La inversa y la potencia *n*-ésima de una matriz

Antonio Álvarez Álvarez

SUMA+ núm. 97
pp. 9-14
Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2020 y aceptado en noviembre de 2020

En este artículo estudiamos la relación que existe entre la inversa y la expresión de la potencia *n*-ésima de una matriz regular, y mostramos que si dicha expresión es cierta para todo número natural n, entonces también lo es para $n=-1$. Es más, se cumple para todo número entero n. Usamos para ello la diagonalización y la forma canónica de Jordan, que son técnicas comúnmente utilizadas para calcular potencias de matrices.

Palabras clave: Álgebra Lineal, Matriz inversa, Potencias de matrices, Diagonalización, Forma canónica de Jordan.

The inverse and the nth power of a matrix // In this article we study the relationship between the inverse and the formula of the nth power of a nonsingular matrix, and we show that if this formula is true for any positive integer n, it also holds for $n=-1$. Not only that, it holds for any integer n. We come to this conclusion by using diagonalization and the Jordan canonical form, which are techniques commonly used to calculate powers of matrices.

Keywords: Linear Algebra, Inverse matrix, Powers of matrices, Diagonalization, Jordan canonical form.

Cuando se estudian matrices, uno de los primeros ejercicios que se proponen a los alumnos es el cálculo de la matriz inversa de una matriz regular. También es usual pedirles que obtengan la potencia n-ésima de una matriz para cualquier n natural, por inducción sobre n.

Sin embargo, no es tan frecuente examinar si existe alguna relación entre las expresiones de ambas. Hace poco, propuse a mis alumnos de 2.º de Bachillerato un ejercicio en el que tenían que calcular A^n y A^{-1}, para una cierta matriz regular A. Uno de ellos obtuvo primero, por inducción sobre n (natural), una fórmula para A^n. Luego, para calcular A^{-1}, en lugar de utilizar uno de los métodos usuales (el Gauss-Jordan o el de la matriz adjunta), simplemente sustituyó n por -1 en dicha fórmula. Obviamente, el procedimiento no era correcto. Sin embargo, el resultado sí lo era.

Del estudio de esta cuestión surgió este artículo.

Empecemos considerando, por ejemplo, la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}.$$

Podemos encontrar por inducción su potencia n-ésima:

$$A^n=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix},\ \forall n\in\mathbb{N}. \qquad [1]$$

Por otra parte, es fácil comprobar que es invertible y calcular su inversa (usando, por ejemplo, la matriz adjunta):

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}.$$

Vemos entonces que la igualdad [1] no solo es cierta para cualquier número natural n, sino también para $n=-1$.

Recordemos ahora que si A es invertible, la definición de potencia de A puede extenderse así:

$$A^0=I$$
$$A^{-n}=\left(A^{-1}\right)^n,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Además, tenemos que $\left(A^{-1}\right)^n=\left(A^n\right)^{-1}$, ya que:

$$\left(A^{-1}\right)^n\cdot A^n=A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot\ldots\cdot A^{-1}\cdot A\cdot A\cdot\ldots\cdot A=I.$$

Con lo cual,

$$A^{-n}=\left(A^{-1}\right)^n=\left(A^n\right)^{-1}. \qquad [2]$$

Usando [2] en nuestro ejemplo, obtenemos

$$A^{-n}=\begin{pmatrix}1&-2n\\0&1\end{pmatrix},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Y, por último, está claro que [1] también es cierta para $n=-1$, ya que $A^0=I$.

La conclusión es que [1] es cierta para cualquier número entero n.

Es natural entonces preguntarse si ocurre lo mismo con cualquier matriz invertible. En otras palabras, si conocemos la expresión de la potencia n-ésima de una matriz regular para todo n natural, ¿podemos decir que es cierta también para $n=-1$, y, por extensión, para cualquier entero n?

Para estudiar esta cuestión supondremos que $A\in M_m(\mathbb{C})$, y es invertible. Distinguiremos tres casos.

CASO 1. LA MATRIZ ES DIAGONAL

La matriz A solo tiene elementos no nulos en la diagonal principal y estos son todos no nulos:

$$A=\begin{pmatrix}a_1&\ldots&0\\&\ddots&\\0&\ldots&a_m\end{pmatrix}.$$

Por inducción sobre n, tenemos:

$$A^n=\begin{pmatrix}a_1^n&\ldots&0\\&\ddots&\\0&\ldots&a_m^n\end{pmatrix},\quad \forall n\in\mathbb{N}. \qquad [3]$$

Por otra parte, se sabe que:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1/a_1&\ldots&0\\&\ddots&\\0&\ldots&1/a_m\end{pmatrix}.$$

Y aplicando [2], tenemos:

$$A^{-n}=\begin{pmatrix}a_1^{-n}&\ldots&0\\&\ddots&\\0&\ldots&a_m^{-n}\end{pmatrix},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Finalmente, dado que $A^0=I$, es obvio que [3] también se cumple para $n=0$.

Por lo tanto, [3] es cierto para cualquier entero n.

CASO 2. LA MATRIZ ES DIAGONALIZABLE

Decimos que una matriz cuadrada es *diagonalizable* si es semejante a una matriz diagonal, es decir, si existen una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que:

$$A=P\cdot D\cdot P^{-1}.$$

En tal caso, para todo natural n, tenemos

$$\begin{aligned}A^n&=\left(P\cdot D\cdot P^{-1}\right)^n=\\&=P\cdot D\cdot P^{-1}\cdot P\cdot D\cdot P^{-1}\cdot\ldots\cdot P\cdot D\cdot P^{-1}=\\&=P\cdot D^n\cdot P^{-1}.\end{aligned} \qquad [4]$$

Esta igualdad nos muestra que, si una matriz es diagonalizable, entonces es muy sencillo calcular sus potencias ya que basta calcular las de la matriz diagonal semejante a ella.

Por otra parte, [4] también es cierta para $n=-1$, ya que:

$$A^{-1}=\left(P\cdot D\cdot P^{-1}\right)^{-1}=$$
$$=\left(P^{-1}\right)^{-1}\cdot D^{-1}\cdot P^{-1}=P\cdot D^{-1}\cdot P^{-1}.$$

Con lo que, para todo natural n, obtenemos:

$$A^{-n}=\left(A^{n}\right)^{-1}=\left(P\cdot D^{n}\cdot P^{-1}\right)^{-1}=$$
$$=\left(P^{-1}\right)^{-1}\cdot\left(D^{n}\right)^{-1}\cdot P^{-1}=P\cdot D^{-n}\cdot P^{-1}.$$

Por último, [4] también se cumple para $n=0$, ya que $A^0=P\cdot D^n\cdot P^{-1}=I$. Por lo tanto, [4] es cierta para cualquier entero n.

Ejemplo

Consideremos la matriz: $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$.

Es sencillo comprobar que es invertible y diagonalizable. Esta es una diagonalización de A:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}.$$

Y entonces, para todo número natural n:

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}^n=$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}^n\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&3^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\-1+3^n&3^n\end{pmatrix}.$$

Por otro lado, podemos calcular su inversa mediante alguno de los métodos usuales:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-2/3&1/3\end{pmatrix}.$$

Como era de esperar, vemos que la fórmula para A^n es también cierta para $n=-1$.

Observación

Como es sabido, la diagonalización de una matriz no es única. Si permutamos los elementos de la diagonal principal de D, que son los valores propios de A, y las columnas de P, que son sus correspondientes vectores propios, obtenemos otra diagonalización de A. Más aún, cualquier vector propio multiplicado por un escalar no nulo es también un vector propio del mismo valor propio. Sin embargo, es claro que A^n no depende de la elección de P y D.

En el ejemplo anterior, otra diagonalización de A es:

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-1/2&0\end{pmatrix},$$

y entonces podemos calcular su potencia n-ésima así:

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}^n=$$
$$=\begin{pmatrix}0&-2\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}^n\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-1/2&0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}0&-2\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3^n&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-1/2&0\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&0\\-1+3^n&3^n\end{pmatrix}.$$

Otra observación

Dado que los valores propios de una matriz son las raíces de su ecuación característica, si A es una matriz de números reales, es posible que tenga valores propios complejos no reales. En tal caso, algunos de los elementos de A^n serán complejos no reales. Es lo que sucede, por ejemplo, con la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Su ecuación característica es $\lambda^2+1=0$, sus valores propios son $\lambda=i$ y $\lambda=-i$, con vectores propios asociados $(i,1)$ y $(-i,1)$. Así que una diagonalización de A es:

$$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i&i\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i/2&1/2\\-i/2&1/2\end{pmatrix},$$

de donde:

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n =$$

$$= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-i)^n & 0 \\ 0 & i^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (-i)^n + i^n & -i \cdot \left((-i)^n - i^n\right) \\ i \cdot \left((-i)^n - i^n\right) & (-i)^n + i^n \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, es sencillo calcular la inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De nuevo, observamos que la fórmula para A^n también se satisface para $n = -1$.

CASO 3. LA MATRIZ NO ES DIAGONALIZABLE

En este caso recurriremos al teorema de Jordan, que nos dice que toda matriz cuadrada es *casi diagonalizable*.

Recordemos primero dos definiciones:

Definición

Un *bloque de Jordan* $J_k(\lambda)$ es una matriz de orden k de la forma:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

$$J_1(\lambda) = (1), \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definición

Una *matriz de Jordan* $J \in M_m(\mathbb{C})$ es una matriz diagonal por bloques en la que cada bloque es un bloque de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_q}(\lambda_q) \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, J es suma directa de bloques de Jordan:

$$J = J_{m_1}(\lambda_1) \oplus J_{m_2}(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus J_{m_q}(\lambda_q),$$
$$\text{con } m_1 + m_2 + \ldots + m_q = m.$$

Ahora podemos enunciar el teorema de Jordan.

Teorema

Dada una matriz $A \in M_m(\mathbb{C})$, existen una matriz invertible P y una matriz J tales que $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$, donde J es una matriz de Jordan.

Entonces, de forma análoga al caso anterior, tenemos que $A^n = P \cdot J^n \cdot P^{-1}$, para todo entero n, y, al igual que antes, la falta de unicidad no supone un problema.

Así que solo nos queda comprobar qué ocurre con una matriz de Jordan. Ahora bien, si tenemos en cuenta las siguientes propiedades:

1) $\left(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k\right)^n = A_1^n \oplus \cdots \oplus A_k^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2) Si $A_1, \ldots, A_k$ son invertibles: $\left(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k\right)^{-1} = A_1^{-1} \oplus \cdots \oplus A_k^{-1}$
3) $\left(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k\right)^0 = A_1^0 \oplus \cdots \oplus A_k^0 = I,$

la cuestión se reduce a considerar un bloque de Jordan.

Un bloque de Jordan puede expresarse así:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ & \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \\ 0 & & \cdots & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \lambda \cdot I_k + J_k(0).$$

Utilizando el binomio de Newton y el hecho de que λI_k y $J_k(0)$ conmutan, tenemos:

$$J_k(\lambda)^n = \left[\lambda I_k + J_k(0)\right]^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} J_k(0)^i.$$

Puede comprobarse que todos los elementos de $J_k(0)^i$ son cero excepto los que ocupan la *i*-ésima super-diagonal (es decir, la *i*-ésima diagonal por encima de la diagonal principal), que son todos iguales a 1. En particular, $J_k(0)^i = 0$ si $i \geq k$.

Por lo tanto, la potencia $J_k(\lambda)^n$, para todo natural n, es:

$$\begin{pmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} \\ 0 & & \cdots & & \lambda^n \end{pmatrix}. \qquad [5]$$

Esta igualdad también es cierta para $n = 0$ ya que:

$$\binom{0}{i} = 0, \text{ para } i > 0.$$

Calculemos ahora $J_k(\lambda)^{-1}$. Observemos primero que, dado que $J_k(0)^k = 0$, se cumple:

$$\left[I_k + t\, J_k(0)\right] \cdot \left[I_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i t^i J_k(0)^i\right] = I_k.$$

Así que,

$$\left[I_k + t\, J_k(0)\right]^{-1} = \left[I_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i t^i J_k(0)^i\right].$$

Y por tanto:

$$J_k(\lambda)^{-1} = \left[\lambda I_k + J_k(0)\right]^{-1} = \lambda^{-1}\left[I_k + \lambda^{-1} J_k(0)\right]^{-1} =$$

$$= \lambda^{-1}\left[I_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \lambda^{-i} J_k(0)^i\right] =$$

$$= \lambda^{-1} I_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \lambda^{-i-1} J_k(0)^i.$$

Es decir,

$$J_k(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \cdots & (-1)^{k-1}\lambda^{-k} \\ & \lambda^{-1} & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda^{-2} \\ 0 & \cdots & & \lambda^{-1} \end{pmatrix}. \qquad [6]$$

Recordemos ahora la definición de *número combinatorio generalizado* para $k \in \mathbb{N}$ y r arbitrario:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}.$$

De ella se obtiene que:

$$\binom{-1}{k} = \frac{-1(-2)\ldots(-k)}{k!} = (-1)^k.$$

Y entonces es claro que la igualdad [5] se cumple también para $n = -1$.

Solo nos resta ya comprobar si también es cierta para cualquier exponente entero negativo. Para ello vamos a expresarla en la forma:

$$J_k(\lambda)^n = \lambda^n I_k + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} J_k(0)^i, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consideramos la siguiente matriz:

$$\lambda^{-n} I_k + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{-n}{i} \lambda^{-n-i} J_k(0)^i.$$

Si multiplicamos $J_k(\lambda)^n$ por ella (no importa el orden), conmutan. Obtenemos:

$$I_k + \sum_{i=1}^{k-1} b_i \lambda^{-i} J_k(0)^i,$$

$$\text{donde: } \; b_i = \sum_{j=0}^{i} \binom{-n}{j}\binom{n}{i-j}, \quad i = 1,\ldots,k-1.$$

Pero por la identidad de Chu-Vandermonde, tenemos que:

$$b_i = \binom{-n+n}{i} = \binom{0}{i} = 0, \quad i = 1,\ldots,k-1.$$

Así que el producto se reduce a I_k, y esto significa que:

$$\left[J_k(\lambda)^n\right]^{-1} = \lambda^{-n} I_k + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{-n}{i} \lambda^{-n-i} J_k(0)^i.$$

O lo que es lo mismo, para todo natural n tenemos:

$$J_k(\lambda)^{-n} = \begin{pmatrix} \lambda^{-n} & \binom{-n}{1}\lambda^{-n-1} & \binom{-n}{2}\lambda^{-n-2} & \cdots & \binom{-n}{k-1}\lambda^{-n-k-1} \\ 0 & \lambda^{-n} & \binom{-n}{1}\lambda^{-n-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{-n}{2}\lambda^{-n-2} \\ & & & & \binom{-n}{1}\lambda^{-n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda^{-n} \end{pmatrix},$$

Por lo tanto, la fórmula [5] es cierta para cualquier número entero n.

Pueden examinarse ejemplos de este último caso como, por ejemplo, la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Para ello sería conveniente utilizar algún programa de cálculo computacional.

Hemos mostrado, así, que si conocemos la expresión de la potencia n-ésima de una matriz regular en función de n natural, entonces podemos afirmar que la matriz inversa la satisface, es decir, que dicha expresión es cierta también para $n=-1$. Más aún, también es cierta para todo número entero n.

Consideraciones finales. Uso en el aula

La demostración anterior excede, obviamente, el nivel del alumnado de bachillerato. Considero, sin embargo, que puede ser de interés para el profesorado y también para el alumnado universitario de matemáticas u otros estudios afines.

En cualquier caso, al resultado que aquí se ha expuesto puede sacársele partido en el aula de 2.º Bachillerato. Ya solo el que los alumnos conozcan la existencia de esta conexión, seguramente inesperada para muchos de ellos, entre la potencia n-ésima y la matriz inversa puede ser útil para captar su atención y despertar su curiosidad. Con este propósito, pueden proponerse a los alumnos actividades tales como:

- — Dada una cierta matriz cuadrada no regular, calcular su potencia n-ésima. Comprobar que no tiene inversa.
- — Dada una matriz cuadrada regular, calcular (por los métodos usuales) su inversa, obtener por inducción su potencia n-ésima y comprobar la relación existente entre ambas expresiones.
- — Buscar más ejemplos y comprobar que dicha relación se cumple en todos ellos.
- — Demostrarla para matrices diagonales.
- — Reflexionar sobre la idoneidad de la notación de matriz inversa.

Referencias bibliográficas

AYRES, F. (1962), *Theory and Problems of Matrices*, McGraw-Hill, Nueva York.

BARO, E. (2018), *Forma canónica de Jordan* (apuntes), Universidad Complutense, <http://www.mat.ucm.es/~eliasbaro/docencia/AL1415/ApuntesJordan.pdf> (accedido en marzo de 2021).

DOLGACHEV, I. V. (2009), *Teaching. Math. 513. Jordan form*, University of Michigan, <http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/jordan.pdf> (accedido en marzo de 2021).

HOLT, D., y D. RUMYIN (2009), *Algebra I. Advanced Linear Algebra (MA 251). Lecture notes*, University of Warwick, UK, <http://homepages.warwick.ac.uk/~masdf/alg1/lec_notes_2009.pdf> (accedido en marzo de 2021).

HORN, R. A., y C. R. JOHNSON (2012), *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

Wolfram Alpha, <https://www.wolframalpha.com/>.

Antonio Álvarez Álvarez

IES José de Mora, Baza (Granada)

<ant.alvarez.alvarez@gmail.com>