continuación se les indica que deben sumar el número de alumnos según los criterios especificados anteriormente.

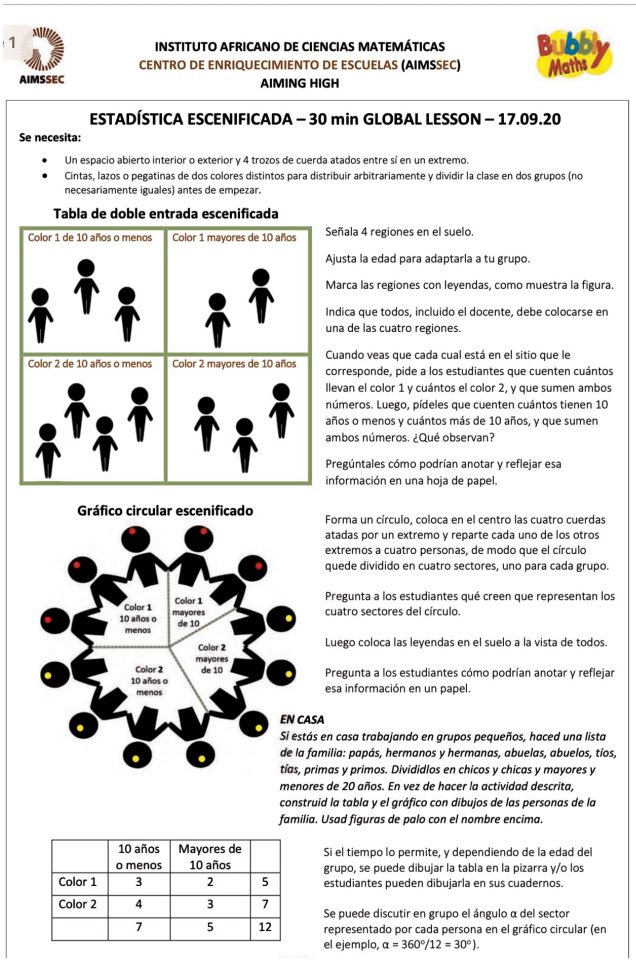
Representan los datos y resultados en un folio, como si tuvieran que ir a explicarlos ante el Parlamento o ante la Reina Victoria...

Se exponen, observan y comparan todas las representaciones.

No siempre es fácil interpretar un gráfico, una infografía o una anotación hecha por otra persona y eso es objeto de comentarios y sugerencias entre ellos.

De este modo, se extraen estas conclusiones:

— Todas las representaciones son diferentes.
— Algunas son incompletas.
— En otras sobran datos.



INSTITUTO AFRICANO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
CENTRO DE ENRIQUECIMIENTO DE ESCUELAS (AIMSSEC)
AIMING HIGH

ESTADÍSTICA ESCENIFICADA – 30 min GLOBAL LESSON – 17.09.20

Se necesita:

- Un espacio abierto interior o exterior y 4 trozos de cuerda atados entre sí en un extremo.
- Cintas, lazos o pegatinas de dos colores distintos para distribuir arbitrariamente y dividir la clase en dos grupos (no necesariamente iguales) antes de empezar.

Tabla de doble entrada escenificada

Color 1 de 10 años o menos	Color 1 mayores de 10 años
Color 2 de 10 años o menos	Color 2 mayores de 10 años

Señala 4 regiones en el suelo.

Ajusta la edad para adaptarla a tu grupo.

Marca las regiones con leyendas, como muestra la figura.

Indica que todos, incluido el docente, debe colocarse en una de las cuatro regiones.

Cuando veas que cada cual está en el sitio que le corresponde, pide a los estudiantes que cuenten cuántos llevan el color 1 y cuántos el color 2, y que sumen ambos números. Luego, pídeles que cuenten cuántos tienen 10 años o menos y cuántos más de 10 años, y que sumen ambos números. ¿Qué observan?

Pregúntales cómo podrían anotar y reflejar esa información en una hoja de papel.

Gráfico circular escenificado

Forma un círculo, coloca en el centro las cuatro cuerdas atadas por un extremo y reparte cada uno de los otros extremos a cuatro personas, de modo que el círculo quede dividido en cuatro sectores, uno para cada grupo.

Pregunta a los estudiantes qué creen que representan los cuatro sectores del círculo.

Luego coloca las leyendas en el suelo a la vista de todos.

Pregunta a los estudiantes cómo podrían anotar y reflejar esa información en un papel.

EN CASA

Si estás en casa trabajando en grupos pequeños, haced una lista de la familia: papás, hermanos y hermanas, abuelas, abuelos, tíos, tías, primas y primos. Divididlos en chicos y chicas y mayores y menores de 20 años. En vez de hacer la actividad descrita, construid la tabla y el gráfico con dibujos de las personas de la familia. Usad figuras de palo con el nombre encima.

	10 años o menos	Mayores de 10 años	
Color 1	3	2	5
Color 2	4	3	7
	7	5	12

Si el tiempo lo permite, y dependiendo de la edad del grupo, se puede dibujar la tabla en la pizarra y/o los estudiantes pueden dibujarla en sus cuadernos.

Se puede discutir en grupo el ángulo α del sector representado por cada persona en el gráfico circular (en el ejemplo, α = 360º/12 = 30º).

Figura 11. Propuesta de Bubbly Maths y Aimssec

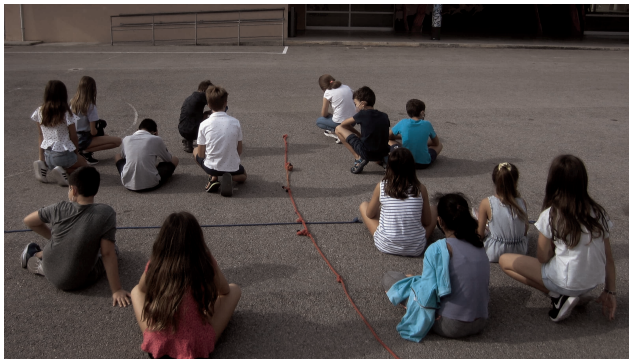


Figura 12. Actividad realizada en el patio

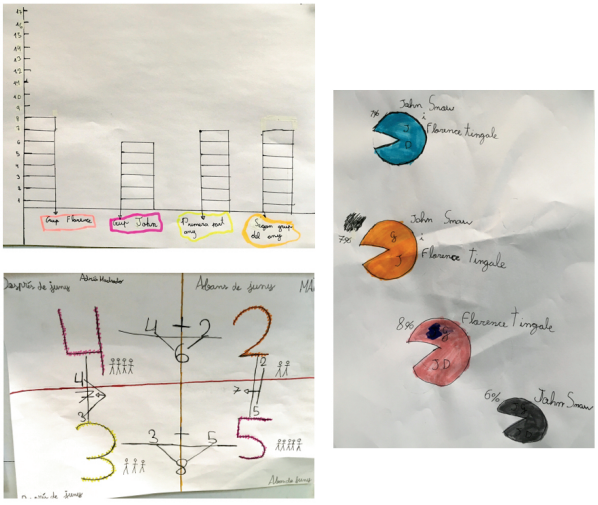


Figura 13. Tres tipos de representaciones

Paso	Leonardo da Pisa	Florence Nightingale /John Snow
¿Cómo se presentaron en el aula?	A través de un libro	Por una propuesta de Bubbly Maths
Conexión con la historia	Edad Media, uso de la numeración romana/uso de la numeración indo-arábiga	Siglo XIX, la utilización de modelos matemáticos en la búsqueda de soluciones en temas de salud
Conexión con las ciencias	Patrones en la naturaleza	Ciencia de los datos aplicada a la salud
Representación	Producciones artísticas a través de la serie	Gráficos estadísticos
Contenidos matemáticos	Series numéricas Números cuadrados Medidas de longitud, volumen y ángulos Concepto de línea y sus posiciones Concepto de figura plana y cuerpo geométrico Uso de herramientas: regla, compás, escuadra, cartabón y calculadora	Gráficos: cuadros de doble entrada, diagramas de barras y de sectores Porcentajes Uso de herramientas: regla, compás y calculadora

Tabla 1. Similitudes entres ambas experiencias

— La mayoría se parecen.
— En total tenemos tres tipos de representaciones gráficas: cuadros de doble entrada, diagramas de barras y diagramas de sector (figura 13).

El diagrama de sectores les resulta el más complicado de realizar e interpretar y por ello se ha decidido seguir profundizando (figura 14).

En la tabla 1 se pueden observar las similitudes entre ambas experiencias.

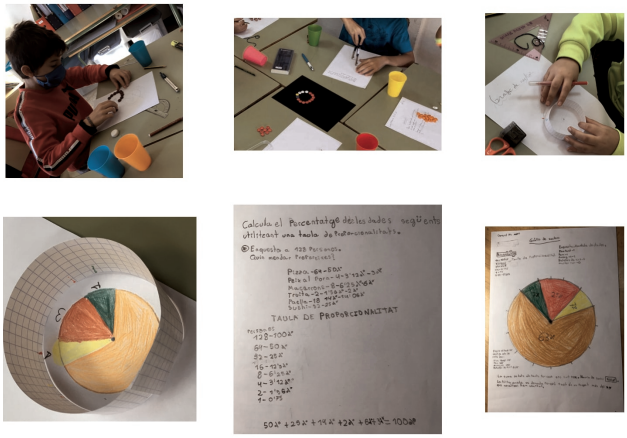


Figura14. Actividades en torno al diagrama de sectores

Reflexiones finales

Para que la presencia de un matemático sea tan habitual en el aula como lo es la de un pintor o un escritor, es imprescindible que sus nombres y experiencias empiecen a formar parte del día a día en la escuela y valoremos sus cualidades, ya que constituyen un buen modelo a seguir. Entre ellas podemos destacar:

— Perseverancia, para resolver problemas.
— Inquietud, para plantearse nuevas preguntas o abrir nuevos campos de investigación.
— Creatividad, para encontrar soluciones diversas a los distintos planteamientos.
— Curiosidad, para estar atentos a nuevos retos.
— Crítica, para revisar y reformular postulados anteriores.
— Observación, para interpretar el mundo.
— Capacidad de divertirse, como queda patente en la cantidad de juegos matemáticos, enigmas... que son capaces de proponer.
— Voluntad divulgativa, como demuestran miles de publicaciones, conferencias, congresos, olimpiadas…
— Pasión, por su trabajo.

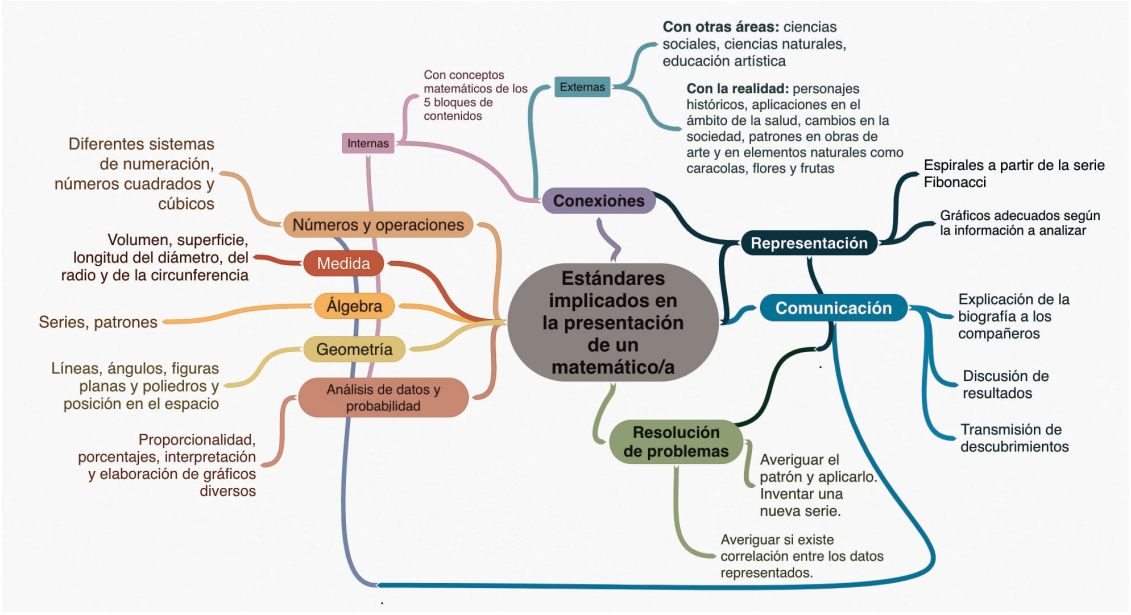


Figura15. Estándares implicados en la presentación de un/a matemático/a



Figura 16. Se busca matemático/a

Fibonacci, Florence Nightingale y John Snow demostraron tener cualidades como estas.

Y para ir más allá. Si como decíamos al principio del artículo, el desconocimiento de la profesión lleva a no escogerla, ¿por qué no compartir un día de clase con un matemático actual? Nos permitiría ofrecer a nuestros alumnos un referente muy cercano al que poder tener como modelo de proyección. Seguro que se sorprenderán de la cantidad de cosas que hacen además de dar clases. Y si volvemos a hacer la pregunta ¿tú, qué quieres ser de mayor?, puede que alguien nos diga: matemático o matemática.

Referencias bibliográficas

Agencia Estatal de Metereologia (2020), <http://www.aemet.es/es/eltiempo/observacion/satelite/infra>.

D'Agnese, J.(2011), *Fibonacci, el soñador de números,* Juventud, Barcelona.

Barba, D., C. Calvo y A. Cerezo (2018), «Tasques riques i Fibonacci», en *PuntMat* <http://puntmat.blogspot.com/search?q=fibonacci>.

Castro, A. M. (2019), «El mapa del cólera de John Snow»», [Mensaje en un blog], *Cuaderno de cultura científica*, [Blog] Recuperado de <https://culturacientifica.com/2019/04/11/el-mapa-del-colera-de-john-snow/>.

Galindo, A. (2015), «Proyecto Fibonacci: Matemáticas y Arte», en *Proyecto matemáticas y arte* (2015), <http://proyectomatematicasyarte.blogspot.com/2015/11/proyecto-fibonacci-matematicas-y-arte.html>.

Gravett, E. (2010), *Un problema de conills*, Cruïlla, Barcelona.

Macho, M. (2017), «Florence Nightingale, mucho más que la dama de la lámpara», [Mensaje en un blog], *Mujeres con ciencia* [Blog], recuperado de <https://mujeresconciencia.com/2017/08/22/florence-nightingale-mucho-mas-la-dama-la-lampara/>.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003), *Principios y estándares para la educación matemática*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales», Sevilla.

SBM-Xeix (2020), «Aniversaris matemàtics» <http://www.xeix.org/agenda-de-l-sbm-xeix/article/aniversaris-matematics>.

Vila, C. (2010), *Nature by Numbers,* <https://www.youtube.com/watch?v=tnkLDFpgix4>.

Magdalena Martí Pons
CEIP Marian Aguiló, Palma
<magdalenmarti@gmail.com>

Susanna Morell Torrens
Centre d'Aprenentatge Cientificomatemàtic (CENTMAT), Palma
<susannamorell@gmail.com>

Catalina Maria Pizà Mut
CEIP Mestre Colom, Palma
<ppizam@gmail.com>

Álgebra interactiva con Graspable Math

Luis Miguel Iglesias Albarrán

SUMA+ núm. 96
pp. 99-110
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2020 y aceptado en enero de 2021

La situación que atravesamos a causa de la COVID-19 ha modificado por completo la educación, acelerando procesos de transformación digital en tiempo récord. Desde las instituciones educativas nos hemos visto obligados a explorar y adoptar soluciones de emergencia, teniendo que implementar modelos de docencia no presencial remota, durante el cierre de la actividad educativa presencial decretado en el último tramo del curso pasado, y modelos híbridos, durante este curso, para afrontar la atención educativa de nuestros estudiantes con las mayores garantías.

En esta nueva era iniciada a raíz de la pandemia se ha empezado a valorar sobremanera la importancia de la tecnología en el ámbito educativo, y la educación *online* en general, considerándolos actores de primer nivel para articular soluciones híbridas en este ámbito.

Como es obvio, la matemática no ha quedado al margen siendo, además, por la complejidad implícita del lenguaje matemático, una de las materias que mayor desafío presenta, tanto a la hora de enseñar como de aprender, en este nuevo contexto.

Según Iglesias (2012: 46) la situación actual en el ámbito escolar resulta un tanto paradójica, considerando que es la que es y no puede ser modificada:

> Las tecnologías digitales, causantes principales de que la sociedad evolucione a un ritmo tan acelerado y las mismas que piden a gritos cambios en la práctica educativa para formar ciudadanos alfabetizados con las características que demanda la nueva era, son al mismo tiempo las que proporcionan las claves para la solución de bastantes de los problemas educativos actuales.

Afortunadamente, el desarrollo experimentado por la tecnología en el ámbito educativo en la última década ha hecho posible poner a disposición de profesores y estudiantes herramientas digitales de extraordinario valor para afrontar este nuevo tiempo,

permitiendo mediante su uso amortiguar el golpe provocado por el SARS-CoV-2.

Una de estas herramientas es Graspable Math, en adelante GM, un software interactivo innovador que permite una nueva manera de explorar y comprender, mediante la interacción (tocando y arrastrando números y símbolos), las relaciones matemáticas. GM forma parte de un proyecto de investigación financiado por el Institute of Education Sciences (IES) dependiente del U.S. Department of Education. Esta herramienta es fruto del trabajo realizado durante años por un equipo multidisciplinar, compuesto por docentes e investigadores especialistas en matemáticas, psicólogos e informáticos, que ha estado investigando los mecanismos cognitivos vinculados al pensamiento matemático y pensando nuevas maneras de reconstruir la idea de notación matemática formal, árida y dificultosa para nuestros estudiantes, con la finalidad de conseguir que sea más amigable y comprensible mediante el uso de la tecnología.

GM permite a los estudiantes «aprender haciendo» *(learning by doing)* matemáticas, favoreciendo el aprendizaje autónomo de los estudiantes y poner el foco en las estructuras matemáticas. El diseño de la herramienta ayuda a salvar el obstáculo de la notación formal, permitiendo que se puedan centrar en cómo funcionan las matemáticas, brindando a nuestros aprendices oportunidades para razonar y deducir de manera flexible sobre las tareas matemáticas.

Graspable Math Canvas (GM) y Graspable Math Activities (GMA)

Graspable Math Canvas (GM) y, su evolutivo, la aplicación web Graspable Math Activities (GMA) pertenecen a una nueva generación de herramientas digitales interactivas innovadoras para un nuevo tiempo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ofrecen un mar de posibilidades para la enseñanza y el aprendizaje, del álgebra en particular y, de las matemáticas, en general.

En palabras de sus fundadores, David Landy, Erik Weitnauer y Erin Ottmar:

> En un mundo donde la tecnología ha avanzado a un ritmo asombroso, la tecnología de la notación matemática no ha cambiado realmente en 400 años. La forma más fácil de escribir y resolver una ecuación sigue siendo a mano, en papel.

GM dispone de interfaces intuitivas, fluidas y sencillas, basadas en modernos y novedosos diseños web. Todo ello favorece el acercamiento y mejora las experiencias de aprendizaje de nuestros estudiantes du-

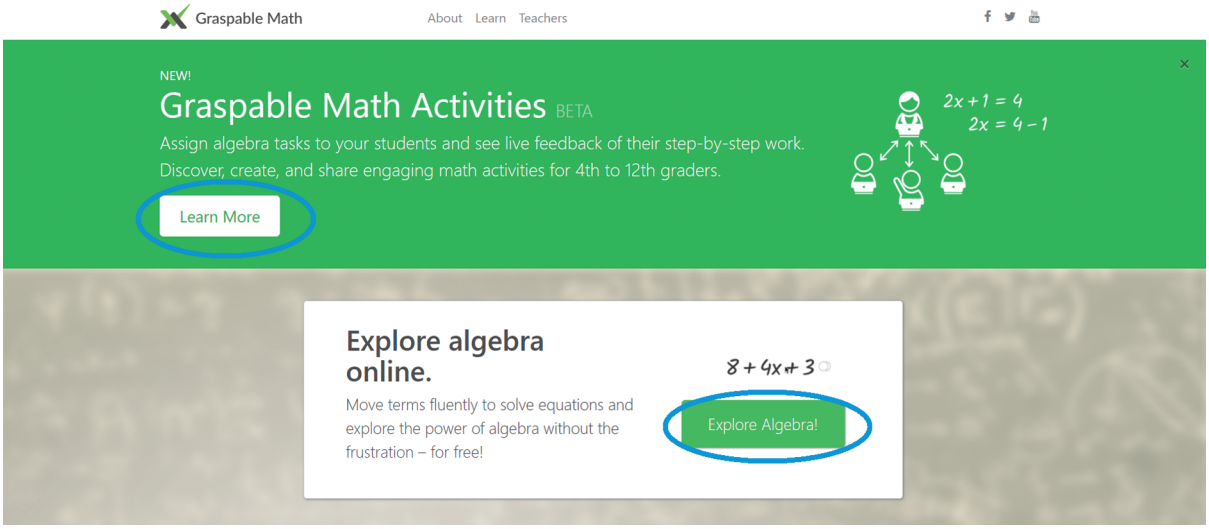
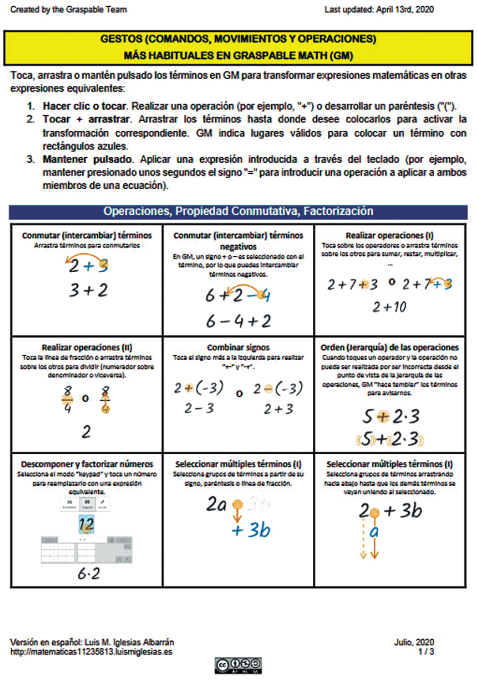


Figura 1. Portada de acceso a Graspable Math Canvas y Graspable Math Activities

rante el estudio del álgebra, así como las conexiones con otros bloques de contenidos matemáticos, como la geometría o las funciones y gráficas, gracias a su excelente integración con GeoGebra (figura 2).

GM está centrada principalmente en la manipulación de expresiones numéricas y algebraicas y la resolución de ecuaciones. Permite a los estudiantes interactuar directamente con expresiones algebraicas y ecuaciones de una manera innovadora. Basta con que aprendan unos cuantos gestos (seleccionar y arrastrar) y comandos sencillos, para que los alumnos puedan resolver ecuaciones con ayuda de esta herramienta. Al seleccionar, arrastrar el ratón y realizar ciertos gestos, los alumnos pueden manipular expresiones algebraicas y observar una respuesta inmediata a sus acciones.

GM está diseñada para que los movimientos simbólicos permitidos transformen una expresión o ecuación en otra equivalente, mientras que los movimientos no permitidos no lo hacen. Cuando se intenta una acción ilegal (por ejemplo, orden incorrecto en la aplicación de la jerarquía de las operaciones o sumar dos monomios no semejantes) el sistema responde con retroalimentación inmediata (por ejemplo, los términos tiemblan o vuelven a la posición inicial). Al incorporar las reglas del álgebra y proporcionar retroalimentación instantánea para que los estudiantes sepan exactamente qué movimientos son matemáticamente correctos e incorrectos, GM anima a los usuarios a perder el miedo, a explorar y jugar con la estructura del álgebra en cada movimiento (figura 3).


Created by the Graspable Team — Last updated: April 13rd, 2020

GESTOS (COMANDOS, MOVIMIENTOS Y OPERACIONES) MÁS HABITUALES EN GRASPABLE MATH (GM)

Toca, arrastra o mantén pulsado los términos en GM para transformar expresiones matemáticas en otras expresiones equivalentes:

1. **Hacer clic o tocar**. Realizar una operación (por ejemplo, "+") o desarrollar un paréntesis ("(").
2. **Tocar + arrastrar**. Arrastrar los términos hasta donde desee colocarlos para activar la transformación correspondiente. GM indica lugares válidos para colocar un término con rectángulos azules.
3. **Mantener pulsado**. Aplicar una expresión introducida a través del teclado (por ejemplo, mantener presionado unos segundos el signo "=" para introducir una operación a aplicar a ambos miembros de una ecuación).

Operaciones, Propiedad Conmutativa, Factorización

Conmutar (intercambiar) términos Arrastra términos para conmutarlos	**Conmutar (intercambiar) términos negativos** En GM, un signo + o − es seleccionado con el término, por lo que puedes intercambiar términos negativos.	**Realizar operaciones (I)** Toca sobre los operadores o arrastra términos sobre los otros para sumar, restar, multiplicar, ...
Realizar operaciones (II) Toca la línea de fracción o arrastra términos sobre los otros para dividir (numerador sobre denominador o viceversa).	**Combinar signos** Toca el signo más a la izquierda para realizar "+−" y "−+".	**Orden (jerarquía) de las operaciones** Cuando toques un operador y la operación no pueda ser realizada por ser incorrecta desde el punto de vista de la jerarquía de las operaciones, GM "hace tambalear" los términos para avisarnos.
Descomponer y factorizar números Selecciona el modo "keypad" y toca un número para reemplazarlo con una expresión equivalente.	**Seleccionar múltiples términos (I)** Selecciona grupos de términos a partir de su signo, paréntesis o línea de fracción.	**Seleccionar múltiples términos (I)** Selecciona grupos de términos arrastrando hacia abajo hasta que los demás términos se vayan uniendo al seleccionado.

Versión en español: Luis M. Iglesias Albarrán
http://matematicas11235813.luismiglesias.es

Julio, 2020
1 / 3

Figura 3. Flyer: Gestos de uso más frecuente en GM (versión en español: Luis M. Iglesias)

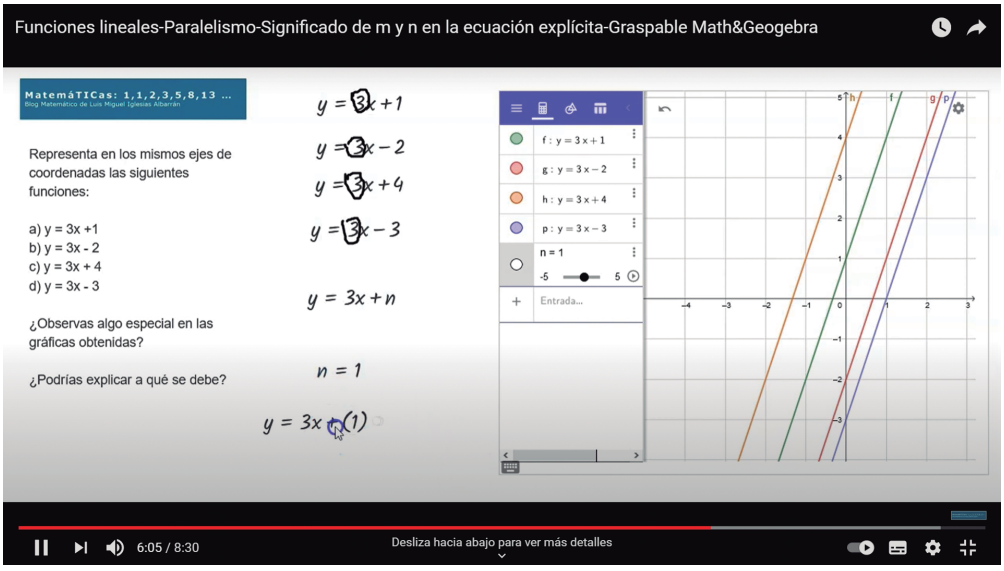


Figura 2. Funciones lineales: Paralelismo. Significado de *m* y *n* en la ecuación explícita — Graspable Math & Geogebra

Posibilidades didácticas

GM y GMA ofrecen un sinfín de posibilidades didácticas, tanto para enseñar como para aprender.

PARA ENSEÑAR

Los docentes podemos utilizar GM (Canvas) como una «pizarra matemática avanzada» de apoyo a la enseñanza (ya que permite combinar expresiones matemáticas, vídeos, textos, imágenes y tableros de aplicaciones Geogebra), para explicar en clase, presencial, sincrónica u *online*, en entornos virtuales o preparando vídeos con explicaciones detalladas paso a paso, como podemos ver en esta lista de YouTube en las que ya he incluido más de una treintena de vídeos (figura 4).

Podemos incrustar los tableros (canvas), mediante *iframe,* en Entornos Virtuales de Aprendizaje como Moodle, para que podamos trabajar directamente sobre ellos o para visualizar una tarea resuelta, sin tener que abandonar el aula virtual (figura 5).

Otra opción es compartir una captura de pantalla de un tablero mediante correo electrónico, redes sociales, usarla como parte de unos apuntes… Existe también la posibilidad de incrustar el tablero en nuestro blog (WordPress, Blogger, …) (figura 6).

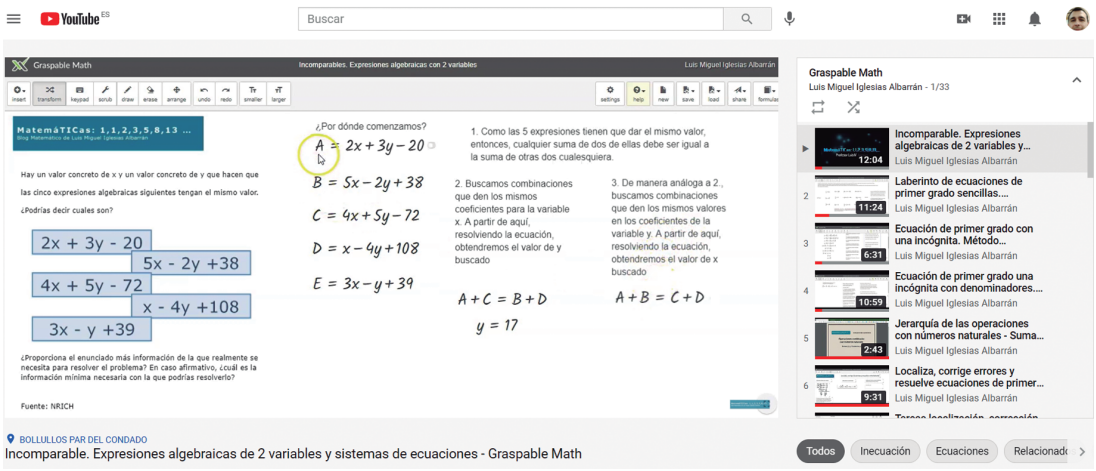


Figura 4. Lista de vídeos Graspable Math en Youtube

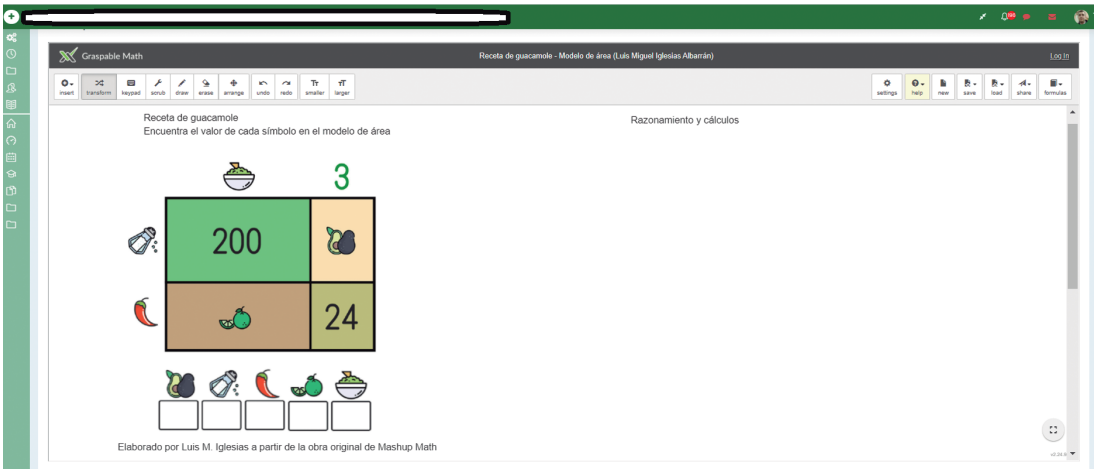


Figura 5. Actividad de GM Canvas incrustada en Aula Virtual Moodle

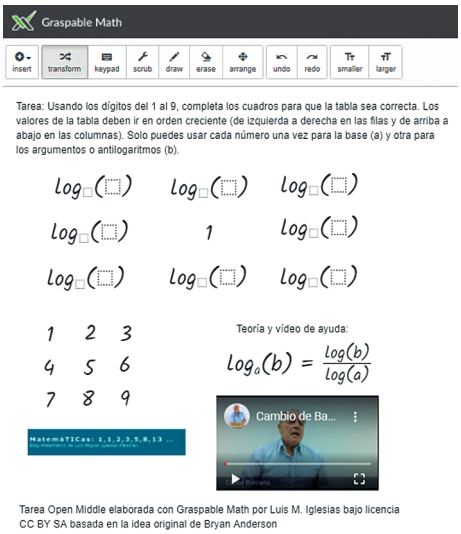


Figura 6. Tarea Open Middle sobre logaritmos, realizada con GM Canvas, incrustada en el blog de WordPress MatemáTICas: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

PARA APRENDER

En igual medida son excelentes para el aprendizaje de nuestros alumnos. Por un lado, podemos compartir las hojas de trabajo de GM Canvas. De otra parte, con GMA podemos asignar actividades a nuestros alumnos, creando sesiones y facilitándoles el código para que se unan. También tenemos la opción de crear clases en GMA, cargar la lista de alumnos de las mismas y asignar las sesiones a esta clase, en las que los alumnos tendrán un código fijo para acceder y realizar las actividades, permitiendo seguir el progreso de cada uno.

GMA es gratis para los profesores de primaria y secundaria (K-12), aunque también existen otras opciones para escuelas y distritos. Para conocer los precios de estas opciones de pago se debe contactar con Graspable Math:

< contact@graspablemath.com>.

Los alumnos no necesitan una cuenta para usar GM ni GMA, ambas son gratuitas y están basadas en un navegador web y no requieren instalación ni registro alguno. Se sugiere dejarlos experimentar con ellas, con actividades creadas o seleccionadas previamente por el profesor. También ofrece a los estudiantes la posibilidad de identificarse (iniciar sesión), con una cuenta de Google, para guardar, cargar y compartir espacios de trabajo con sus profesores u otros compañeros de la clase.

Aunque tanto GM como GMA son accesibles en cualquier tipo de dispositivo electrónico, aún se encuentran en fase de desarrollo incorporando nuevas funcionalidades y tipos de actividades, admitiendo margen de mejora al acceder desde dispositivos móviles, siendo difícil actualmente completar algunos de los tipos de tareas existentes en GMA, por lo que en este momento es recomendable el uso en tablets con mayor pantalla, portátiles u ordenadores de escritorio.

Llegados a este punto del artículo, podemos afirmar que son herramientas idóneas para enseñar y aprender en los contextos presenciales discontinuos educativos existentes, al adaptarse al:

— Modelo de enseñanza semipresencial y a distancia (de plena actualidad debido al desgraciado contexto pandémico que estamos atravesando por el COVID-19), al permitir su integración en plataformas de aprendizaje como Google Classroom, inserción en blogs, páginas webs, Sites o LMS como Moodle y compartir mediante enlace.
— Modelo de enseñanza presencial, en el aula física, mediante la proyección en pizarra digital, para mostrar ejercicios y problemas resueltos paso a paso y reflexionar sobre los mismos.

En los diferentes modelos permiten, además, proponer actividades a los estudiantes a través de GMA, pudiendo ser incluso auto evaluables, «dejando rastro» (evidencias) en cada una de las tareas. Los profesores pueden revisar el trabajo realizado y proporcionar retroalimentación sobre el trabajo efectuado por cada alumno, permitiendo una efectiva atención a la diversidad, siendo también una

excelente herramienta para la evaluación formativa (figuras 7 y 8).

Conocemos un poco más sobre la manera de sacarle partido a GM y GMA, a continuación.

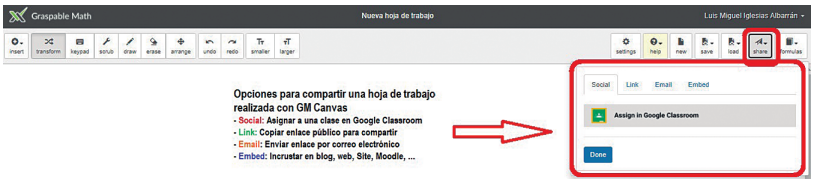


Figura 7. Graspable Math Canvas: opciones para compartir

Ejemplos e ideas prácticas para sacarle partido a Graspable Math Canvas (GM)

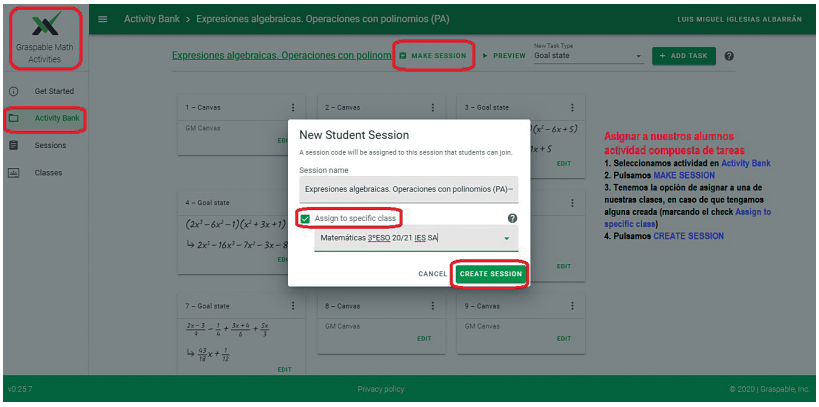


Figura 8. Graspable Math Activities: opciones para crear sesión y posibilidad de asignar a una clase

GM ofrece a los estudiantes la posibilidad de explorar, conjeturar y deducir, realizando diferentes métodos de distribución, expansión, simplificación y otras manipulaciones. Está perfectamente integrada con las aplicaciones de GeoGebra, lo que permite a los estudiantes manipular tanto las ecuaciones como sus representaciones geométricas asociadas, reforzando la conexión entre estos dos bloques de contenidos del área de Matemáticas. Mediante la opción de menú «Scrub» los estudiantes pueden rastrear una variable específica de un paso al siguiente, lo que significa que los estudiantes pueden ver dónde terminan varios elementos de la ecuación de principio a fin y reconocer (y detectar) errores desde el principio.

Graspable Math no es una simple calculadora simbólica que resuelve directamente las ecuaciones que los alumnos introducen, ofreciéndoles directamente tanto la solución como el paso a paso. Si bien es cierto que cuenta con herramientas y funcionalidades que simplifican varios pasos o convierten de un tipo de expresión o ecuación a otro (por ejemplo, en el caso de la ecuación de segundo grado o las igualdades notables), los alumnos no pueden simplemente escribir una ecuación en GM y obtener la respuesta, sino que deben trabajar y aplicar las transformaciones matemáticas permitidas para lograr resolverla.

GM permite aplicar transformaciones a ambos miembros de una ecuación, pasar elementos entre ambos, combinar, simplificar o expandir expresiones, hasta encontrar la/s solución/es de la misma paso a paso. GM «tiembla» cuando intentamos realizar operaciones matemáticas no permitidas, lo que permite a los alumnos ir interiorizando las estructuras matemáticas a medida que van trabajando con la herramienta. Es bastante intuitiva de manejar, requiere una corta curva de aprendizaje, al contar una interfaz limpia y simple (figuras 9 y 10).

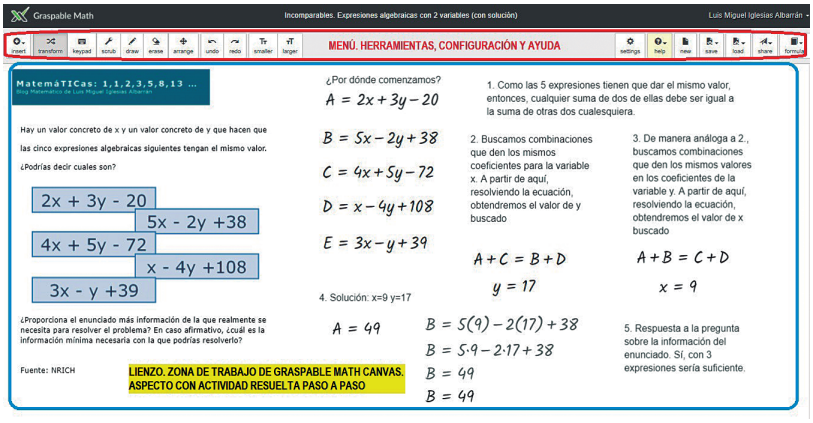


Figura 9. Aspecto de GM Canvas con actividad resuelta

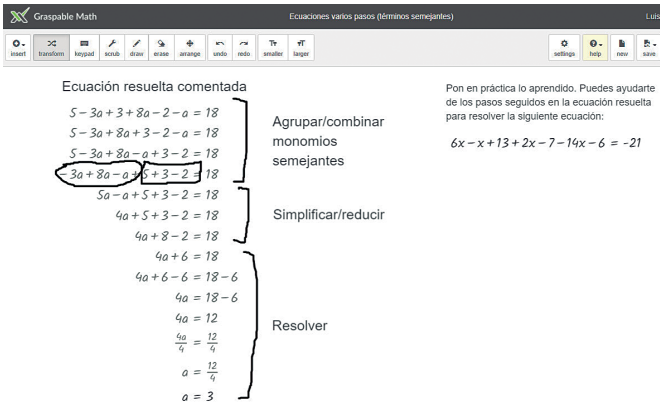


Figura 10. Resolución en GM Canvas de una ecuación primer grado en varios pasos

Ejemplos e ideas prácticas para sacarle partido a Graspable Math Activities (GMA)

En la aplicación web GMA podemos asignar a nuestros alumnos actividades digitales interactivas para practicar donde recibirán retroalimentación instantánea. Las actividades se basan en una tecnología de notación de álgebra dinámica que promueve la fluidez en los procedimientos al tiempo que permite a nuestros alumnos centrarse en la estrategia y la conexión entre conceptos y procedimientos. Son actividades que promueven el «aprender haciendo».

Una actividad en GMA se compone de n tareas. A continuación se detallan los tipos de tareas existentes.

TIPOS DE TAREAS PARA LAS ACTIVIDADES GMA

A día de hoy, los tipos de tareas disponibles en GMA son (figura 11):

— *Goal State.* En este tipo de tareas los estudiantes deben transformar una expresión dada inicialmente en otra expresión equivalente fijada como objetivo final, desarrollando fluidez y comprensión conceptual en torno a la equivalencia.
— *Canvas.* Este tipo de tareas está formado por un lienzo digital (tablero), a modo de pizarra, en el que los estudiantes pueden dibujar, agregar texto y trabajar con expresiones algebraicas. El profesor puede configurar cualquier contenido, para que se muestre al abrirse, escribiéndolo directamente o importándolo de sus archivos guardados en Graspable Math Canvas (GM).
— *Hotspot.* Los estudiantes mueven uno o varios marcadores (círculos) para localizar/señalar un error en una imagen (por ejemplo, un paso erróneo en la resolución de una ecuación). Los estudiantes pueden trabajar con el ejemplo en un espacio de trabajo de GM, integrado en la página de la propia tarea, y explicar su razonamiento en un cuadro de texto.
— *Multimedia.* Se trata de una página que puede contener texto, imágenes y videos que puede usarse para dar instrucciones o presentar información de interés para los estudiantes.
— *Line It Up.* A los estudiantes se les presenta la gráfica de una función. Deben elegir la familia de funciones a la que pertenece y ajustar los parámetros (coeficientes) para que coincida con la ecuación de la función representada.
— *Multiple Choice.* Tarea con pregunta de opción múltiple, ideal para la evaluación formativa; puede usar texto, imágenes, expresiones matemáticas y vídeos en las opciones.

Por ejemplo, la actividad destacada pública *Ecuaciones de primer grado sencillas - 2 pasos - división (PA)*

<https://activities.graspablemath.com/teacher/activity-bank/featured/5f19ee721aac8d001192f83f>

contiene las siguientes tareas: 3 Multimedia, 15 Goal State, 2 Hotspot, 2 Canvas y 3 Multiple Choice.

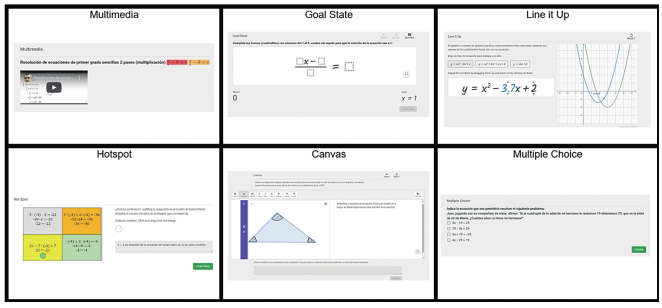


Figura 11. Imagen de tipos de tareas existentes en GMA

Recomendación sobre el uso de GMA

Antes de continuar, me gustaría destacar el hecho de que no es necesario crear nuestras propias actividades *para poder comenzar* a usar GMA. Basta con acceder al amplio banco de actividades, seleccionar la actividad que nos interese y crear una sesión (figura 12).

En una fase posterior, una vez familiarizados con la herramienta, si nos gusta una actividad pública concreta del banco de tareas, tras acceder a ella podemos pulsar en *Copy Activity* (parte inferior de la página), llevarnos una copia a nuestra cuenta y modificarla (traduciendo, añadiendo, suprimiendo o actualizando) a nuestro gusto y necesidad.

Como última opción, si nos gusta y poseemos suficiente dominio de GMA, podemos plantearnos la posibilidad de *crear nuestras propias actividades e incluso hacerlas públicas* para que otros docentes y estudiantes puedan sacarle partido en el aula (figuras de la 13 a la 19).

Además de las actividades públicas compartidas libremente por los usuarios de GMA (*EXPLORE*), el *GMA Content Development Team*, compuesto por especialistas en educación matemática de EE.UU., Canadá y España, ha elaborado una amplia biblioteca de actividades (*FEATURED ACTIVITIES*) sobre distintos contenidos, organizadas por estándares, para ayudar a los profesores a integrar GMA en sus prácticas de aula. Tengo la fortuna de ser miembro de este equipo y ser autor de algunas de ellas, las cuales han sido publicadas en español. Te animo a usarlas con tus alumnos, a remezclarlas, crear y compartir tus propias actividades (figura 20).

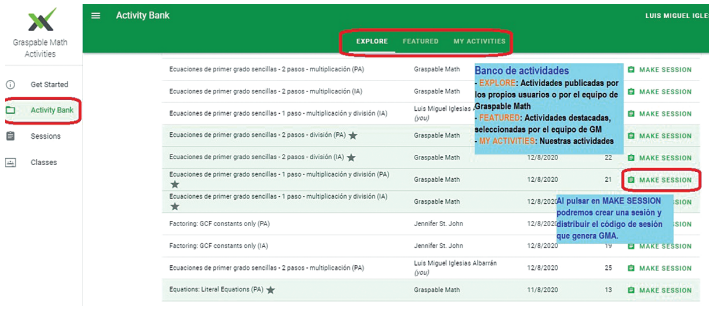


Figura 12. Banco de actividades GMA

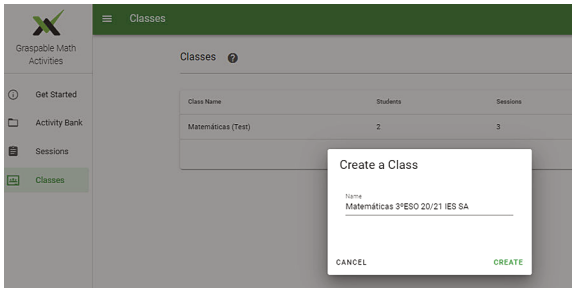


Figura 13. Creación de una clase en GMA

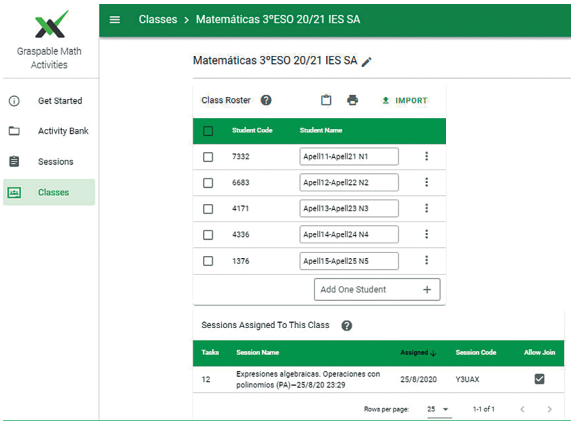


Figura 14. Detalle de clase en GMA. Alumnos y sesiones

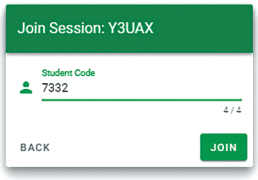


Figura 15. Estudiante accediendo a una sesión en GMA

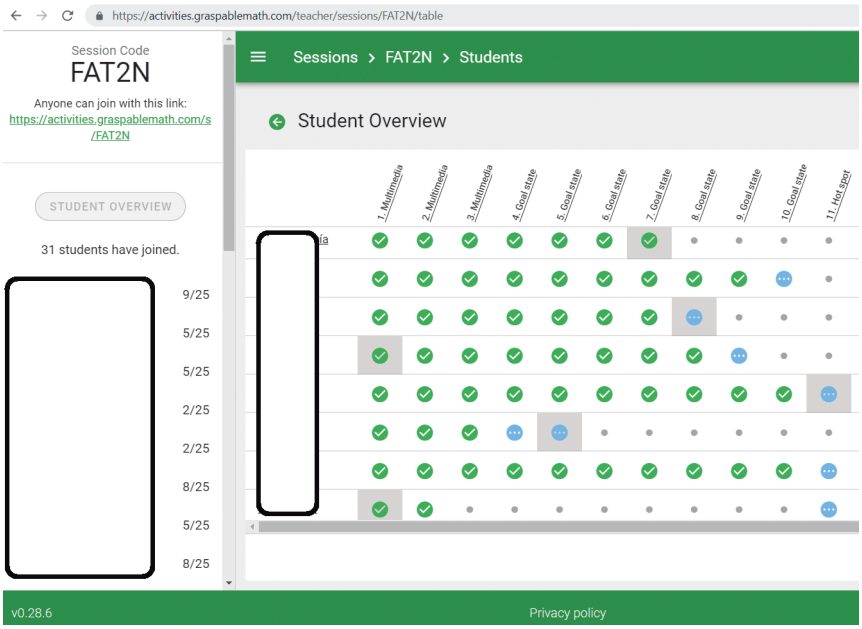


Figura 16. Vista del profesor de una sesión en GMA. Revisión trabajo alumno

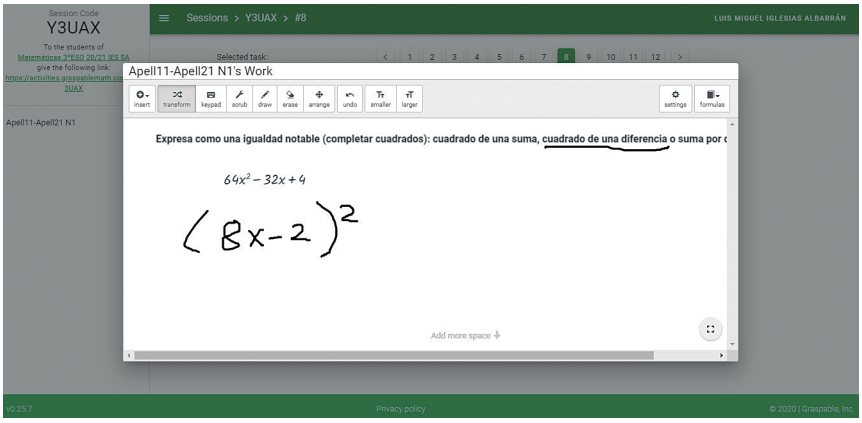


Figura 17. Vista del profesor de una actividad GMA. Trabajo del alumno

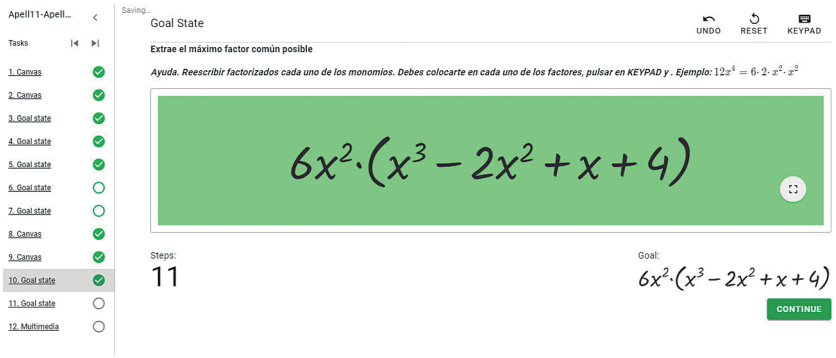


Figura 18. Vista del alumno de una actividad *Goal state* en GMA

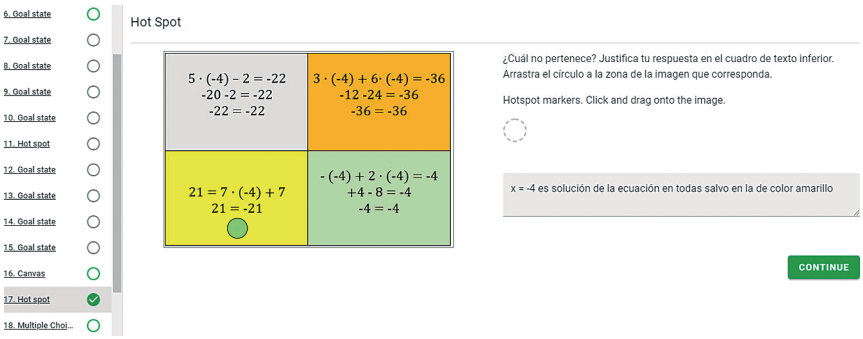


Figura 19. Vista del alumno de una actividad *Hot spot* GMA

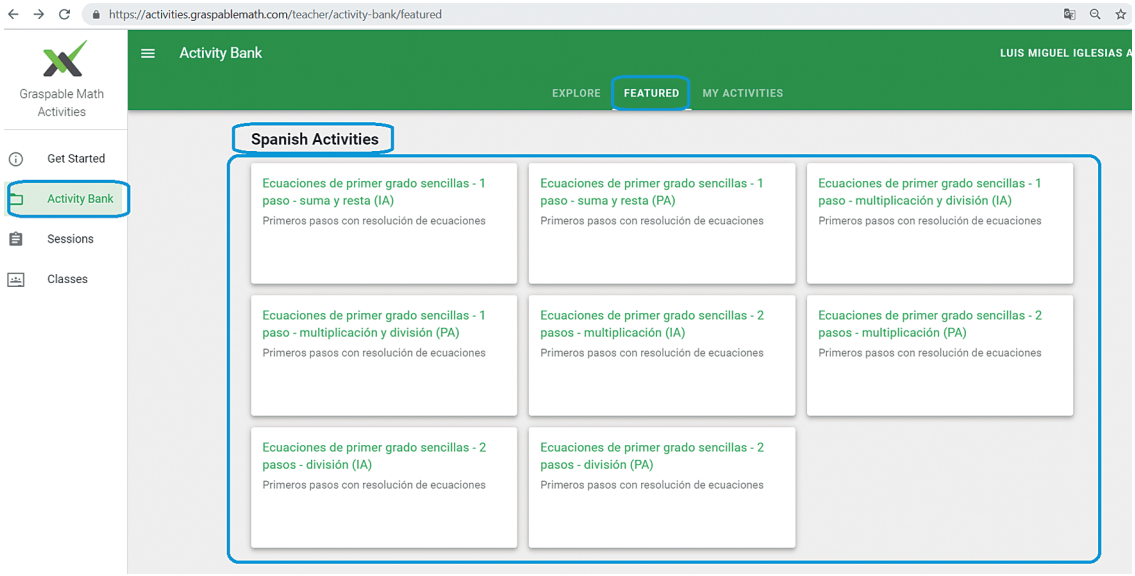


Figura 20. Banco de actividades GMA. Actividades en español

Estrategias metodológicas

A lo largo del artículo hemos visto el abanico de posibilidades didácticas y metodológicas que se nos presenta como docentes a la hora de usar esta innovadora herramienta y la aplicación web basada en ella, GMA. Desde el punto de vista metodológico:

— Se puede crear una clase con varios grupos y asignar actividades a cada uno de ellos, fomentando el trabajo colaborativo.
— Es ideal para escenarios de enseñanza a distancia, tan necesarios en estos momentos, adaptándose de manera excelente a la metodología Flipped Classroom al poder integrar vídeos instruccionales de contenidos teóricos o de ayuda junto a las tareas.
— Es de gran valor para la evaluación formativa; el estudiante recibe retroalimentación de manera instantánea y el profesor puede revisar el trabajo de cada uno de los alumnos.
— Se puede usar para plantear partes del trabajo por proyectos, usando hojas de trabajo en GM Canvas los distintos equipos.
— Facilita el aprendizaje por indagación (IBL). Al ayudar el diseño de la herramienta a salvar el obstáculo de la notación formal, permite a los

alumnos centrarse en cómo funcionan las matemáticas, brindando a nuestros aprendices oportunidades para razonar y deducir de manera flexible sobre las tareas matemáticas, pudiendo realizar sus propias deducciones, desencadenando episodios de aprendizaje significativo por descubrimiento.

— La herramienta provee espacios, en los distintos tipos de tareas existentes en GMA, para poder incorporar preguntas reflexivas. Este hecho permite a los profesores profundizar en el pensamiento de los estudiantes, al trabajar las habilidades metacognitivas, y promover, además de las competencias STEM y digital, la adquisición de las competencias lingüística y aprender a aprender. Esta información, junto con la revisión del trabajo realizado por cada alumno a través del panel de control del docente, permite desarrollar una efectiva atención a la diversidad, se pueden asignar actividades concretas y específicas a los estudiantes en función de sus logros.

Corolario

Como docente a pie de aula, investigador de la didáctica matemática y creador de contenidos educativos digitales considero que, Graspable Math (Canvas y Activities), junto a Geogebra y Desmos principalmente, forman parte de una nueva generación de herramientas que aportan un gran valor añadido y enriquecen sobremanera las clases de matemáticas y los aprendizajes de los alumnos. Soy usuario de las 3 y forman parte de mi «caja de herramientas». Sin duda alguna, estas herramientas digitales innovadoras han abierto un nuevo tiempo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Con Graspable Math se nos presenta una nueva manera de explorar, enseñar y de hacer matemáticas, especialmente álgebra. La excelente integración con GeoGebra facilita sobremanera el trabajo en la profundización de los contenidos curriculares y las conexiones matemáticas entre los distintos bloques de contenidos. En el último año he trabajado ampliamente con la herramienta, elaborado más de una treintena de vídeos y otros tantos contenidos, y aún no he podido plasmar en actividades ni la mitad de las ideas que tengo en mente.

Si bien admiten margen de mejora, tanto GM como GMA, especialmente en lo relativo a la experiencia del usuario con dispositivos móviles, y en la incorporación de nuevas funcionalidades y tareas, hecho que me consta en el que se está trabajando intensamente, creo deben formar parte de la «caja de herramientas» digitales para todos los docentes de matemáticas desde este curso 2020-2021 en adelante.

Tras haber usado la herramienta durante el curso pasado con mis estudiantes de secundaria y como miembro del *GMA Content Development Team* te animo a probarla, a trabajar con tus alumnos las actividades publicadas, a remezclarlas, crear y compartir las tuyas.

Puedes crear una lista de clases, ir asignándoles tareas y realizar un seguimiento del trabajo y el progreso de tus estudiantes a lo largo de todo el curso académico en GMA.

Espero que el artículo te resulte de utilidad y ayuda en tu trabajo diario y puedas sacarle mucho partido.

Referencias bibliográficas

IGLESIAS, L. M. (2012), «Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la era digital. Ambientes de aprendizaje mediados por TIC», *SCOPEO. e-MatemáTICas. Scopeo Monográfico,* n.º 4, 41-80. Disponible en: <http://scopeo.usal.es/wp-content/uploads/2013/04/scopeom004.pdf>.

REFERENCIAS WEB

Graspable Math
<https://graspablemath.com>.
Graspable Math Canvas
<https://graspablemath.com/canvas>.
Graspable Math Activities
<https://activities.graspablemath.com>.

Tutoriales oficiales Graspable Math
<https://graspablemath.com/learn>.
Aprendizaje gamificado de la herramienta FH2H
<https://graspablemath.com/projects/fh2t>
Aprendizaje gamificado de la herramienta FH2H Elementary
<https://graspablemath.com/projects/fh2t-elementary>.
Banco de actividades GMA
<https://activities.graspablemath.com/teacher/activity-bank/featured>.
Canal Youtube Graspable Math
<https://www.youtube.com/channel/UCgj6gNKkDgAMUtTcY70OJ2Q>
Lista de vídeos Youtube Graspable Math Prof. Luis M. Iglesias
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLD87Aneh2AhyKQpRMIUB9NDi5WSh57bOu>.
Hoja resumen con los Gestos (Comandos, Movimientos y Operaciones) de uso más frecuente en Graspable Math (GM) [editable y pdf] (inglés y español)
<http://matematicas11235813.luismiglesias.es/software-matematico/graspable-math/>
Barra lateral Graspable Math para Google Chrome
<https://chrome.google.com/webstore/detail/graspable-math-sidebar/akhomcac-ccpndpgckgpkmcijkimphhm>.
Propuestas didácticas con Graspable Math
<http://matematicas11235813.luismiglesias.es/category/software-matematico-2/graspable-math>.

Luis Miguel Iglesias Albarrán
IES San Antonio, Bollullos Par del Condado (Huelva)
<luismiglesias@gmail.com>

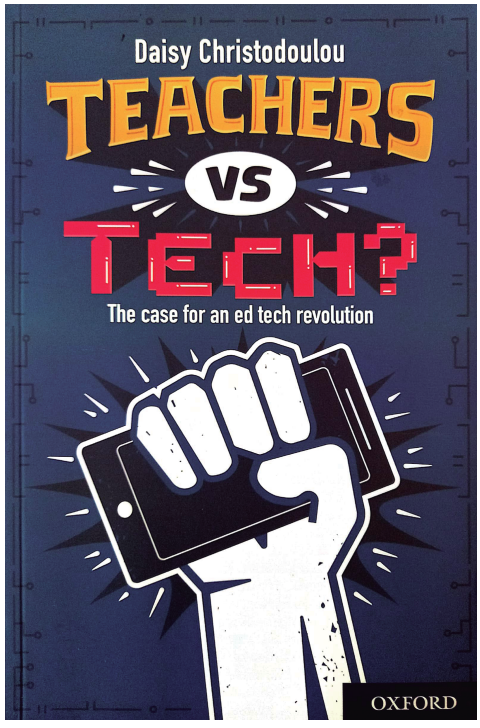
VERSIÓN INGLESA

¿Revolución tecnológica?

Maite Aranés Maza

SUMA+ núm. 96
pp. 111-116
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2020 y aceptado en enero de 2021

En esta ocasión he vuelto a caer en la tentación de reseñar un libro no dedicado específicamente a la enseñanza de las matemáticas. Debido a la situación que hemos vivido en los últimos meses, el uso de la tecnología en la educación es aún más candente de lo habitual. ¿Estamos a las puertas de una revolución tecnológica en el sector educativo? En julio del año pasado descubrí que Daisy Christodoulou acababa de publicar «Teachers vs Tech» explorando este tipo de cuestión. Puesto que su trabajo se menciona en algunos de los libros que he reseñado para *Suma,* y siendo una cuestión de interés general lo de la tecnología, me ha parecido justo compartir con vosotros qué nos cuenta Christodoulou.



Oxford University Press, 232 páginas (2020)

Daisy Christodoulou es una autora británica, que tras ejercer durante varios años como profesora de lengua (inglesa), comenzó su labor de divulgación en el mundo de la educación. Hasta la fecha ha publicado tres libros, *Seven Myths about Education* (2013), *Making*

good progress? (2017), y el texto que os voy a comentar aquí. Actualmente está involucrada en la compañía No more marking (ofrecen soluciones para evaluar y calificar textos escritos por alumnos de primaria y secundaria).

Teachers vs Teach es un libro bastante breve, de unas 200 páginas. En él Christodoulou explora ideas muy generales sobre el papel que puede tener la tecnología en una posible «revolución» de la educación. Con la excepción del capítulo 7, cuyos contenidos son más relevantes para el profesorado de lengua y humanidades, el libro está dirigido al profesorado en general, o a cualquiera involucrado en el mundo de la educación. En conjunto, los puntos expuestos por Christodoulou saben a poco; me quedo con la sensación de que se podría decir mucho más y ser más específico, aunque quizá ha intentado evitar un texto excesivamente largo. Ciertamente plantea preguntas interesantes, pero de esas que no tienen respuestas concretas o satisfactorias. Por otra parte, desde la misma introducción del libro está claro que Christodoulou aprovecha todas las ocasiones posibles para convencernos de las tesis que comenzó a defender en *Seven Myths about Education*.

El libro comienza con un prefacio de Paul Kirschner, breve y en el que no encuentro nada particularmente interesante, la verdad. A continuación, Christodoulou en su introducción nos habla brevemente del fracaso de la revolución tecnológica en el mundo de la educación: hace años que oímos hablar de los cambios radicales que la tecnología va a producir en el ámbito de la enseñanza, pero no acaban de materializarse. Nos promete que en el resto del libro va a profundizar en las razones de este fracaso, y plantea dos preguntas, «¿Es necesario un cambio en la educación?» y «¿Qué es lo que nos va a permitir mejorar la educación?». Las respuestas que nos esperamos son «sí» y «la tecnología», respectivamente. Sin embargo Christodoulou nos dice que no es posible contestar satisfactoriamente a estas cuestiones. En realidad no entendemos muy bien los factores que contribuyen a la mejora de un sistema educativo, ni qué constituye una «buena» educación. Según ella, esto no se puede averiguar simplemente fijándose en las características de sistemas o centros educativos de éxito reconocido. En particular, si queremos utilizar medios tecnológicos para mejorar la calidad de la enseñanza, es preciso previamente tener claro cómo aprendemos, y qué factores influyen en el aprendizaje.

> Similarly, with education, we need to think about cause and effect in a deeper way. Instead of just looking at the features of successful schools and school systems, we need to ask more fundamental questions: *how do humans learn?* and *what causes learning to happen?*
> Once we have some answers to those questions, then we can start thinking about *how* technology can help us achieve our educational goals.

Ahí se resume en cierto modo la esencia del libro. A lo largo del texto Christodoulou realiza una crítica de diversas aplicaciones de la tecnología a la educación, algunas positivas y otras decididamente negativas. En estas últimas intenta en casi todos los casos indicar cómo podríamos redirigir nuestros esfuerzos. Naturalmente, hacer una revisión exhaustiva de plataformas e iniciativas es completamente inviable, y Christodoulou ha escogido ser breve, y concentrarse en unas pocas. En su elección ha incluido a los gigantes de la tecnología (Google, Microsoft y Apple) puesto que siente inquietud ante la influencia que estas compañías pueden tener en el futuro de la educación.

En realidad no entendemos muy bien los factores que contribuyen a la mejora de un sistema educativo, ni qué constituye una «buena» educación.

El libro se reparte en 7 capítulos, más la introducción y una breve conclusión. El capítulo 1 es un resumen de ideas sobre procesos de aprendizaje, los capítulos del 2 al 5 los dedica a la crítica de algunas estrategias

tecnológicas en boga, y en el 6 y el 7 comenta algunas soluciones.

Así pues, a pesar de que no tiene nada que ver con tecnología, el primer capítulo, «The Science of Learning», es esencial para entender el punto de partida de la autora. Las ideas principales me resultan familiares (y a los que hayáis leído alguna de mis reseñas anteriores también): las limitaciones de la «memoria de trabajo», el papel de la memoria a largo plazo en nuestros procesos de pensamiento, la diferencia entre experto y novicio, etc. La discusión de todo el asunto es breve y algo apresurada; mi impresión es que este tema ya lleva unos años circulando por el Reino Unido y Christodoulou no quiere gastar mucha tinta en ello. El único punto donde insiste más es en la problemática de averiguar cómo convertirse en experto: simplemente observando cómo trabaja el experto es prácticamente imposible obtener información sobre el camino que ha recorrido para llegar hasta ahí.

> However, while it might be easy to recognize expertise, it's often harder to work out what causes it, and tempting to attribute it to superficial features. For example, we know that expert readers make fewer eye movements than beginner readers. So should we tell pupils who are learning to read to make fewer eye movements? No, because that might not be how expert readers learned to read. Often, the way that you learn a skill is different from the way that you eventually use a skill.

Así pues la cuestión en educación es cómo conseguir que los alumnos construyan una memoria a largo plazo, y se conviertan en expertos. En este punto Christodoulou no se anda con vaguedades y nos dice claramente que la «instrucción directa» (direct instruction) es el método más adecuado para alcanzar este objetivo. A pesar de esta respuesta algo radical y no muy razonada en la introducción, en los capítulos 3 y 4 desarrolla y explica su posición de forma más satisfactoria.

En «How can we use technology to personalize learning?» (capítulo 2) por fin entramos en materia tecnológica. Aquí Christodoulou discute tres posibles interpretaciones de la idea de «aprendizaje personalizado»: adaptarse al estilo de aprendizaje del alumno, el alumno como gestor de su propio aprendizaje, y el llamado aprendizaje adaptativo (*adaptive learning*).

Las dos primeras interpretaciones de personalización son una parte central de la filosofía de la plataforma *Summit Learning* (figura 1), utilizada por numerosos centros escolares en Estados Unidos. Creo que por esta razón Christodoulou invierte bastante energía en explicarnos por qué no son estrategias efectivas.

Con respecto a los estilos de aprendizaje, Christodoulou nos advierte que, aparte de que «no existen», permitir que un alumno se limite a utilizar recursos que siguen su «estilo» va a limitar su educación y puede tener consecuencias negativas a medio y largo plazo.

> The risk is that students who struggle with reading, but like watching films, will be actively encouraged to avoid reading and to focus on watching films instead. Students who enjoy reading will be encouraged to focus on written explanations solely, even though plenty of mathematics and geography problems are clearer when represented as an image or a diagram. Important skills and content that are particularly suited to one modality will become harder to learn for students who don't prefer that modality.

La estrategia más adecuada sería asegurarse de que el alumno recibe instrucción combinando los estilos



Figura 1. En el blog de *Summit Learning* nos cuentan qué entienden ellos por aprendizaje personalizado en su plataforma

más adecuados, y teniendo en cuenta la teoría de Richard Mayer sobre aprendizaje multimedia. De hecho, buena parte del capítulo 3, donde retoma esta cuestión, está dedicado a la teoría de Mayer, y al papel fundamental que tiene la tecnología para poder aplicarla de forma efectiva.

Con respecto al alumno como gestor de su aprendizaje, Christodoulou nos recuerda el efecto de Dunning-Krugger: mientras estás aprendiendo algo, te va a resultar imposible evaluar tu propia competencia. Con esto llegamos a su tercera noción de aprendizaje personalizado: el «aprendizaje adaptativo». Aquí el veredicto de Christodoulou es positivo. Estos sistemas de aprendizaje adaptativo intentan reproducir las acciones de un profesor con tiempo y atención ilimitados. Es decir, adaptan el contenido que se va a presentar al alumno según sus respuestas a preguntas anteriores.

El capítulo 3, «Why can't we just look it up?», es bastante crítico con algunas iniciativas de Google. Christodoulou rebate la idea de que si queremos aprender algo, basta con hacer una búsqueda de Google. Para saber qué es lo que necesitamos buscar, interpretar la información encontrada y evaluar la fiabilidad de una fuente es preciso contar con un conocimiento de base. Esta discusión sobre la importancia del conocimiento (supongo que nosotros diríamos contenidos) continúa en el capítulo 4, donde Christodoulou critica duramente a Microsoft y Apple por sus estrategias de aprendizaje basado en proyectos. El gran problema que ve Christodoulou es que la mayoría de las actividades que proponen fácilmente pueden terminar como ocasiones para aprender a utilizar el software de estas compañías más que otra cosa.

> If the sole claim were that these projects will help students get better at using iMovie and Minecraft, that would be fine. But the claim is that these lessons will help students learn mathematics, English, history and coding too. And, while learning how to use consumer software can be useful, it is clearly not all that we should teach.

En este punto aprovecha para otra vez dejar la tecnología y hablarnos de la dicotomía entre la educación tradicional de reglas y definiciones y la educación basada en enseñanza poco guiada. Según Christodoulou ninguno de los dos modelos es efectivo, y la idea de buscar un equilibrio entre ambos, haciendo un poco de uno y un poco del otro, no es solución. Tampoco tiene sentido separar contenido y competencias. Su respuesta es que debemos co-



Figura 2. Pantalla de progreso del programa Cerego, ejemplo de plataforma de aprendizaje adaptativo y banco de memoria

menzar clarificando qué competencias o habilidades más complejas queremos que alcancen nuestros alumnos, y a partir de ahí determinar qué pasos van a permitir llevarles hasta dicho objetivo. Nos recuerda también que esos pasos intermedios no tienen porqué parecerse al objetivo final.

> A better metaphor might therefore be knowledge as a pathway to skill. The pathway is not necessarily linear or straightforward: in order to learn, we need multiple representations of a concept, spaced over time. But the pathway metaphor helps us to see that it makes no senses to use phrases like 'a balance of knowledge and skill'.

Esta parte del libro culmina en el capítulo 5, donde Christodoulou nos habla del uso de dispositivos (móviles, tablets, portátiles, etc.). El problema es que distraen, algunos más que otros, precisamente porque están diseñados para distraer. No tenemos ninguna estrategia válida para contrarrestar este problema de forma efectiva, ni siquiera a nivel de un adulto. Por lo tanto, la autora nos recomienda precaución en su uso en el aula.

Con todo esto os preguntaréis dónde está la revolución tecnológica que propone Christodoulou, que lleva 5 capítulos hablando de todo lo que no funciona, y de teorías de aprendizaje. Por fin en el Capítulo 6 («The expertise of teaching: can technology help?») nos lo cuenta, uniendo muchos de los hilos que ha ido dejando en los capítulos anteriores: plataformas de aprendizaje adaptativo, herramientas de diagnóstico para analizar el aprendizaje de los alumnos y contenido diseñado según la teoría multimedia de Mayer.

Christodoulou no aboga por un futuro en el que la tecnología sustituya a los docentes, sino que propone que la tecnología facilite el aprovechamiento de la experiencia del buen profesor. En su revolución, superficialmente no veríamos cambios muy radicales, la diferencia estaría, por así decir, detrás del telón. Ella querría una plataforma digital con el contenido del currículo al que se pudiera enlazar fácilmente, un motor de aprendizaje adaptativo, capacidad para evaluar datos sobre el progreso del alumnado, y herramientas para que los profesores puedan añadir contenido de calidad. Sin embargo, la misma Christodoulou ve improbable que su visión se materialice, ya que requiere cambios a nivel institucional además de tecnología más sofisticada que la disponible actualmente.

> However, the challenge with trying to integrate teachers and technology in this way is that, as well as needing sophisticated technological tools, it also requires significant institutional and behavioural changes, which are not easy to bring about. This approach would probably require collaboration between schools, technology companies, traditional publishers and teacher training colleges, which all have different cultures and traditions.

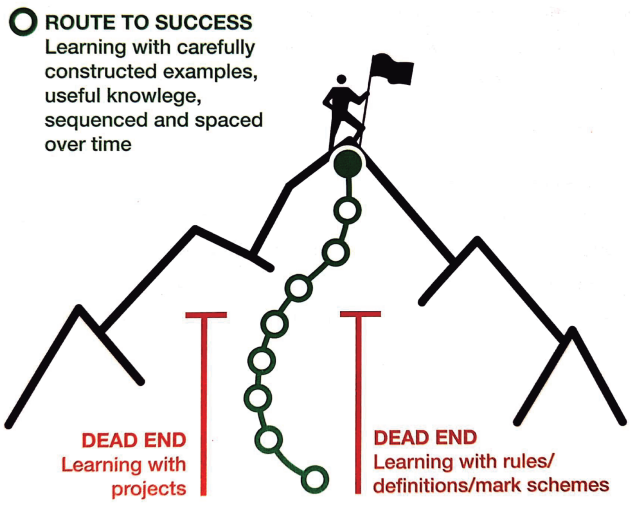


Figura 3. Contenido como un camino hacia la competencia, según D. Christodoulou

En el último capítulo explora la idea de juicio comparativo (*comparative judgement*), que con ayuda tecnológica puede mejorar la evaluación de textos escritos por alumnos. Una iniciativa que Christodoulou apoya y se ha puesto en marcha en No more marking, la compañía con la que colabora actualmente.

En conclusión, el libro de Christodoulou no es tanto sobre tecnología como sobre educación en general,

con lo cual no cumple las expectativas que tenía cuando comencé su lectura. Su mensaje, que reitera en la conclusión, viene a ser que lo importante no es la tecnología en sí, sino como vamos a usarla. Es un buen mensaje, pero resulta algo decepcionante en el sentido de que no nos resuelve gran cosa. Algo parecido me pasa con su revolución tecnológica: en algunos puntos me convence, pero ni la misma autora ve posible que se pueda llevar a cabo de forma efectiva en el panorama actual. Así que aunque admiro a Christodoulou por su crítica sin pelos en la lengua de las grandes compañías tecnológicas, y por su valentía en explorar hasta el final adónde le llevan sus ideas sobre educación y tecnología, no puedo negar que la lectura de *Teachers vs Tech* me ha resultado un poco frustrante.

Christodoulou no aboga por un futuro en el que la tecnología sustituya a los docentes, sino que propone que la tecnología facilite el aprovechamiento de la experiencia del buen profesor.

Maite Aranés Maza
IES Mar de Aragón, Caspe (Zaragoza)
<maite.aranes@gmail.com>

Alhambra, belleza abstracta y Matemáticas que suman

Serapio García Cuesta
Fernando Etayo Gordejuela

SUMA núm. 96
pp. 117-120
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2020 y aceptado en enero de 2021

Alhambra. Belleza abstracta

Siempre es un honor y un placer que el autor de un libro te pida escribir una presentación del mismo. Pero también es una responsabilidad el hacerlo porque el trabajo de Rafael Pérez Gómez no necesita presentación, se presenta por sí solo y no hay nada más que leerlo para darse cuenta de ello. Yo, desde luego, me siento muy orgulloso de poder presentar libros como este que además de su calidad representan una fuente de inspiración de actividades para las clases de matemáticas.

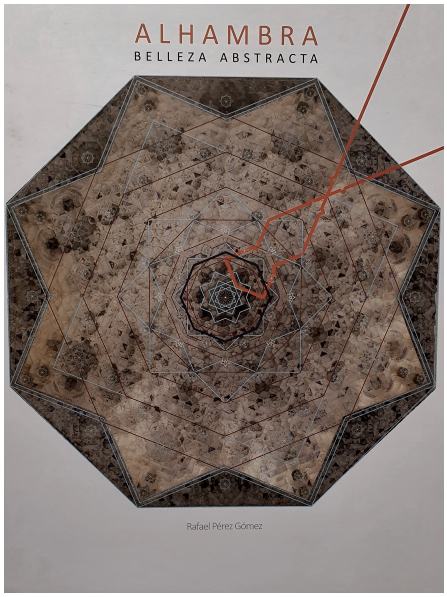
El autor, nuestro querido compañero y amigo Rafael Pérez Gómez, profesor titular de la Universidad de Granada en el área de Matemática Aplicada y que el año pasado recibió el Premio de Excelencia Docente por parte de dicha Universidad (imparte la asignatura Matemática aplicada a la arquitectura y al urbanismo), es de sobra conocido en el ámbito de la FESPM y de todas las sociedades que la componen, ha desarrollado múltiples actividades dentro y fuera del aula, ha escrito numerosos libros y artículos, ha impartido conferencias en torno a la didáctica y a la divulgación de unas matemáticas que intenta mostrar útiles, amables y atractivas, al mismo tiempo que, como Rafael dice, nos dotan de unas gafas especiales que permiten analizar la realidad que nos rodea de una forma enriquecedora. Aunque lo que mejor define su trabajo e interés profesional es el esfuerzo diario intentando que los alumnos descubran que las matemáticas pueden ser útiles, interesantes y fuente de satisfacciones.

Estoy seguro de que este libro sobre la Alhambra hará pasar buenos momentos a todos aquellos que lean detenidamente sus páginas. En él, el autor nos muestra su amor por la Alhambra y su interés por la búsqueda de la belleza que encierra, mostrándola en toda su plenitud matemática y enseñándonos hasta los rin-

cones más recónditos de la Alhambra, que normalmente no se recorren en las visitas habituales.

Dice el autor: «Siempre quise escribir este libro y nunca me sentí suficientemente conocedor de cuanto debía tratar en él. A lo largo de los años he ido incorporando conocimientos y desarrollando ideas, tanto sobre las formas geométricas que caracterizan la arquitectura nazarí como de sus funciones y significados. Poco a poco, fui dando a conocer en diversas publicaciones, cursos y múltiples conferencias los resultados que obtenía en mi investigación sobre la Alhambra y Generalife.

Dado que han sido muchas las personas que han paseado matemáticamente por la Alhambra, o dibujado euclídeamente sus mosaicos, siguiendo las ideas que en mis actividades antes dichas he ido dejando, debo agradecerles que lo hayan hecho ya que han influido considerablemente en mí para que dé el paso definitivo de escribir este libro que reúne todas mis investigaciones».



ALHAMBRA BELLEZA ABSTRACTA
Rafael Pérez Gómez
Ed. Patronato de la Alhambra y Generalife
Granada, 2019
408 páginas
ISBN: 978-84-17518-07-3

Su principal objetivo es, pues, compartir sus conocimientos con quienes también amen la Alhambra. Rafael ha plasmado en el libro todas las investigaciones que ha realizado sobre el conjunto monumental nazarí a lo largo de muchos años. Desde los ya muy conocidos grupos cristalográficos planos hasta aspectos más novedosos relacionados con la estética de la arquitectura alhambreña, los lazos y nudos que forman parte de su decoración geométrica o epigráfica, con la geometría de sus *qubbas*, los números en la Alhambra, el efecto del color en su geometría, la interpretación de las plantas de sus jardines desde la sucesión de Fibonacci o, para no extenderme más, con los conocimientos científicos (sobre matemáticas, astronomía, física, etc.) necesarios para aquellos arquitectos que proyectaron esta maravillosa y singular arquitectura.

La geometría en la Alhambra siempre fue algo más que simetría o traslación, en muchos de estos estudios matemáticos faltaba un aspecto en el que profundizar: la forma en que fueron trazados y dibujados algunos de los elementos que decoran sus estancias y que en muchos casos son una herramienta fundamental para conocer la complejidad geométrica de los alicatados y yeserías de la Alhambra. El trazado paso a paso de alicatados y yeserías ayudará a comprender mejor el trabajo del artesano y su relación con el diseñador de las distintas composiciones que, con el paso del tiempo, llegaron a alcanzar un grado de complejidad y diversidad admirable. Esto le sirve al autor para descubrirnos una nueva y original visión de cómo se pudieron realizar los trazados que conforman los alicatados y yeserías de la Alhambra. Mediante símbolos con significado universal, que se muestran formando parte de bellísimos patrones creados a través de la incansable aplicación de la simetría hasta agotar los 17 grupos cristalográficos planos (recordemos que hay que atribuir el descubrimiento en la Alhambra del grupo p3m1 precisamente al autor).

Todas las posibilidades compositivas estructurales en el plano, que hoy se interpretan desde la Teoría de Grupos, repiten a modo de mantra el mensaje de la unidad entre la multiplicidad que está materializado

en los mosaicos periódicos planos que decoran las superficies de los palacios nazaríes, único monumento en el mundo que atesora esta singularidad.

En un ejercicio creativo sin igual, arquitectos, geómetras, ingenieros, tracistas, poetas y artesanos, supieron recrear la belleza del mundo para acercar a él la belleza de Dios, a quien no se puede asemejar con forma alguna. Así, aquellos andalusíes crearon las formas insólitas que en este libro se muestran y son la base de la belleza abstracta y matemática de la Alhambra de Granada.

Resulta evidente que Rafael es un especialista en elegir contextos donde la actividad matemática sea relevante, estableciendo situaciones adecuadas y mostrando las conexiones entre las distintas partes de las matemáticas, y entre ellas y el mundo que nos rodea, sin olvidar la importancia de las matemáticas como parte de la cultura y como lenguaje. Las matemáticas se convierten así en un núcleo de actividad y de reflexión para todos aquellos que nos dedicamos a pensar en la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

La lectura detenida de este libro nos permite apreciar un excelente trabajo, maravillosamente documentado y con una enorme riqueza en ejemplos. Quizás se pueda echar a faltar propuestas didácticas directas de trabajo, pero no es este el objetivo del libro, sino proporcionar información suficiente para que sea el propio profesorado el que elabore las suyas, basándose en el análisis y documentación que se presenta.

Creo que habrá bastantes compañeros y compañeras que disfrutarán con esta publicación cuyos contenidos podrán incorporar a sus clases. Dice Rafael que esto es lo único que le ha movido para escribirlo ya que (seguramente él no querría que contara esto) todos los que figuran en los créditos han renunciado a los derechos de autor que pudieran corresponderles, en favor del Patronato de la Alhambra para ayuda del mantenimiento y conservación de este monumento nacional y maravilla del mundo. Me gustaría destacar que para todos aquellos que amamos las matemáticas, sabemos que están en todas partes, solo hay que verlas con esos ojos especiales que nos proporcionan, y somos conocedores de que son un valor añadido, un disfrute adicional, cuando visitas cualquier lugar u observas una obra de arte. Libros como este nos ayudan en esa tarea.

Referencias al libro y la posibilidad de comprarlo la tenemos en la página web del Patronato de la Alhambra: <https://www.alhambra-patronato.es/publicaciones/alhambra-belleza-abstracta>.

Matemáticas que suman. Didáctica para la iniciación de los niños con discapacidad intelectual

Dos situaciones especialmente luminosas en la vida de un matemático son el descubrimiento de un resultado nuevo, que podríamos representar como una bombilla que se nos enciende en el cerebro, y la transmisión de una idea que sea nueva para nuestros estudiantes, esto es, conseguir que a ellos se les encienda la bombilla. El paso del tiempo me lleva a meditar cada vez más sobre estas cuestiones. Hace años leí un libro que me impresionó mucho, titulado *Pensare in Matematica* (Israel, G.; Millán Gasca, A.; Ed. Zanichelli, Bolonia, 2012) y ahora he leído este otro, pariente de aquel, pues la autora, Elena Gil, defendió en 2016 su tesis doctoral realizada bajo la dirección de Ana Millán Gasca y José Ignacio Cogolludo.

Como el nombre indica, el libro trata sobre cómo empezar a enseñar matemáticas a niños con discapacidad intelectual, especialmente con trisomía 21. En la primera parte se argumenta por qué tales niños deben recibir formación matemática, mientras que la segunda se compone de un catálogo de actividades desarrolladas durante los últimos cinco años en Zaragoza por el Taller de Matemáticas de la Sociedad de Estudios sobre el Síndrome de Down <http://sesdown.org/>.

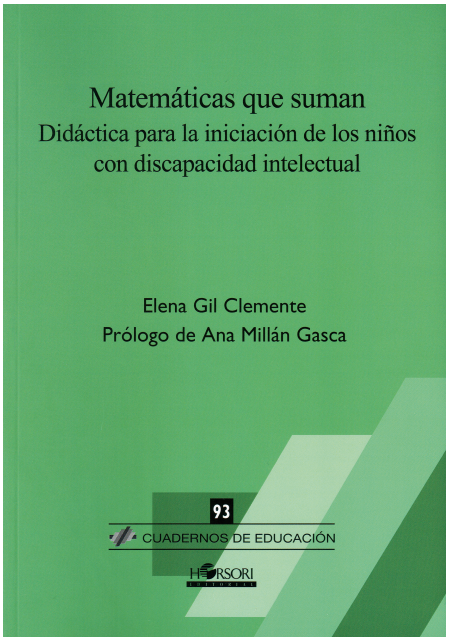
De cada una de las actividades propuestas se explica su finalidad, las matemáticas subyacentes, el nivel, los materiales, la descripción y una valoración de la autora sobre su realización: las dificultades de los niños,

las de los monitores al transmitir lo que deseaban de ellos, los logros conseguidos.

Sobre la educación matemática de los niños con trisomía 21 hay muchos clichés. El más extendido, que estos chicos no tienen capacidad de abstracción. En consecuencia, no serían aptos para entender las matemáticas y a lo sumo podrían realizar procesos reiterativos. La autora, basándose en experiencias pedagógicas desarrolladas a lo largo de los dos últimos siglos, desmonta ese estereotipo; más aún, muestra que las matemáticas pueden servir para potenciar el desarrollo intelectual de estos niños. Así, las nociones geométricas les servirán para comprender el mundo que les rodea y las aritméticas para organizarlo. Este planteamiento está en plena concordancia con la famosa frase «La Geometría es la rama más antigua de la Física», proclamada por Albert Einstein hace cien años, el 27 de enero de 1921 en una conferencia en la Academia de Ciencias de Prusia.

El libro contiene descripciones de las características propias de los niños de los que trata, como las que se refieren a su lentitud para realizar tareas y a su dificultad, o incluso ausencia, de lenguaje oral, que es sustituido en buena medida con lenguaje corporal. La ausencia de expresión escrita les causa en muchos casos una dificultad adicional con la aritmética, dificultad que no es de naturaleza matemática sino lingüística. Por ello, empezar por la geometría es una decisión más que acertada, pues los niños pueden adentrarse en ella moviéndose, actuando con su propio cuerpo y, después, dibujando. El saber qué es una línea recta, qué significa estar entre dos puntos, o qué es una circunferencia les ayuda a comprender el mundo que les rodea. Estas reflexiones sirven a un público muy amplio y no solo a los maestros a quienes van dirigidas, y pueden enriquecer la vida profesional de cualquier persona dedicada a la enseñanza.

Termino esta reseña comentando la apuesta decidida de la autora por la pedagogía humanista de las matemáticas. Su enseñanza se ha de rodear de una historia que motive a los niños a resolver los enigmas planteados. Una historia cargada de fantasía e imaginación, que es un entorno bien próximo a la vida de un niño. Muchas veces el abandono de una tarea matemática se produce porque no interesa nada a quien la está realizando. La pasión de la autora por el tema se contagia al lector del libro, por lo que su lectura es de sumo placer y aprovechamiento para quien vive la misión educadora con entusiasmo.



MATEMÁTICAS QUE SUMAN.
DIDÁCTICA PARA LA INICIACIÓN DE LOS NIÑOS CON DISCAPACIDAD INTELECTUAL
Elena Gil Clemente
Cuadernos de Eduación N.º 93
Horsori Editorial
Barcelona 2020
248 páginas
ISBN: 849498571X

Primera reseña:

Serapio García Cuesta
UNED de Albacete
<sgarcia@albacete.uned.es>

Segunda reseña:

Fernando Etayo Gordejuela
Universidad de Cantabria
<etayof@unican.es>


FESPM
&
Cía

FESPM

Matemáticas y mujer

Juan Carlos Toscano Grimaldi

El pasado 11 de febrero la Federación Española de Sociedades de Educación Matemática (FESPM) celebró un *webinar* sobre Ciencia y Matemáticas con el título *Matemáticas y mujer*. Con ello, la FESPM quería unirse a las muchas iniciativas que se celebran en todo el mundo sobre la situación de la niña y la mujer en la ciencia y tecnología. Uno de los aspectos fundamentales en el caso de la matemática es el papel decisivo que tiene en las vocaciones científicas y tecnológicas.

La sesión fue abierta por Onofre Monzó del Olmo, presidente de la FESPM, quien en su intervención señaló el compromiso de la FESPM con el papel de las mujeres en la matemática y en su enseñanza. Destacó la importancia de hacer visible a las profesoras de la matemática y el interés de fomentar un incremento de la participación de las chicas en las actividades extracurriculares como las Olimpiadas de las Matemáticas ya que el desempeño como estudiantes de las chicas es similar al de chicos, su participación es mucho menor en esas actividades que la de los chicos. Mostró la preocupación de la FESPM por las

cifras de la presencia de las mujeres en las carreras técnicas.

A continuación, Juan Carlos Toscano Grimaldi, secretario de Divulgación de la FESPM, señaló que aunque la matrícula en el grado de Matemáticas es similar en chicos y en chicas, cuando se extraen las cifras de la matrícula en el doctorado las cifras bajan mucho: a modo de ejemplo, en la Universidad Complutense de Madrid, solo el 13 % de la matrícula en el doctorado corresponde a mujeres. También recordó el efecto tijera que se produce en las cifras del personal académico que se refleja en que en las escalas iniciales de la investigación y la docencia universitaria en ciencias hay más mujeres que hombres, y al ascender en la escala los puestos de rectoría, cátedras, dirección de proyectos de investigación, los porcentajes se invierten y son muchos más hombre que mujeres.

La sesión fue coordinada por Marta I. González García, profesora titular de Filosofía de la Ciencia en la Universidad de Oviedo, y que es una de las principales referentes en los estudios de ciencia, tecnología y género de España. En su intervención de presentación, entre otros temas señaló:

> Durante mucho tiempo se dudó de las capacidades de las mujeres en las matemáticas. Desde Hypatia de Alejandría hasta nuestros días, no obstante, hay una larga tradición de mujeres matemáticas y una larga historia que ya vamos conociendo de las dificultades que tuvieron que enfrentar. La propia matemática se ha revelado a menudo como un instrumento valioso para luchar contra los estereotipos, como muestran los metaanálisis realizados desde los años 80 por la psicóloga Janet Hyde sobre las diferencias (o, mejor dicho, similaridades) en matemáticas entre hombres y mujeres.
>
> Junto a la revisión histórica y la visibilización de las matemáticas olvidadas, la investigación sobre las barreras que perviven y sobre cómo promover la igualdad a través de la educación siguen siendo tareas inacabadas. No hay una única causa de las desigualdades persistentes entre mujeres y hombres en las vocaciones y profesiones relacionadas con las matemáticas. Dos estudios recientes apuntan en dos direcciones que se entrelazan. Por una parte, Lin Bian, Sarah-Jane Leslie y Andrei Cimpian publicaron en 2017 en la revista Science su investigación sobre los estereotipos de género relacionados con la habilidad intelectual en la infancia. De acuerdo con sus resultados, hacia los seis años las niñas ya consideran que los juegos que requieren ser «muy brillante» son más propios de niños que de niñas. En una disciplina como las matemáticas, en la que el éxito se asocia a la idea de «genialidad», estos sesgos de género funcionan como una barrera sutil que afecta a la percepción que niños y niñas tienen sobre su propia competencia intelectual y modelan las elecciones que toman sobre sus trayectorias académicas. La investigación sobre los factores que influyen sobre estas elecciones apunta también en otra dirección en investigaciones recientes. De acuerdo con el estudio de Thomas Bredaa y Clotilde Napp (publicado en 2019 en PNAS), tendemos a pensar en nosotros mismos como personas «de letras» o «de ciencias». Muchas niñas que son buenas en matemáticas, pero también son buenas (o aún mejores) en las disciplinas «de letras» optan por carreras de humanidades. La vieja fractura entre «las dos culturas» que ya denunciara C. P. Snow a mediados del siglo XX sigue vigente y contribuyendo al mantenimiento de esta otra fractura de género en las matemáticas. Abordar tanto los estereotipos de género como el mito de las dos culturas como caminos para promover la igualdad en matemáticas es una tarea en la que la educación tiene un papel central.

A continuación, intervino Encarnación Reyes Iglesias, profesora agregada de Bachillerato hasta 1990. Profesora titular de universidad (área de Matemática Aplicada) desde 1990. Imparte docencia en la Escuela



Figura 1. Invitación al *webinar*

de Arquitectura y en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valladolid.

> Pese a los grandes avances de los últimos años respecto a las mujeres en ciencia y tecnología, la brecha de género sigue estando presente.
>
> La educación recibida desde la familia, la escuela y la sociedad, ha influido en la elección de las chicas a la hora de elegir carreras STEM. Los prejuicios y roles de género afectan desde que las niñas son pequeñas y reciben juguetes diferenciados, o empiezan a percibirse a sí mismas como menos brillantes que los niños, hasta las etapas posteriores, de madurez, como se comprueba a partir de los datos de las gráficas tijera, donde se pone de manifiesto que la carrera de las mujeres, hasta alcanzar las cúspides académica, científica y tecnológica, es más complicada (maternidad u otras tareas de tipo familiar) que para los hombres, provocando abandonos tras la etapa post-doctoral. Todo ello se ve agravado por los estereotipos incrustados en la sociedad (hombre-genio, mujer-trabajadora) que siguen afectando a las mujeres, tanto en la elección de carrera, (disminución de mujeres en los estudios de informática cuando pasó de diplomatura a ingeniería), como en la solicitud de un trabajo (experimento de Jennifer y John), o como en los reconocimientos y premios de todo tipo (efecto Matilda).

La tercera en intervenir fue M.ª Cristina Naya Riveiro, docente del área de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad da Coruña.

> Matemáticas, sustantivo femenino que me conquistó desde niña, pues siempre tuve muy claro que de mayor quería ser profesora de matemáticas.
>
> El camino no fue fácil, ya que durante mis estudios universitarios casi no tuve referentes, pues solo el 14 % del profesorado entonces eran mujeres. Cuestión que ha cambiado, ya que ahora el 51% del profesorado en esta titulación es femenino. También cabe señalar que la presencia de mujeres en esta titulación ronda entre el 36% y el 51% en estos últimos años, lo que cambia cuando nos vamos a dobles grados o carreras más técnicas cuya presencia se reduce al 30% o al 10%.
>
> ¿Por qué ocurre esto? Es muy difícil de saber, creo que hay muchos factores que influyen en esta situación, pero uno de ellos estoy convencida de que lo vivo cada curso y me preocupa mucho desde mi labor profesional. Es la actitud hacia las matemáticas de los/as futuros/as docentes de educación primaria, que llegan a sus estudios universitarios (más de un 70% de los/as matriculados/as en el Grado de Educación Primaria son mujeres) escapando de las matemáticas en su trayectoria estudiantil. ¡Pero cuidado!, pues ellas y ellos serán los/as docentes de los/as niños/as, y especialmente de las niñas de quinto y sexto curso de educación primaria, cuya visión y percepción de las matemáticas y de las ciencias en general cambia en estas edades. Bien sea por el entorno que puedan tener (familia, sociedad, etc.) pero sobre todo por el papel que su maestra o maestro pueda desenvolver, bien a través de cómo les enseña matemáticas o de cómo trasmite su visión sobre ellas, ya que son cursos donde la presencia de recetas y métodos mecánicos pueden tener más cabida, perdiendo la creatividad en la resolución de problemas, lo que para ellas podría ser algo ilusionante, de lo que entonces se les priva.
>
> Por tanto, creo que desde la formación del profesorado tenemos un gran reto, del mismo modo que todos los maestros/as y profesores/as de matemáticas en todas las etapas educativas, intentar conquistar el amor de nuestro alumnado hacia las matemáticas.

A continuación, expuso Ana Carvajal, matemática, especialista en metodología y didáctica de las matemáticas en las etapas de Educación Infantil, Primaria y Secundaria. Es profesora de secundaria, autora y editora. Es coautora del libro de la colección Miradas Matemáticas, *Demostraciones visuales en matemática*. Su intervención trató sobre la presencia de la mujer matemática en tres tipos de libros: libros de texto, libros de divulgación y libros de literatura.

> Los libros de texto han ido evolucionando de la mano de la sociedad. Actualmente, encontramos en estos manuales espacios dedicados a mujeres relacionadas con las ciencias. Pero nuestra reflexión va un poco más allá en la intención de cubrir esa necesidad de dar un espacio a las mujeres. Nos preguntamos si no sería necesario un cambio en la forma de enseñar y de aprender, por ejemplo, las ciencias sociales, pudiendo así transformar esa mirada belicista de estudiar la historia por otra más cultural y social, posibilitando de este modo que las mujeres del pasado tengan una mayor presencia.
>
> Por otro lado, en los libros de divulgación la presencia de las mujeres es casi inexistente, salvo en monográficos dedicados a mujeres matemáticas. La

> reflexión es la misma: lejos de pensar que estos libros son innecesarios, quizá el trabajo más difícil sea el que aún queda pendiente de hacer; esto es, integrar a las mujeres en los manuales de historia de las matemáticas, con nuestras dificultades y nuestras ausencias, pero integradas.
>
> Finalmente, y no menos importante, sentimos también la necesidad de apostar por la creación de personajes principales femeninos en novelas y textos literarios asociados a nuestra especialidad. Históricamente, las novelas relacionadas con las matemáticas solían estar protagonizadas por personajes masculinos. Quizás ha llegado el momento de que las mujeres seamos las protagonistas de nuevas aventuras matemáticas.

Mayte Megías Cantero, la más joven de las que intervino, nos contó su experiencia tanto en las olimpíadas de matemáticas como en el programa ESTALMAT, ahora ella trabaja en una empresa de logística:

> Como participante en las diferentes olimpiadas matemáticas celebradas durante mi etapa educativa, creo que este tipo de actividades juegan un papel importante en la atracción de las matemáticas en edades tempranas, siendo una muy buena experiencia para la iniciación de las niñas desde pequeñas en el mundo matemático.
>
> Desde mi punto de vista, este tipo de eventos, así como el programa ESTALMAT, fortalecen la participación de niñas en el ámbito matemático, fortaleciendo la elección de carreras científicas y tecnológicas en los años posteriores.
>
> Como punto clave para el incremento de la participación, en los primeros años educativos, las niñas deberían tener referentes femeninos científicos, para comprobar que el mundo de la tecnología ya no es un «mundo exclusivo de hombres» sino que cada vez hay más arquitectas, ingenieras y matemáticas, esto se conseguiría dando mayor visibilidad en los colegios a programas como ESTALMAT o a las actividades matemáticas que cada año se celebran en las diferentes provincias españolas.

Una vez terminadas las exposiciones iniciales se intercambiaron reflexiones con algunas docentes de las más de doscientas que asistieron.

Como reflexión final podemos afirmar que pese a que la situación ha ido cambiando en los últimos años y se han ido logrando muchos avances en la presencia y visibilidad de la mujer en la matemática queda mucho camino por recorrer y desde la FESPM se intensificarán los esfuerzos para apoyar ese avance. La grabación de la sesión completa se puede ver en: <https://youtu.be/2k1WotDLNl8>.

Referencias bibliográficas

Bian, L., S. J. Leslie y A.Cimpian (2017), «Gender stereotypes about intellectual ability emerge early and influence children's interests», *Science* n.º 355/6323, 389-391.

Breda, T., y C. Napp (2019), «Girls' comparative advantage in reading can largely explain the gender gap in math-related fields», *PNAS* n.º 116/31, 15435–15440.

Juan Carlos Toscano Grimaldi
Organización de Estados Iberoamericanos
<jctoscanogrimaldi@gmail.com>

C2EM 2020. El Congreso Catalán de Educación Matemática

Abraham de la Fuente Pérez
Cyntia Riquelme Carvallo
Juan Carlos Tinoco Balongo

Los Comités Local, Organizador y Científico del C2EM 2020, la junta de FEEMCAT y representantes del Departamento de Ingeniería Informática y Matemáticas de la Universidad Rovira y Virgili acordaron mantener la celebración del C2EM 2020 el 13, 14 y 15 de noviembre en Reus-Tarragona, en formato virtual, a pesar de las circunstancias que estamos viviendo debido a la Covid19 y dada la imposibilidad de celebrar el C2EM 2020 en formato presencial.

El objetivo principal del congreso ha sido fomentar el compartir las prácticas de aula entre docentes, centrándose más en la gestión de aula concreta y en las adaptaciones realizadas en función del contexto de todos los niveles educativos.

Y todo esto se quería conseguir desde un evento abierto a todas las ideas, formas de hacer y de ser de maestros y profesores que quieren proyectarse hacia el futuro a través de la investigación educativa y la innovación. Para realizar esta tarea, que era tan amplia como estimulante, la organización se marcó los siguientes objetivos:



— Buscar la continuidad del C2EM 2016, recogiendo el trabajo realizado durante los 4 años de período entre congresos por la Comisión de Impulso de las Conclusiones de aquel congreso.
— Buscar maneras ágiles y eficientes de comunicar, debatir, contrastar y compartir opiniones, a partir de nuevos formatos que favorecieran el aprendizaje entre iguales.
— Diseñar un programa de actos que resultara atractivo para docentes y que fuese eficaz para hacer posible el intercambio de ideas, pretendiendo reflexionar, transformar, ordenar y mejorar.
— Buscar el máximo eco del evento en los medios y, a través de actividades paralelas, contribuir a dar presencia social a las matemáticas.
— Generar un ambiente y un espacio real para que la comunidad que haya participado del congreso continúe compartiendo después del C2EM.

Reinventando el Congreso

Nada ha sido fácil este año. Y menos la organización de un congreso en el que lo que prevalece es la comunicación, el debate, el compartir opiniones, tanto a nivel formal en los espacios dedicados a ello (comunicaciones, talleres, mesas…) como a nivel informal, no menos provechoso y sobre todo más rico, en las charlas y contactos que se producen en los ratos de pausa, en pasillos, bar, salidas matemático-culturales...

La decisión de continuar manteniendo el congreso y pasar a un formato virtual no fue nada fácil. Primero, hicimos una búsqueda de otras experiencias virtuales, para después replantear el formato de las diferentes actividades y finalmente, después de horas de reuniones y de compartir diferentes ideas, nos pusimos a trabajar en una propuesta virtual que mantuviese la esencia de un congreso presencial. La propuesta final mantuvo las comunicaciones en un formato muy similar al que hubiesen tenido si el congreso se hubiese celebrado presencialmente. En cambio, el formato de los talleres se tuvo que reinventar, para convertirlos en un espacio llamado «Propuestas de Aula». Además, se tuvo que repensar desde cero una propuesta que ya era una innovación en formato presencial, los «Espacios de intercambio».

Sesiones plenarias

Finalmente, todo pasó a formato virtual, incluidas las sesiones plenarias, que hasta el último momento no se supo si podrían ser o no ser presenciales y que, finalmente, también se realizaron de manera virtual: la conferencia inaugural *Ganar, ganar, ganar y volver a ganar* a cargo de Eduardo Sáenz de Cabezón (figura 1), y la conferencia de clausura *Reus, tenemos un problema… Pues, ¡llevémoslo a clase!* a cargo de Laura Morera y Jordi Font (figura 2).

En la primera, Eduardo mostró cómo los juegos pueden formar parte de la clase de matemáticas y cómo la resolución de problemas nos puede ayudar a trabajar con nuestros alumnos y, en concreto, algunas

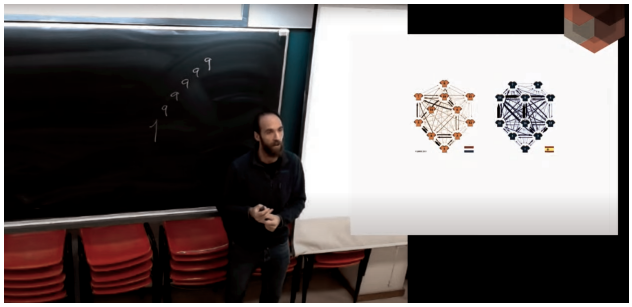


Figura 1. Eduardo Saénz de Cabezón



Figura 2. Laura Morera y Jordi Font



Figura 3. Propuestas de actividades de aula

heurísticas que de otra manera sería difícil hacer surgir en el aula de primaria o secundaria como, por ejemplo, dar el problema por resuelto y pensar hacia atrás.

Laura y Jordi también insistieron en la importancia de plantear la clase de matemáticas en un entorno de resolución de problemas y en cómo las emociones que despiertan los problemas se pueden canalizar para ayudar a aprender más matemáticas.

Las conferencias se pueden recuperar en este enlace: <https://c2em.feemcat.org/inauguracio-i-cloenda-del-c2em/>.

Propuestas de actividades de aula

Se trataba de sesiones prácticas de actividades que el profesorado ha llevado a cabo en las aulas, y sustituye el anterior formato de Talleres debido a que la interacción presencial que estos requieren no es posible virtualmente. En cualquier caso, la finalidad principal de estas sesiones continuaba siendo la manipulación interactiva de materiales o software y la exposición de actividades concretas. Se diferenciaron de las comunicaciones en que debían tener un planteamiento dinámico. Las presentaciones tenían una duración de 30 minutos, y podían incluir uno o más vídeos pregrabados; finalizada esta presentación se establecía un debate e intercambio de comentarios entre asistentes y ponentes de unos 15 minutos de duración (figura 3).

Espacios de intercambio

Los espacios de intercambio se convierten en una propuesta abierta de aprendizaje entre docentes. Espacios virtuales para compartir e intercambiar, que se enmarcaban dentro de la filosofía del aprendizaje entre iguales. Se proponía que las personas que querían participar de un espacio de intercambio ofrecieran algo y que además pidieran alguna cosa que les pudiera interesar. Dadas las circunstancias del congreso, nos pareció que sería muy interesante centrar estos espacios en intercambiar experiencias sobre nuestras clases en confinamiento.

Los ejes que utilizamos para centrar el contenido de estos espacios fueron: gestión del trabajo en equipo con alumnos confinados (ya sean algunos o todo un grupo), cómo dar *feedback* con la docencia virtual, personalización del aprendizaje,…

Los intercambios se realizaron utilizando una dinámica que fomentaba la participación de todas las per-

sonas que asistieron. En primer lugar los asistentes debían contestar un cuestionario en el que podían escribir sus propuestas, tanto de demandas como de ofrecimientos. Ya en la sesión, disponían de un tiempo para leer todas las propuestas de su franja horaria y comentarlas por escrito, enriqueciendo propuestas o bien resolviendo demandas. Finalmente, teníamos una conversación ordenada sobre aquello que había quedado escrito y se pedía a alguna de las personas participantes que escribiese un hilo de Twitter explicando lo que se había hablado durante la sesión.

Mesas

Consisten en vídeos en «pequeño formato» de actividades de aula, de experiencias y de materiales, explicadas por los maestros, profesorado o alumnado que las llevaron a la práctica (figura 5). Enlace a las diferentes mesas: <http://bit.ly/3oDdoKt>.

Presentaciones 20 20

Se tratan de una coleccioón de presentaciones en formato virtual para compartir experiencias escolares, ideas o puntos de vista sobre la educación matemática y los resultados de investigaciones en el aula, que son presentadas a través de 20 imágenes de 20 segundos cada una (figura 6).

Agradecimientos

A todos aquellos docentes a los que se les pidió un esfuerzo extraordinario al tener que sumar a su «saber hacer» y su habilidad de transmitir de la mejor manera posible su experiencia, horas de ensayo para aprender la gestión de una transmisión en directo y el hacer posible una proximidad a través de una pantalla. Se les dio la opción de transformar los talleres en propuestas de actividades de aula o en comunicaciones. La gran mayoría aceptó el reto y mantuvieron la ilusión.

Los docentes, que saben de matemáticas y de cómo enseñarlas, cuando asisten y participan activamente en un congreso presencial, ya tienen que sumar a sus habilidades el hecho de hacer una buena transmisión de su experiencia didáctica. Además ahora teníamos que sumar la gestión de una transmisión en directo y el hacer posible una proximidad a través de una pantalla. Se dio la opción de transformar los talleres

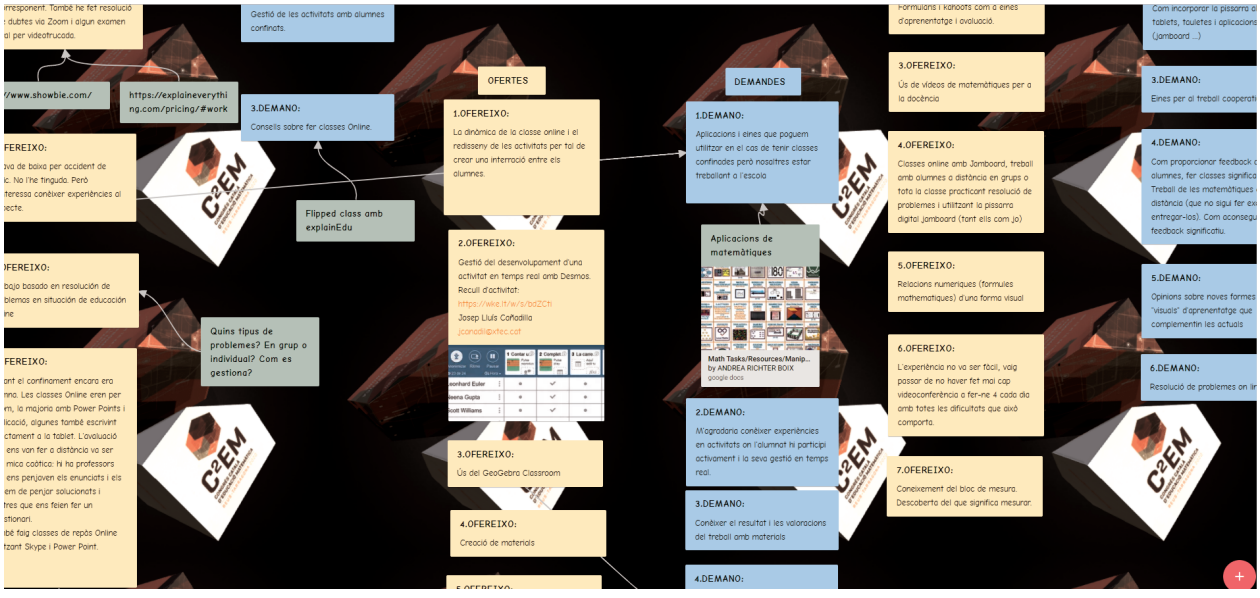


Figura 4. Espacios de intercambio



Figura 5. Mesas



Figura 6. Presentaciones 20 20

en propuestas de actividad de aula o en comunicaciones. La gran mayoría de los ponentes aceptó el reto. Por ello reiteramos el agradecimiento a todas las personas que se sumaron al reto y que mantuvieron la ilusión, también en virtual.

Pero todo no habría sido posible sin el gran apoyo del equipo tecnológico que dedicó horas y más horas para ensayos con ponentes, moderadores/as, dinamizadores/as y el Cesire del ámbito matemático (conocido por todos nosotros como CREAMAT), que facilitó todo el potencial de la red, para que las transmisiones en directo fueran un éxito. Fueron 7 salas emitiendo continuamente en franjas paralelas. Un centenar de comunicaciones, presentaciones de actividades de aula, presentaciones 20 × 20 y espacios de intercambio. Finalmente se inscribieron un total de 741 personas. Para nosotros todo un éxito ante la nueva situación (figura 7).

Participación de la etapa 0-3 por primera vez en un Congreso de Educación Matemática

Vale la pena mencionar que ha sido, tal vez, la primera vez en nuestro país que un congreso matemático ha incluido la etapa 0-3. Una etapa en la que es esencial la experimentación y donde los niños a través del juego libre, pueden ir construyendo conceptos matemáticos. Títulos como «Los arenales en la guardería», «La investigación educativa en el jardín

de infancia: el papel de los espacios y de los materiales para fomentar el desarrollo del pensamiento matemático de los niños», «Descubrimiento matemático en la etapa de los 0-3 años»,«¡Experimentamos las matemáticas!» y «¿Hay una cultura matemática de las personas?», forman parte de la cápsula «La experimentación y el descubrimiento matemático en los diferentes niveles educativos».

El objetivo era compartir ideas para favorecer el desarrollo de las ideas matemáticas desde edades tempranas, y favorecer el trabajo en red entre guardería, parvulario y primer ciclo de primaria.

Queremos hacer una lectura muy positiva tanto de la participación de ponentes como de docentes asistentes.

Todas las aportaciones en un clic

La organización para la búsqueda de las comunicaciones y propuestas de actividades de aula fue esencial para el buen funcionamiento del congreso. La estructura virtual ayuda a que se puedan ver las intervenciones de todos los ponentes en diferido en función de los intereses personales.

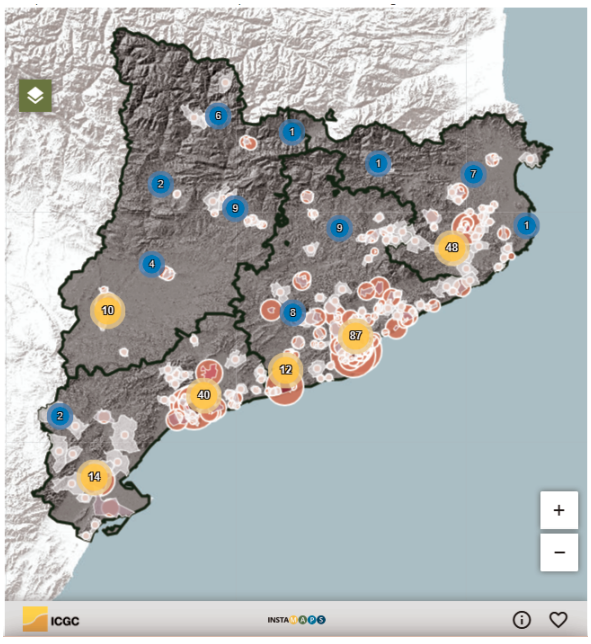


Figura 7. Procedencia de las personas inscritas

Para acceder a toda la información, y vídeos de las aportaciones al C2EM se puede seguir el siguiente enlace: <http://bit.ly/2Lh3ujx>. La web facilita la opción de seleccionar los contenidos por franjas horarias, salas, nivel educativo, núcleo temático y también por texto (figura 8).

Valoraciones

Desde el comité científico nuestras valoraciones han sido muy satisfactorias. Las valoraciones recogidas a través de las encuestas a los asistentes nos confirman que valía la pena hacer el congreso en modo virtual.

Nos ha sorprendido la agilidad del sistema mediante la plataforma de *streamyard* para la emisión en *streaming* en *youtube*. Ha permitido el desarrollo de las ponencias con una puntualidad estricta y, por tanto, el salto de una sala a otra de manera sincronizada.

La grabación de las comunicaciones y propuestas de aula permitirá la visualización posterior de las mismas y esto supone un gran avance.

Aquí tenemos una muestra de algunos de los comentarios que se han recogido en las encuestas de valoración:

— El inconveniente de ser un congreso virtual también ha tenido su parte positiva. Puedes visionar otras conferencias en horarios posteriores. Se ha transmitido y contagiado una gran ilusión por las matemáticas. Se ha extendido aún más la mancha de aceite.
— La organización y gestión de todo el congreso, antes, durante y ahora, después.
— Dar visibilidad a las guarderías.
— Materiales e ideas muy interesantes y que se pueden llevar al aula.
— A pesar de la complejidad ha funcionado muy bien. Era difícil mantener el espíritu de un evento presencial. ¡Felicidades!.



Figura 8. Todas las aportaciones en un clic

Anton Aubanell recoge muy bien la opinión del comité:

> El Congreso se ha podido hacer. ¡Seis meses antes pensábamos que no era posible!
> Las mesas, las presentaciones 20 20, el espacio de intercambio virtual,... han surgido de este modelo virtual.
> Hemos logrado un avance muy grande en virtualidad, imaginación en redefinir las cosas. Con una potencialidad enorme, por ejemplo, en el no-desplazamiento, en poder volver a mirar las presentaciones, en puntualidad.
> Se han podido llevar a cabo unos retos muy participativos gracias a toda la comunidad asistente.
> Aunque desaparezca el confinamiento, parece que habrá cosas que no se irán.

Retos C2EM 2020 a 2024

El C2EM 2016 acabó con unas conclusiones. Entendiendo que debíamos dar un paso más, en las tareas de organización del C2EM Reus - Tarragona 2020 se planteó, desde el principio, la necesidad de cerrar el congreso con una lista de propósitos compartidos que llamamos RETOS DEL C2EM.

El formato virtual del congreso no modificó la voluntad de que estos retos fueran establecidos de forma participativa y, por ello, se llevó a cabo un procedimiento en varias etapas: consulta inicial para recoger propuestas, recopilación y síntesis y, finalmente, una segunda consulta para valorar y seleccionar la lista de retos definitiva.

El resultado de este proceso, que contó con una participación muy alta, son los 12 retos que a continuación se detallan y que tenemos que entender como

Retos que pretendemos lograr, individualmente pero en un marco de colaboración de todo el colectivo docente y de todas las etapas educativas.

RETO 1

Exigiremos que la formación en la que participamos se centre en el desarrollo de las competencias profesionales del docente:

- Diseñar actividades y unidades en las que el protagonista sea el alumno.
- Gestionar un aula heterogénea e inclusiva.
- Gestionar la evaluación con el objetivo de mejorar el aprendizaje.
- Trabajar de manera colaborativa.

RETO 2

Trabajaremos, en el ámbito de cada uno/a, para asegurar que la formación inicial y permanente del profesorado parta de unas bases matemáticas y didácticas

sólidas, y que incluya los conocimientos matemáticos necesarios para enseñar: sobre cómo aprenden los alumnos, sobre el horizonte (el antes y el después) y sobre recursos materiales y tecnológicos para innovar.

RETO 3

Contribuiremos a que, en cada uno de nuestros centros, haya una persona especialmente dedicada a dinamizar las matemáticas y establecer conexiones con los centros del entorno.

RETO 4

Conseguiremos que la mayoría de nuestras actividades de aula sean matemáticamente relevantes, activen el pensamiento matemático, admitan múltiples enfoques, fomenten la colaboración y la discusión, y sean significativas y accesibles para el alumnado.

RETO 5

Potenciaremos la creación de laboratorios de matemáticas en nuestros centros, considerándolos un elemento importante en la creación de ambientes propicios para la experimentación.

RETO 6

Centraremos nuestros esfuerzos, en todas las edades, en el «cómo», en la creación de ambientes propicios para el aprendizaje: interacción, reflexión, creatividad, razonamiento, resolución de problemas, construcción y desarrollo del pensamiento matemático, etc.

RETO 7

Trabajaremos para cambiar preconceptos sociales arraigados, como «Las matemáticas son difíciles» o «¿Esto para qué sirve?», por otras expresiones como «Todo el mundo sirve para las matemáticas» o «Las matemáticas nos ayudan a interpretar el mundo».

RETO 8

Promoveremos actividades participativas donde los/las docentes, el alumnado y sus familias puedan disfrutar juntos de experiencias matemáticas positivas (ferias, actividades de calle, visitas, concursos, juegos, tertulias, etc.).

RETO 9

Haremos una amplia tarea de divulgación de las matemáticas en nuestras aulas, y mostraremos su contribución a resolver problemas actuales y sus aplicaciones para hacer un mundo mejor, como complemento de los contenidos reglados.

RETO 10

Potenciaremos la creación de pequeños equipos de docentes, estables e interniveles, conectados para compartir materiales, recursos y experiencias.

RETO 11

Favoreceremos la creación o actualización de bancos de recursos, tipo la ARC, a fin de compartir experiencias de actividades realizadas en el aula.

Abraham de la Fuente Pérez
IE Costa i Llobera y Universitat Autònoma de Barcelona
<abrahamfp@gmail.com>

Cyntia Riquelme Carvallo
Padre Damian Sagrados Corazones
<criquelmecarvallo@gmail.com>

Juan Carlos Tinoco Balongo
Institut Bitàcola y Universitat Autònoma de Barcelona
<jtinoco@xtec.cat>

XXXIII Congreso de ENCIGA

M.ª Inés García Seijo, Paloma Blanco Anaya,
Beatriz Fernández Fernández, Iria Fernández Fontenla

La asociación ENCIGA (Ensinantes de Ciencias de Galicia) fue fundada el 16 de enero del año 1988 y básicamente es una asociación de profesoras y profesores de ciencias que intenta mejorar la calidad de la enseñanza en las áreas matemático-científico-tecnológicas en niveles educativos no universitarios.

En su mayoría se compone de profesorado de secundaria de las materias de biología, física y química, y matemáticas, aunque también hay integrantes que corresponden a niveles universitarios o de educación primaria e infantil, y cada vez son más los compañeros de formación profesional que se asocian. Sin embargo, cualquier otra especialidad es bienvenida, no necesariamente relacionada con el ámbito científico, pues eso le daría un carácter multidisciplinar a la asociación que puede ser interesante. A diferencia del resto de sociedades que componen la FESPM, en ENCIGA trabajamos conjuntamente profesorado de matemáticas con docentes de otras especialidades, compartiendo nuestros conocimientos y complementándonos, lo que le da a cada materia un conocimiento más amplio y enriquecedor.



ENCIGA intenta impulsar y dinamizar los trabajos de investigación educativa e intercambio de información entre asociadas/os canalizándolos a través del Boletín das Ciencias, que es el medio de comunicación oficial de la asociación. El congreso anual es el acontecimiento más importante, con un fin formativo y claramente social: el acercamiento entre compañeros/as que pasan a ser verdaderos amigos/as en la profesión.

La situación sanitaria actual provocó que la asociación tuviese que reinventarse para poder ofrecer su tradicional congreso anual de forma telemática, un reto superado y que tuvo sus ventajas, como permitir la exposición de un trabajo por parte de una socia que se encontraba en Viena o impartir una conferencia desde Houston. Éramos conscientes de que la esencia del congreso se iba a perder y no iba a ser lo mismo, pero era mejor vernos a través de una pantalla que no vernos, y de esta forma poder compartir nuestras experiencias y seguir aprendiendo.

Las organizadoras del congreso fueron Paloma Blanco (secretaria de ENCIGA) e Iria Fernández (tesorera y coordinadora de la sección de matemáticas). Nos decantamos por utilizar la plataforma de Microsoft, Teams, aprovechando la colaboración que tenemos con la Universidade de Santiago de Compostela, y en ella creamos 9 canales para dar soporte al congreso.

El día 14 de noviembre, después de la inauguración del XXXIII Congreso a cargo de la presidenta de ENCIGA, M.ª Inés García Seijo, tuvo lugar la apertura del mismo con una conferencia a cargo del doctor en matemáticas Iván Area Carracedo, profesor de la Universidade de Vigo. Con el título *As matemáticas da COVID*, Iván comenzó introduciendo el concepto de derivada y su interpretación, para explicar posteriormente la aplicación en la propagación de epidemias. Primero lo hizo examinando comportamientos de transmisión de enfermedades en poblaciones sencillas (poblaciones constantes) para posteriormente incluir otras variables y ampliarlo a otras más complejas. En su grupo de investigación no era la primera vez que estudiaban estos fenómenos, ya que anteriormente elaboraron modelos dedicados a estudiar el zika y el ébola. En marzo del año 2020, gracias a sus estudios, habían predicho que el pico de la pandemia se produciría el día que previsiblemente se iban a celebrar las elecciones gallegas, como así fue, y desde ese momento pasaron a asesorar al Gobierno gallego en la toma de decisiones sobre la pandemia. Una conferencia muy interesante tanto para los matemáticos como para el resto de asistentes de otras especialidades, quienes agradecieron la claridad de la exposición pudiendo seguir perfectamente la conferencia .



Figura 1. Iván Area Carracedo en Camerún

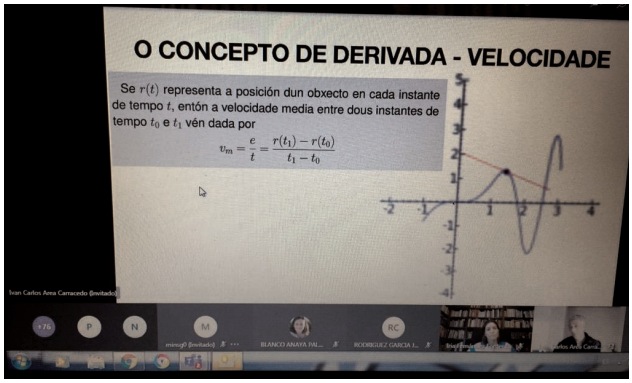


Figura 2. En la conferencia de Iván Area Carracedo

A continuación, se hizo un descanso de media hora antes de comenzar las comunicaciones en los distintos canales. El tiempo estimado para cada comunicación fue de media hora, aunque alguna se extendió un poco más, previo acuerdo con la organización. Se intenta siempre que las comunicaciones de la misma disciplina no coincidan simultáneamente, aunque no siempre es posible porque muchas tienen carácter interdisciplinar.

A las 12 horas empezaron las tres primeras comunicaciones simultáneas en tres canales distintos: una de ciencias naturales, *Pokemon e a súa potencialidade na ensinanza das ciencias da natureza* (María Cerdeira González y Manuel Vidal López), una de matemáticas, *Fractais. Unha aproximación* (Claudio Martínez Gil) y una interdisciplinar *La aristocracia que nunca existió* (José Manuel Facal Díaz). La comunicación de matemáticas fue impartida por el representante de la sociedad navarra Tornamira, Claudio Martínez Gil, que introdujo la definición de dimensión fractal de forma intuitiva y muy amena, con ejemplos de la naturaleza, pintura, música o incluso de la cocina. A las 12:30 tuvieron lugar otras dos comunicaciones: *A táboa periódica máis antiga de Galicia?* (Manuel R. Bermejo, Marcelino Maneiro y X. Carlos Rodríguez) y otra interdisciplinar: *Emocións, compromiso e benestar en estudantes de educación infantil* (Nerea Álvarez, Borja Rodríguez y Pedro Membiela). Algunos congresistas no pudimos asistir a estas ponencias porque nos entretuvimos comentando la charla de fractales y sacando conclusiones con respecto a posibles aplicaciones en la enseñanza secundaria y bachillerato.

Una hora después, a las 13 horas, terminamos la mañana con cuatro comunicaciones: Una de ciencias naturales, *Uso do peixe cebra como modelo biolóxico nunha secuencia de indagación en formación profesional* (María Villar y Pablo Brocos), una de matemáticas, *Laboratorio de formas* (Antón Labranha), y dos interdisciplinares, *Ti e o tempo* (Antonio Gregorio, Wajih Al-Soufi y Mercedes Novo) y *CanSat: A carreira espacial no instituto* (José Balsa). En la comunicación de matemáticas nos detuvimos en leer las diapositivas que estaban preparadas por el autor, ya que un imprevisto imposibilitó su asistencia, y en comentar el interés geométrico de seis figuras de Sargadelos que se pueden ver en la figura 3. Es importante destacar que en el año 2020 se conmemoraba el centenario del nacimiento de Isaac Díaz Pardo, un intelectual galleguista que en el año 1963, fundó, junto con Luis Seoane, el Laboratorio de Formas, un proyecto dinamizador que, entre otros logros, recuperó parte de la fábrica de Sargadelos. Por citar algunos ejemplos comentados, se puede observar en la bigornia una geometría sinoidal, en el gallo círculos y arcos de toro, la figura voluta suscita un tema de la geometría fractal…

A primera hora de la tarde continuamos con cuatro comunicaciones simultáneas: una de física y química, *O amor entre Marie Anne y Lavoisier* (Manuel R. Bermejo, Ana González y Xoana Pintos), una de matemáticas, *Pode actuar o estímulo matemático como unha ferramenta de inclusión educativa?* (Alejandro Gorgal, Teresa Fernández, Cristina Núñez y Jesús Conde) y otras dos interdisciplinares, *Emocións en alumnos de secundaria obligatoria en relación coa ciencia, a tecnoloxía e as matemáticas* (César Crespo, M.ª Jesús Domínguez,



Figura 3. Figuras de Sargadelos

Isabel Gómez, Inmaculada González y Pedro Membiela), y *XuvenCiencia, espírito argalleiro* (Mercedes Novo, Wajih Al-Soufi y Marta Veiga). En cuanto a la de matemáticas, se presentaron los resultados obtenidos en un programa de estímulo matemático para alumnado en riesgo de exclusión social. Según relatan los autores, «en la mayoría de los casos este tipo de alumnado manifiesta un gran desinterés por el sistema educativo, y se intentó dar respuesta a sus necesidades a través del estímulo matemático y no del refuerzo». En el trabajo se analizaron los resultados de las medidas llevadas a cabo, con una metodología basada en la educación STEAM y conjugando materiales manipulativos con digitales. Se mostró que el alumnado modifica positivamente su rendimiento y se percibe una diferencia significativa del autoconcepto con respecto al género.

Para terminar la primera jornada, se dio paso a la conferencia *Las tierras raras, lámpara de Aladino para nuestra sociedad de alta tecnología*, impartida por el doctor en Química del Instituto de Investigacións Mariñas de Vigo (CSIC), Ricardo Prego Reboredo. En la conferencia hizo una descripción de las tierras raras, esos elementos químicos difíciles de encontrar en estado puro y tan codiciados en la actualidad al haberse convertido en piezas fundamentales para el desarrollo tecnológico de nuestra sociedad.



Figura 4. Ricardo Prego Reboredo



Figura 5. Figuras del taller de origami

El sábado 28 de noviembre tuvo lugar la segunda y última jornada del congreso. Empezamos a las 9:30 hora de la mañana con tres talleres de una hora y media de duración, y una comunicación que fue preciso reubicar en el último momento, *Noticias falsas ou reais sobre a COVID 19?*(Jorge Pérez, Blanca Puig y Juana Pardo). Los talleres que tuvieron lugar fueron uno de física y química, *Cantas vitaminas hai no meu zume?* (Manuel Bermejo, M.ª Isabel Fernández, Beatriz Fernández, Sandra Fernández, Inés García Seijo, Esther Gómez, Ana González, Marcelino Maneiro, Rosa Pedrido, María Romero, Lara Rouco y Laura Rodríguez) y dos interdisciplinares, *O kit DNA-MEAT para STEM* (Manel Vera, Belén Reija, X. Carlos Rodríguez) y *Origami en tempos de coronavirus. Obradoiro de papiroflexia* (Sandra Camiña, Teresa Otero y Trinidad Pérez). En el taller de origami las tres autoras nos guiaron para hacer figuras con papel desde la sencillez (un sobre para guardar la mascari-

lla), a otras más complicadas (una doble hélice de ADN). También hubo una pequeña parte teórica en la que expusieron la importancia de este arte milenario a la hora de hacer réplicas de virus y así poder producir las vacunas.

A las 10:30 horas se intercalaron tres comunicaciones, lo que supuso que los asistentes tuvieran que elegir si seguir en los talleres o asistir a las charlas. No fue posible elaborar el programa de otra manera debido a la gran cantidad de comunicaciones que se acumularon en esta segunda jornada, al tener que hacer algunos cambios de última hora. Las comunicaciones de las 10:30 correspondieron a una de ciencias, *Desenvolver a argumentación a través de cuestións socio-científicas: el cambio climático* (Virginia Aznar, María Méndez), una de matemáticas, *Funcións con moita pasta* (Ana Belén Rodríguez) y una interdisciplinar, *Seguindo os pasos de Domingo Fontán* (Ana Suárez, Gonzalo Méndez y Elena Vázquez). Las dos últimas fueron impartidas por dos matemáticas, Ana presentó un material de elaboración propia muy sencillo, que consiste en macarrones y tallarines, con los que explica el concepto de función, insertando en cada tallarín un macarrón teniendo en cuenta los números escritos en él y el cálculo a realizar según la función escogida. Para obtener la imagen o la inversa bastaría buscar en que tallarines hay macarrones insertados o mirar el número. La comunicación interdisciplinar corrió a cargo de la decana de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, Elena Vázquez Cendón. En ella se expuso un trabajo donde se analizan y replican los métodos seguidos por Domingo Fontán para elaborar la carta geométrica de Galicia, que fue el primer mapa físico realizado en España con mediciones matemáticas, iniciado en el año 1817. Además de utilizar triangulaciones para calcular los distintos puntos del mapa, Fontán añadió mediciones que lo dotaron de valores como la altitud de los principales picos de Galicia, trabajando con la presión atmosférica y la temperatura. Tras comprobar las similitudes de los resultados, los autores concluyen que «las diferencias de los instrumentos y tecnologías actuales con los de la época hacen aún más grande su obra y la admiración por la precisión de su trabajo».



Figura 6. Mapa de Domingo Fontán

A las 11 tuvieron lugar otras dos comunicaciones interdisciplinares, *O libro MARE PLASTICUM- THE PLASTIC SEA, unha arma contra o plástico mariño* (Margarita Cimadevila y Wolfgang Trettnak) y *A videoconferencia, ¿recurso educativo en tempo de crise?* (Clara Segade), además de una de matemáticas, *Matemáticas: unha ollada dende a Educación Primaria* (Beatriz Álvarez, Ixchel Dozhara, Eduardo Loureiro y Marta Pérez), en la que presentaron los resultados de la investigación, *Vocacións matemáticas na última etapa de Educación Primaria: perspectiva de xénero.*

Ya a las 12, después del descanso, se presentaron una de ciencias naturales, *Enfoque Unha Saúde da OMS dende Climántica* (Francisco Sóñora, Aitor Alonso, Julieta Dix), una interdisciplinar, *A nosa experiencia no Bacharelato STEM* (equipo STEM del IES Blanco Amor de Ourense) y otra de matemáticas, *Aproveitar as leccións de coronavirus nas aulas de 4.º ESO* (Luis Carlos Cachafeiro). En esta última, el profesor enumeró algunos trabajos que llevaba hechos con su alumnado para integrar modelos matemáticos reales en el aula y aprovechó la pandemia para aplicarlo a sus clases de matemáticas, recogiendo datos y con-

virtiendo esa información en problemas del tipo obtener la tasa de crecimiento, observar la evolución o analizar por qué en algunos medios emplean gráficas con escalas logarítmicas. A las 12:30 las comunicaciones fueron una de física y química, *Unha proposta para o ensino contextualizado da radiactividade* (Ramón Cid e Isaac Valiña), y dos interdisciplinares, *Os paxaros do VII Conde de Lemos* (Elena Guntiñas), y *Determinación de proteínas con el kit Fotometrix* (Wajih Al-Soufi, Ramiro Barcia y Mercedes Novo).

Para finalizar las comunicaciones, a la una se presentaron una de ciencias, *As grandes descoñecidas das crises sanitarias: as zoonoses. Pódense previr mediante a educación?* (Belén Blanco y Virginia Aznar), dos interdisciplinares, *Innovación docente en la lucha contra incendios forestales. El proyecto PLANTANDO CARA AL FUEGO, Velázquez e o problema do movemento a mediados do século XVII. Unha lección de Historia de Arte na clase de Matemáticas II* (Luis Carlos Cachafeiro) y una de matemáticas, *As matemáticas a distancia no primeiro ciclo da ESO* (Iria Fernández). Las dos últimas están bastante relacionadas en el sentido que las dos aplicaron temas de historia a las clases de matemáticas, una en 2.º de Bachillerato a través del problema del movimiento y la otra en 2.º ESO, a través de pinturas que aparecen el libro de Vicente Meavilla (*El arte de las matemáticas*, 2016) estudiando cuerpos geométricos y contenidos del curso. En esta segunda comunicación también se expuso un trabajo de competencia que fue el resultado de adaptar las preguntas de una ruta pensada para trabajar con la aplicación Math City Map, al no poder llevarla a cabo por causa del confinamiento. Para terminar la jornada y el congreso, a las 16 horas tuvo lugar la conferencia de clausura impartida por la doctora Sonia Villapol,



Figura 7. Sonia Villapol

investigadora principal y profesora en el Centro para Neurogeneración en el Instituto de Investigación del Hospital de Methodist (Houston), y titulada: *Crónica dunha pandemia anunciada*. Con una duración de más de dos horas y media, mantuvo la atención de todos los asistentes, quienes mostraron gran interés por el contenido y la exposición.

A continuación, la presidenta de la asociación, Inés García, en la clausura del congreso, manifestó su agradecimiento a los conferenciantes, ponentes y a todos los asistentes. La valoración general sobre la organización fue buena, con sus errores y deslices, que a veces se nos escapan en la organización, pero que hizo que mereciese la pena haberlo llevado a cabo. El próximo año 2021 intentaremos volver al formato presencial, aunque por el camino, no descartamos organizar alguna jornada o algo similar a distancia teniendo en cuenta esta experiencia.

M.ª Inés García Seijo
IES Lucus Augusti, Lugo
<mainesgs@edu.xunta.gal>

Paloma Blanco Anaya
Universidad de Santiago de Compostela
<paloma.blanco@usc.es>

Beatriz Fernández Fernández
IES Ánxel Fole, Lugo
<beatrizfernandez@edu.xunta.gal>

Iria Fernández Fontenla
IES San Mamede, Maceda (Orense)
<iriaffonte@edu.xunta.gal>

SUMA

Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje
de las matemáticas · **abril 2021**

– núm. 96 –

Consejo de Dirección
<direccion@revistasuma.es>

Iolanda Guevara Casanova
Departament d'Ensenyament
de la Generalitat de Catalunya
Universitat Autònoma de Barcelona

Daniel Sierra Ruiz
CPI El Espartidero, Zaragoza

Administración
<administracion@revistasuma.es>

Miguel Latorre García

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Web
<www.revistasuma.es>

Gloria Colás Bueno

Cubierta

Mercè Cassanyes i Caballeria
<mercecassanyes@gmail.com >

Diseño

Mercè Cassanyes i Caballeria

Maquetación y corrección

Miquel Albertí Palmer
INS Vallès, Sabadell (Barcelona)
Universitat Autònoma de Barcelona

Ricardo Alonso Liarte
IES Salvador Victoria, Monreal del Campo (Teruel)

Iolanda Guevara Casanova

Julio Sancho Rocher
IES Avempace, Zaragoza
Universidad de Zaragoza

Daniel Sierra Ruiz

Consejo de Redacción

Maite Navarro Moncho
CEFIRE Científico, Tecnológico y Matemático, València
Universitat de València
<teresa.navarro-moncho@uv.es>

Maria Àngels Portilla Rueda
CEIP Son Anglada, Palma
<manangels@gmail.com>

Julio Rodríguez Taboada
CPI Dos Dices, Rois (A Coruña)
<juliortab@gmail.com>

Juan Antonio Trevejo Alonso
IES Universidad Laboral, Gijón
<juanantral@gmail.com>

M.ª Teresa Valdecantos Dema
SIPEP Entre dos aguas, Algeciras, Cádiz
<matevalde@hotmail.com>

Santi Vilches Latorre
INS Vilamajor, Sant Pere de Vilamajor (Barcelona)
<jrey@xtec.cat>

Consejo Editorial

Miquel Albertí Palmer
<alberti.miquel@gmail.com >

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
<agustincarrillo@fespm.es>

Juan Martínez-Tébar Giménez
IES Alto de los Molinos, Albacete
<juanmtg1@gmail.com>

Onofre Monzó del Olmo
IES Veles e Vents, Torrent (Valencia)
Universitat de València
<onofre.monzo@uv.es>

Revista Suma
Apartado de correos 286
08911 Badalona (Barcelona)
Tirada: 6 000 ejemplares
Depósito legal: Gr 752-1988
ISSN: 1130-488X
Twitter: @suma_fespm

Consejo Asesor

David Arnau Vera
Universitat de València
<david.arnau@uv.es>

Carmen Azcárate Giménez
Universitat Autònoma de Barcelona
<carmen.azcarate@uab.es>

Javier Bergasa Liberal
IES Navarro Villoslada, Pamplona
<jbergasl@educacion.navarra.es>

Salvador Caballero Rubio
IES Gaia, Sant Vicent del Raspeig (Alicante)
<salvador.caballero@gmail.com

Neila Campos González
Universidad de Cantabria
<camposn@unican.es>

Encarnación Castro Martínez
Universidad de Granada
<encastro@ugr.es>

Abilio Corchete González
IES Suárez de Figueroa, Zafra (Badajoz)
<acorchete@gmail.com>

Olimpia Figueras Mourut de Montppellier
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN
México, México D.F. (México)
<figuerao@cinvestav.mx>

M.ª José Fuente Somavilla
IES Augusto González de Linares, Santander
<mj.fuente@yahoo.es>

Maria Luisa Girondo
Universitat Rovira i Virgili (Tarragona)
<marialuisa.girondo@urv.net>

Arturo Mandly Manso
IES José Manzano, Don Benito (Badajoz)
<armandly@gmail.com>

Rafael Martínez Calafat
IES La Plana, Castelló de la Plana
<rmartinez@vila-real.uned.es>

Ricardo Moreno Castillo
Profesor de matemáticas, Santiago de Compostela
<moreno_castillo@hotmail.es>

Pascual Pérez Cuenca
IES Figueras Pacheco, Alacant
<pascual.prz@gmail.com>

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí, Madrid
<aperez.sanz@gmail.com>

Ana Belén Petro Balaguer
Universitat de les Illes Balears, Palma
<anabelen.petro@uib.es>

Luis Puig Mosquera
IES Sofía Casanova, Ferrol (A Coruña)
<luispuig@edu.xunta.es>

Mariano Real Pérez
Centro de Profesorado, Sevilla
<mariano31415@gmail.com>

Francesc Andreu Rosselló Llompart
Universitat de les Illes Balears, Palma
<cesc.rossello@uib.es>

Manuel José Sastre Álvarez
IES La Corredoria, Oviedo
<mjsastre@telecable.es>

Manuel Sol Puig
Profesor de Matemáticas, Vilassar de Mar
(Barcelona)
<msol@xtec.cat>

Carlos Oswaldo Suarez Alemán
Universidad de Cádiz
<carlososwaldo.suarez@uca.es>

Francisco Villegas Martín
IES Fuente Nueva, El Ejido (Almería)
<pvillegas@thales.cica.es>

96

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Suma es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral cuyo objetivo es tratar sobre los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje y destinada, sobre todo, al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista *Suma* se edita en
Badalona (Barcelona) — España

SUMA

no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas

Normas de publicación

1. Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de *Suma* <articulos@revistasuma.es> o la dirección postal de la co-directora:

   Iolanda Guevara Casanova
   c/ Temple n.º 26, 2º, 2ª
   08911 Badalona

2. Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5 Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CD-ROM, DVD-ROM o *pen drive*).
3. Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato .TXT, .ODT, .RTF, .DOC, .DOCX, adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:
   a) El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

   Y a efectos de comunicación:
   b) El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.
4. Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (por ejemplo, institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión se reemplazarán las citas y referencias bibliográficas por «Autor, 2012» o «Autor y otros, 2012». En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
5. Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…
6. Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, y cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

   Ejemplo: Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.
7. El texto irá una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25 000 caracteres sin contar espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.
8. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes serán enviados preferentemente en formato TIF o EPS, aunque será admisible el formato JPEG, de modo que, a una resolución mínima de 300 ppp, la imagen tenga un tamaño mínimo de 8 × 8 cm, y en color original. Se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo estará claramente identificado y se indicará en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
9. Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto. Si esto no fuera posible, se incorporará como imagen. En tales casos se indicará el lugar que ocupan las fórmulas en el texto, haciendo referencia al nombre del archivo que las contiene.
10. Las referencias bibliográficas se dispondrán al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición.

    Ejemplos:

    Gómez, E. (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E. (1990*a*), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., y J. Pérez (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., J. Pérez y D. Hernández (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.

    En los artículos de revistas y capítulos de libro se seguirá la pauta que se muestra a continuación:

    Gómez, E. (1990), «Título», *Revista,* n.º 31, 35-56.
    Gómez, E. (1990), «Título», en J. Pérez (ed.), *Título,* Editorial, Lugar de edición, 13-23.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: «[…] supone un gran avance (Hernández, 1992)». Si el autor aparece explícitamente en el texto, tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: «[…] según Rico (1993)».
12. Si se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión *y otros.* Por ejemplo: «Bartolomé y otros (1982)», «Gelpi y otros (1987)». Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.
13. Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.
14. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
15. A la recepción del trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.
16. Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser evaluado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo, aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo o recomendarán posibles modificaciones acordes con las normas y criterios de *Suma*.
17. Si los dos informes son positivos, el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos, se desestimará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o no.
18. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
19. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Encarni Amaro Parrado (Tesorería de la FESPM)
C/ La Palma nº1, 1ºB,
23740, Andújar-Jaén.

por correo-e a: admin@fespm.es

Deseo suscribirme a la revista *Suma*:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico:

	Importe (€)
☐ Suscripción a partir del año (3 números) _____	
☐ N.os sueltos _____	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (IBAN ES79 2100 2153 3802 0010 9089)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

IBAN: ⌊⌊⌊⌊ Entidad:⌊⌊⌊⌊ Oficina:⌊⌊⌊⌊ DC⌊⌊ Cuenta⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista *Suma*.

Atentamente (fecha y firma):

Conforme a lo establecido en el art. 5 de la Ley Orgánica 15/1999 de Protección de Datos de Carácter personal, le informamos que los datos de carácter personal que Usted ha facilitado de forma voluntaria se incorporarán a un fichero automatizado cuyo responsable es la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), con el fin de llevar a cabo la gestión integral de nuestra relación comercial, cobrar tarifas, contactarle y enviarle información que pueda ser de su interés, estando prevista la comunicación de los mismos a aquellos profesionales y/o empresas que intervienen en la gestión del servicio solicitado, descritos en el Documento de Seguridad. Si no nos manifiesta lo contario entenderemos que Usted consiente el tratamiento indicado. Puede ejercitar sus derechos de acceso, cancelación, rectificación y oposición, mediante escrito dirigido a la dirección postal de SUMA junto con una fotocopia del DNI.