Sobre el origen del concepto de demostración y del método axiomático

Abilio Orts Muñoz

SUMA+ núm. 97
pp. 15-24
Artículo recibido en *Suma* en septiembre de 2019 y aceptado en septiembre de 2020

Uno de los conceptos centrales en matemáticas es el de demostración. Durante la época griega clásica se sintió, por primera vez, la necesidad de convertir unas matemáticas prácticas, operativas, en un cuerpo de conocimientos fundamentados por la idea de demostración. En el presente artículo se estudia el origen de dicho concepto así como los inicios del método axiomático. Para ello, se analizan las aportaciones de Aristóteles, los estoicos y Euclides.

Palabras clave: Historia de la Matemática, Geometría, Demostración, Método axiomático.

On the origin of the mathematical concept of demonstration and the axiomatic method // Demonstration is one of the most important concepts in mathematics. During the Greek period it was noticed, for the first time, the need of turning the operative mathematics into a set of knowledge based on the idea of demonstration. In this article it is studied the origin of this concept as well as the beginnings of the axiomatic method. It is analysed the contributions of Aristotle, the Stoics and Euclid.

Keywords: History of Mathematics, Geometry, Demonstration, Axiomatic method.

La demostración es un concepto central en matemáticas que permite elevar a la categoría de teorema o verdad matemática un razonamiento que hasta ese momento no era más que una conjetura. La demostración puede considerarse como el culmen del razonamiento, la aplicación de la razón al conocimiento de las cosas. La matemática como ciencia demostrativa es conocimiento razonado y científico fuera de toda discusión. Es necesario, pues, que los estudiantes conozcan la importancia de la demostración en nuestra disciplina.

Demostrar es dar una argumentación correcta de que algo es el caso a partir de una prueba o deducción lógicamente concluyente, es decir, mostrar que la conclusión se sigue necesariamente de las premisas aducidas. Desde un punto de vista lógico, toda demostración supone una relación lógica de implicación o consecuencia entre las premisas y la conclusión. Desde un punto de vista epistemológico, una demostración es una prueba deductiva que nos hace saber que algo, efectivamente, es o no es el caso. Además, toda demostración tiene un valor cognoscitivo: nos da a conocer la existencia de la relación lógica de implicación y nos asegura el conocimiento de la verdad de la conclusión una vez conocida la verdad de las premisas. En muchas ocasiones, además, nos da a entender la razón interna o la causa estructural de que algo sea como es y no sea de otra manera (Vega, 1990). Realmente, lo que establece la demostración rigurosa no es la verdad de la citada proposición, sino más bien una comprensión condicional de que la proposición es verdadera siempre que sean verdaderos los postulados de los que se parte. Para evitar una regresión al infinito, es necesario aceptar la verdad de algunas proposiciones sin demostración: son los postulados o axiomas.

En el presente trabajo se pretende mostrar los inicios del concepto de demostración ligado a un saber abstracto y general, la matemática.

Paternidad de la idea de demostración

Cuando intentamos situar el inicio de la idea de demostración no estamos pensando en un hecho histórico concreto sino que nos estamos refiriendo a algo más que al uso de una prueba, aunque se trate de una prueba concluyente. Esto se debe al hecho de que estar en posesión de dicha prueba no implica el que se tenga una idea exacta de demostración o que se reconozca los supuestos lógicos y las virtudes metódicas de una argumentación. Se trata, pues, de diferenciar entre el uso de una prueba convincente y la idea precisa de demostración. Es en este sentido en el que podemos situar la primera demostración en el entorno del mundo griego pues fueron los primeros en formarse un concepto reflexivo de demostración y en disponer de un arquetipo metódico.

Para Vega (1990) los griegos en el siglo IV a. C. eran conscientes de la idea de demostración en el sentido fuerte de demostrar frente a otros usos menos formales y más intuitivos (en el sentido de mostrar y no en el matemático de aducir una prueba deductiva lógicamente concluyente) usados por babilonios o egipcios. Esto es, los griegos eran conocedores de la diferencia entre las pruebas meramente ostensivas como una evidencia práctica, una verificación empírica o una comprobación (*apóphasis*) y la argumentación lógicamente concluyente (*apódeixis*), la demostración propiamente dicha. Dentro de las diferentes formas de argumentación, los griegos diferenciaban entre la modalidad directa, esto es, aquella que deriva una consecuencia a partir de unas premisas previamente asumidas, y la indirecta, aquella que reduce una suposición inicial a un absurdo, a una contradicción o a una incompatibilidad lógica, y también, la que responde a la contraposición del condicional. De hecho, Aristóteles presenta en los *Analíticos*, los supuestos y condiciones lógicas de ambas, así como el tratamiento de la relación «seguirse lógicamente de» expresada entre las premisas y la conclusión de un silogismo.

[...] lo que establece la demostración rigurosa no es la verdad de la citada proposición, sino más bien una comprensión condicional de que la proposición es verdadera siempre que sean verdaderos los postulados de los que se parte. Para evitar una regresión al infinito, es necesario aceptar la verdad de algunas proposiciones sin demostración: son los postulados o axiomas.

Parece difícil pensar en una fundación unívoca y definitiva de las ideas de demostración y de método deductivo. Es más lógico inclinarse por un proceso de elaboración gradual en el que diferentes escuelas aportan sus enseñanzas (pitagóricos, eleáticos, sofistas, etc.). Los pitagóricos fueron, posiblemente, los primeros que se separaron de la tradición práctica egipcia y babilónica e incorporaron una discusión filosófica de los principios. Hablan de semejanzas, de analogías, de formas y de asignaciones, pero el tipo de argumentación empleado para hacer valer sus teorías no resiste un análisis lógico riguroso. No hay demostraciones, ni pretensiones de ofrecerlas. Por ello, Aristóteles critica esta manera de argumentar (Cañón, 1993). Para Kline (1992) la contribución más esencial de los griegos a la matemática fue su insistencia en que todos los resultados debían ser establecidos deductivamente a partir de un sistema explícito de axiomas. Pero, en su opinión, parece muy dudoso que los pitagóricos del periodo antiguo o medio exigieran demostraciones deductivas, explícitas o implícitas, basadas en un sistema de cualquier tipo. La cuestión acerca de si probaron o no el teorema de Pitágoras ha sido muy discutida y la conclusión generalmente aceptada es la de que probablemente no. La demostración que aparece en los *Elementos* es atribuida por Proclo al propio Euclides.

Tampoco parece que el planteamiento platónico se sostenga ante un análisis serio de la noción de demostración. Para Platón los objetos matemáticos pertenecen al mundo de las ideas y las proposiciones de la matemática son verdades universales pues expresan las leyes con las que se conformará el progreso del tiempo. Por tanto sus leyes son las del modelo eterno e inmutable, no hay nada contingente en ellas. En opinión de Vega (1990), Platón no tiene una conciencia clara de la idea de demostración, ni de su fuerza lógica.

En cualquier caso, la generación de las ideas de demostración y de método deductivo fue un proceso que bebió de diversas fuentes: la filosofía, la dialéctica y, claro está, la matemática. Las tres líneas conviven en el seno de la Academia platónica por lo que este sería, de haber alguno, el lugar y el momento de la constitución de tales ideas (Vega, 1990).

Es conocido el interés griego por el debate público sobre cuestiones políticas, éticas o científicas. Se trataba de la exposición y discusión de argumentos con vistas a convencer a alguien de algo. Los sofistas son un claro exponente de ello. Este dinamismo intelectual supone una novedad respecto a otras culturas (Egipto, Mesopotamia o China), en las que resultaba tremendamente complicado concebir teorías alternativas a la doctrina religiosa tradicional (Millán, 2004). La separación griega entre la política y la religión del estado junto a la ausencia de un poder estatal envolvente, hacía que la autoridad se distribuyese entre ciudadanos iguales, por lo que, al no recurrir a revelaciones religiosas ni a la tradición, la única manera de imponer las creencias propias era recurrir a la persuasión y a los argumentos (Solís y Sellés, 2005).

La filosofía de la ciencia griega insistió en los procedimientos de crítica y argumentación, de refutación y prueba, lo que condujo a la lógica, a las demostraciones matemáticas y a la reflexión de segundo grado sobre el método y las relaciones entre los diferentes saberes. Esta necesidad de justificación como manera definitiva de derrotar a los rivales en el ágora, llevó por primera y única vez en la historia a la invención de las teorías de la ciencia, lo que alcanzó su cenit en las épocas de Aristóteles y el helenismo (Solís y Sellés, 2005). Solo el razonamiento abstracto, basado en principios generales y no en las cosas concretas, era conocimiento verdadero, demostrado.

Esta necesidad de justificación como manera definitiva de derrotar a los rivales en el ágora, llevó por primera y única vez en la historia a la invención de las teorías de la ciencia, […]. Solo el razonamiento abstracto, basado en principios generales y no en las cosas concretas, era conocimiento verdadero, demostrado.

Es importante mencionar en este punto un factor complementario. Se trata de la aparición de una clase social ociosa, exenta de las preocupaciones por la supervivencia, que podía dedicarse al cultivo de las matemáticas como una actividad estética, dejando la matemática con finalidad utilitaria para los esclavos. Tanto el carácter griego de las matemáticas, como su concepción como una ciencia deductiva, estuvieron influidos, en cierto grado, por esta forma de estratificación social. En aquellas civilizaciones que no se dio esta circunstancia, las matemáticas tuvieron pocas posibilidades de trascender sus orígenes utilitarios (Gheverghese, 1996).

Además, la transmisión escrita de las ideas posibilitó el sensacional desarrollo de las ciencias en Grecia. La lengua griega se diseñó como un sistema fonético de vocales y consonantes a partir de los signos consonánticos fenicios (Boyer, 1986). Esto posibilitó un acceso a la lectura y escritura que en otras culturas estaba reservado únicamente a una casta administrativa y sacerdotal. Así, cualquier ciudadano podía acceder al saber acumulado y permitir que el resto accediera a sus ideas innovadoras. Además, al poner por escrito las ideas, se produce un proceso de racionalización que desemboca en una mayor precisión a la hora de definir los conceptos y elaborar las teorías.

Con respecto a la matemática, es interesante destacar que en estos momentos se venían configurando unos procedimientos de análisis geométrico basados en las condiciones de una solución posible para determinados problemas o en la determinación de los supuestos de los que cabría derivarse la solución una vez que dichos problemas están resueltos. Pero pronto se pasó a investigar igualmente la verdad de ciertas proposiciones y la prueba deductiva de algunos teoremas. Es posible además que su confluencia con unas formas de organización deductiva, como las que ofrecían los primeros tratados de *Elementos*, abriera una perspectiva más general. Se establece una íntima relación entre la noción de demostración y la geometría, al tratar esta última de proposiciones universales (en geometría cuando hablamos de la línea *AB* no nos referimos a una línea particular, sino a todas aquellas que cumplen una determinada condición), (Vega, 1990).

Por tanto, todo parece indicar que no será en las primeras compilaciones de *Elementos* matemáticos ni en los escritos de Platón donde se encuentren las primicias de un método axiomático, sino en los *Analíticos* de Aristóteles y, sobre todo, en los *Elementos* de Euclides. Aristóteles concibe la teoría de la demostración científica propuesta en los *Segundos Analíticos* en sus últimos años en la Academia platónica. Además, es él quien expone las condiciones lógicas que hacen de la demostración por reducción al absurdo una contraprueba rigurosamente definitiva (Vega, 1990).

Respecto a la paternidad de la idea de demostración, Vega (1990) la atribuye a Aristóteles. De esta forma, la primera prueba lógicamente concluyente de la que tenemos noticia (procedente de medios pitagóricos de la segunda mitad del siglo V a. C.) se trata de la reducción al absurdo de la conmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado. Aristóteles en los *Primeros Analíticos* muestra que de la suposición de su conmensurabilidad se sigue la contradicción lógica de que un número pueda ser par e impar a la vez. De idéntica opinión son Solís y Sellés (2005) para quienes la prueba sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$ se remonta a mediados del siglo V a. C., y la noticia que da Aristóteles revela el carácter pitagórico de la prueba por la importancia de la oposición par/impar. Lo absolutamente novedoso es que lo demostrado es inseparable de la prueba, abstracta y general, mientras que en los demás casos, como el teorema de Pitágoras o las reglas algebraicas babilónicas, las proposiciones fueron conocidas muchos siglos antes de su demostración (Solís y Sellés, 2005).

Esta invención de la idea de demostración se fundamenta sobre la aparición de tres aspectos (Vega, 1990): la construcción y el uso inequívoco de argumentos deductivos efectivamente concluyentes; la conciencia expresa de la capacidad demostrativa que poseen tales argumentos en virtud de las relaciones entre las premisas y la conclusión; y la intención de organizar deductivamente un cuerpo de conocimientos basado en esta concepción deductiva.

Silogística aristotélica

La teoría aristotélica de la demostración representa la primera reflexión sobre algunos conceptos implicados en la investigación científica, como son la demostración, la explicación, la definición, la conformación deductiva de las teorías o la lógica subyacente. El sistema aristotélico se constituyó en el referente epistemológico que iba a condicionar el desarrollo intelectual de las civilizaciones islámica y cristiana hasta el siglo XVII, y que no sería superado hasta dos siglos más tarde con el desarrollo generalizado de la lógica matemática.

Esta teoría se encuentra desarrollada en dos tratados del *Organon*, los *Primeros* y *Segundos Analíticos* (estos últimos también llamados *Analíticos Posteriores*). El primero se ocupa de la estructura lógica de la demostración, esto es, del análisis de las argumentaciones según su forma y, para ello, Aristóteles introduce el silogismo o forma lógica que revisten las demostraciones directas. El segundo se ocupa de las condiciones epistemológicas y metodológicas de la demostración. El sistema silogístico constituye la primera teoría de deducción lógica.

Tres son los factores que confluyen en la teoría silogística aristotélica. En primer lugar aspectos matemáticos: durante esta época comienzan a circular tratados de *Elementos* y ya son conocidas teorías generales, como la teoría de proporciones. Es decir, ya existe una cierta tradición de pruebas de teoremas y de resolución de problemas. En segundo lugar la Academia platónica, donde confluyen diferentes líneas de pensamiento que favorecen el desarrollo de la argumentación y la prueba; y, por último, la influencia de los sofistas, que facilita el estudio de las condiciones del discurso racional (Vega, 1990).

Para Aristóteles es necesario descubrir cómo podemos obtener el conocimiento científico, aquel que no puede ser de otro modo a como es y que, por ello, es válido universalmente. Así, usa el término silogismo de dos formas. La primera, relativamente amplia, designa la argumentación deductiva lógicamente válida. El otro uso, más estricto que el primero, hace referencia a un esquema deductivo. Designa un criterio sistemático de convalidación lógica. Aristóteles sostiene que toda demostración científica es un silogismo, entendido en este segundo significado, a pesar de la dificultad de adaptar a estos algunas demostraciones matemáticas, como la reducción al absurdo. Caracteriza así un proceso que conduce necesariamente del conocimiento de determinadas proposiciones al conocimiento de otras que participan del carácter de necesidad y certeza de las primeras. Lo que asegura la validez de esta inferencia es el nexo lógico.

El sistema silogístico contiene elementos de tres tipos: esquemas de términos; esquemas enunciativos que afirman o niegan algo de algo y esquemas argumentales. Aristóteles centra su atención en los silogismos de tres términos: dos premisas que tienen un término medio común, y una conclusión formada por los términos extremos. Tanto las premisas como la conclusión establecen una relación de cuantificación entre dos términos, un sujeto y un predicado. Esta cuantificación viene expresada, en notación medieval (que es como se cita actualmente la silogística aristotélica en los tratados de lógica modernos), por las vocales A (universal afirmativa: todo S es P), E (universal negativa: ningún S es P), I (particular afirmativa: algún S es P), O (particular negativa: algún S no es P). Aristóteles pensaba que lo característico de todo enunciado con interés para la ciencia afirmaba o negaba, universal o parcialmente, un término general de otro término general.

Atendiendo al papel que desempeña el término medio en las premisas, Aristóteles distingue tres figuras:

1.ª Figura: sujeto + predicado
A—B
B—Γ
A—Γ

2.ª Figura: predicado + predicado
M—N
M—Ξ
N—Ξ

3.ª Figura: sujeto + sujeto
Π—Σ
P—Σ
Π—P

En la representación de las tres figuras aristotélicas, se ha usado la notación de Aristóteles en la que la primera letra corresponde al predicado y la segunda al sujeto.

Para que un silogismo sea efectivamente científico debe partir de premisas verdaderas e inmediatas, más conocidas que la conclusión y que sean causa de ella. También puede partirse de premisas que sean conclusión de un razonamiento anterior.

Con posterioridad a Aristóteles, las diversas construcciones silogísticas posibles dentro de cada figura vinieron a llamarse modos. Aristóteles distingue 14 modos válidos de entre los 192 posibles ($3 \times VR_{4,3}$). Si llamamos M al término medio, P al menor y G al mayor obtenemos (en notación medieval):

1.ª Figura: Barbara (si todo M es G y todo P es $M \Rightarrow$ $\Rightarrow$ todo P es G); Celarent; Darii; Ferio.
2.ª Figura: Cesare (si ningún G es M y todo P es $M \Rightarrow$ ningún P es G); Camestres; Festino; Baroco.
3.ª Figura: Darapti (si todo M es G y todo M es P $\Rightarrow$ algún P es G); Felapton; Disamis; Datisi; Bocardo; Ferison.

Aristóteles reconoce estos modos como esquemas lógicamente válidos y como pautas de convalidación silogística. Para él solo los silogismos de la primera figura son perfectos o completos, pues resulta evidente de inmediato la transitividad de la conexión entre los términos. Por ello trata de reducir cualquier silogismo de la segunda o tercera figura a uno de la primera. Hay dos modos, sin embargo, que no pueden reducirse mediante un proceso de conversión entre enunciados. Aristóteles recurre, entonces, al procedimiento de reducción indirecta o *per impossibile*. Aquí podemos ver un objetivo idéntico al de un geómetra que trata de construir un sistema deductivo partiendo de un pequeño número de axiomas y elige para ello aquellos que de algún modo le parecen más naturales. De esta forma, la silogística aristotélica se configura como una teoría de la deducción, que adopta los silogismos perfectos como esquemas válidos primitivos a partir de los cuales obtener la validez del resto por reducción a uno de ellos, antes que como una teoría de la verdad lógica. Esto es así porque el modelo de conocimiento racional aristotélico son las matemáticas, que demuestran sus proposiciones a partir de primeros principios indemostrables.

Entre las premisas y la conclusión de un silogismo hay, por tanto, una relación lógica y epistemológica. Desde el punto de vista lógico está claro que la conclusión se sigue lógicamente de las premisas y, desde el punto de vista epistemológico, esa relación se traduce en la prioridad entre lo anterior y mejor conocido y lo posterior y peor conocido. Se inicia así con Aristóteles una conexión íntima entre demostración y explicación: declarar la causa de algo es dar una explicación de por qué es de ese modo y no puede ser de otra manera.

En opinión de Cañón (1993), el lugar desde el que Aristóteles funda su posición ya no es la ontología (como ocurría en Platón) sino que pasa a ser el método. La axiomática aristotélica, matriz de los sistemas lógicos construidos en la historia, es también, matriz para la formulación del método matemático.

Para Aristóteles una definición nos dice lo que es una cosa, pero no que esa cosa exista. La existencia de las cosas definidas debe ser probada excepto en el caso de algunas cosas primarias.

Para Aristóteles una definición nos dice lo que es una cosa, pero no que esa cosa exista. La existencia de las cosas definidas debe ser probada excepto en el caso de algunas cosas primarias. Hay dos tipos de proposiciones inmediatas, asumidas como primeros principios sin demostración: los axiomas y las tesis. Los primeros tienen carácter lógico y su conocimiento es necesario. Dos ejemplos de axiomas son la ley del tercio excluso o el principio de contradicción. Las tesis se refieren a conocimientos específicos de la ciencia. Dentro de estas, Aristóteles distingue entre definiciones e hipótesis. Estas últimas afirman que se da un género de cosas, por ejemplo, la existencia de puntos y rectas.

La demostración estoica

Los estoicos se ocupan de los argumentos a partir de hipótesis. Centran su análisis lógico en el examen de las relaciones deductivas que se dan entre las proposiciones como elemento indivisible antes que entre sus términos separados, sujeto y predicado (Vega, 1990). Para ellos una demostración es una argumentación concluyente, reveladora de una conclusión no patente. Disponían de dos criterios para reconocer la forma correcta que permite reconocer los argumentos lógicamente concluyentes. Según el primer criterio (asistemático), un argumento es lógicamente concluyente siempre y cuando al ser reformulado como una proposición condicional adquiere la forma de una implicación verdadera o correcta.

El segundo criterio (sistemático) de validez es un sistema lógico de esquemas de argumentación concluyente. Todo argumento que se amolde a los términos de uno de los esquemas del sistema Σ constituye un argumento concluyente cuya validez se pone de manifiesto mediante su reducción canónica al lenguaje del sistema Σ. El lenguaje de Σ consta de expresiones ordinales esquemáticas (lo primero, lo segundo); un conjunto de conectivas: la condicional, la conjuntiva, la disyuntiva y un conjunto de esquemas deductivos formados por dos premisas y una conclusión (Mates, 1985). Podríamos considerar un esquema deductivo como la expresión normalizada de un patrón de deducción. Un esquema deductivo pertenecerá a Σ si y solo si es un modo indemostrado de Σ o es reducible a los términos de alguno de los modos indemostrados de Σ. Hay cinco modos indemostrados:

Si lo primero, lo segundo
pero lo primero
luego lo segundo

Si lo primero, lo segundo
pero no lo segundo
luego no lo primero

No a la vez lo primero y lo segundo
pero lo primero
luego no lo segundo

O lo primero o lo segundo
pero lo primero
luego no lo segundo

O lo primero o lo segundo
pero no lo segundo
luego lo primero

Hay diferencias sustanciales entre la concepción aristotélica y estoica de la demostración. La primera es un medio de reconstrucción y sistematización del conocimiento, de lo ya sabido: las premisas adelantan la explicación de por qué algo es así y no puede ser de otra manera, y la demostración se remata con la descripción del caso buscado; su fuerza proviene de su dignidad metodológica. En cambio los estoicos, condicionados por la crítica escéptica (¿cómo puede uno asegurarse de que ha dado precisamente con la verdad?), tienen especial interés en la demostración en orden a saber cómo distinguir verdades y falsedades mediante argumentos demostrados y muestran un notable desinterés por la organización deductiva de un cuerpo de conocimientos. El silogismo estoico representa la búsqueda de una explicación del fenómeno considerado. La idea estoica de demostración adquiere así mayores visos heurísticos que el silogismo científico aristotélico (Vega, 1990).

Elementos de Euclides

Los *Elementos* de Euclides son un tratado de 13 libros, que incluye 132 definiciones, 5 postulados, 5 nociones comunes o axiomas y 465 proposiciones (93 problemas y 372 teoremas).

La tradición geométrica hasta Euclides ya había configurado una geometría elemental como ciencia deductiva en la que a partir de ciertas proposiciones geométricas, asumidas como verdaderas sin demostración, se derivan las restantes. Se pensaba que no era posible acceder al conocimiento matemático a menos que se tuviera una instrucción previa de unos elementos que permitieran entender el resto de la ciencia. Así, la geometría fue el primer cuerpo de conocimientos presentado de forma axiomatizada. A partir de este momento la geometría se configuró como el paradigma de la sistematización deductiva.

El tratado euclídeo representa la culminación de la tradición de *Elementos* que comienza con Hipócrates de Quíos (Sarton, 1980). Esta primera compilación de *Elementos* respondía al intento de resolver problemas y al empleo, para ello, de ciertos principios instrumentales. Dos son los aspectos que destacan del tratado de Euclides frente a los anteriores, uno de tipo didáctico, en referencia a sus virtudes expositivas, y otro de carácter metodológico, en referencia a la sistematización deductiva del cuerpo de conocimientos (Vega, 1990). El trabajo de Euclides es el primero que distingue expresamente un conjunto determinado de primeros principios y el único que los subdistingue en definiciones, postulados y nociones comunes, lo que demuestra su gran sentido de la organización deductiva.

Los *Elementos* de Euclides destacan también por su fuente de autoridad —bastaba mencionar que un cierto lema estaba incluido en él para que fuera tenido por válido—; por constituir un modelo de razonamiento y demostración matemático; por fijar una metodología referente a la sistematización deductiva de un cuerpo de conocimiento que permite considerar la obra como fuente de inspiración para la geometría axiomática posterior; y por la variedad de estrategias de prueba utilizadas, entre las que destaca la reducción al absurdo o el método exhaustivo.

El libro I constituye el pórtico axiomático: 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes o axiomas para posteriormente establecer 48 proposiciones (14 problemas y 34 teoremas).

— Definición 1: Un punto es lo que no tiene partes.
— Definición 2: Una línea es una longitud sin anchura.
— Definición 3: Los extremos de una línea son puntos.
— Definición 4: Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.
— Definición 5: Una superficie es lo que solo tiene longitud y anchura.
[...]
—Definición 23: Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.

— Postulado 1: Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.
— Postulado 2: Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.
— Postulado 3: Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.
— Postulado 4: Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
— Postulado 5: Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los (ángulos) menores que dos rectos.

Los tres primeros postulados sientan las bases operativas de la construcción con regla y compás, usada tradicionalmente en el estudio de los problemas geométricos. A diferencia de la recta y el círculo, la existencia del punto se da por descontada. El cuarto postulado representa un patrón invariable para medir los demás tipos de ángulos. Por último, el quinto postulado demanda, aparentemente, la existencia de puntos de corte entre rectas y completa la definición 23 de rectas paralelas. Pero por lo que ha pasado a la historia es porque no parece gozar de la evidencia inmediata propia de los postulados.

— Axioma 1: Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
— Axioma 2: Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.
— Axioma 3: Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
— Axioma 4: Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.
— Axioma 5: Y el todo es mayor que la parte.

Las tres primeras nociones comunes cumplen con los requisitos que el programa aristotélico había establecido en los *Segundos Analíticos*. La cuarta representa un axioma de congruencia y responde al procedimiento tradicional de superposición de figuras por desplazamiento de una y colocación sobre la otra. La última, cuadra perfectamente con el punto de vista finito adoptado por Euclides.

En lo concerniente a la demostración de las proposiciones, es interesante destacar que Euclides sigue una pauta de prueba en la mayoría de ellas. No siempre se dan todos estos pasos en las demostraciones pero tres resultan imprescindibles: el enunciado, la demostración y la conclusión:

— Enunciado: proposición del objeto a construir (problema) o del aserto a establecer (teorema).
— Exposición: presentación de lo dado usando letras para designar los elementos involucrados.
— Determinación: formulación como un caso concreto.

[...] es importante que nuestros estudiantes conozcan el papel central que desempeña la demostración en matemáticas, pues estas avanzan sobre conocimientos demostrados. Por ello sería interesante construir la idea de demostración paulatinamente a lo largo de las etapas escolares.

— Preparación: incluye posibles adiciones a la figura original por medio de construcciones y relaciones a partir de lo dado con objeto de obtener el resultado propuesto.
— Demostración: proceso demostrativo.
— Conclusión: constatación de la determinación (problema) o del enunciado (teorema).

En los *Elementos* encontramos algunas limitaciones. Por ejemplo, no hay ningún aparato de cuantificación, ni debe entenderse la referencia abreviada a magnitudes, números, líneas o figuras, mediante letras, como un uso de variables propiamente dicho. Además, en la demostración de los problemas juega un papel decisivo el uso de construcciones (en un sentido similar al que representan en nuestros usos escolares). Aunque ya en el siglo IV a. C. se asume que un diagrama no es una prueba, en ciertas ocasiones, una construcción gráfica cubre la laguna de una demostración, sustituye o encubre un postulado tácito y pasa a ejercer ella misma de base de inferencia (Vega, 1990).

Conclusión

En este trabajo hemos mostrado los inicios del concepto de demostración y de método axiomático ligados al mundo griego. En concreto, hemos situado la primera demostración en el entorno de Aristóteles y ligada a la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Además, nos hemos referido a diferentes sistemas axiomáticos, como la silogística de Aristóteles, el sistema Σ estoico o los *Elementos* de Euclides. Con la perspectiva que nos ofrece la historia del pensamiento matemático, de lo que no cabe ninguna duda es que el análisis aristotélico ofreció una primicia programática del punto de vista axiomático y que Euclides avanzó en esa vía, obteniendo la organización deductiva de ciertos cuerpos teóricos matemáticos que pudo suponer una especie de fuente de inspiración para la demostración axiomática clásica.

En nuestro ámbito escolar, es primordial infundir en el estudiante el hábito de la precisión en el lenguaje y ejercitarlo en el razonamiento riguroso. Asimismo, es importante que nuestros estudiantes conozcan el papel central que desempeña la demostración en matemáticas, pues estas avanzan sobre conocimientos demostrados. Por ello, sería interesante construir la idea de demostración paulatinamente a lo largo de las etapas escolares. Según el nivel en el que nos encontremos podemos recurrir a pruebas sencillas, por ejemplo, de tipo visual (Primaria, ESO) o bien más formales (Bachillerato).

Referencias bibliográficas

Aristóteles (1988), *Tratados de lógica*, Gredos, Madrid.

Boyer, C. (1986), *Historia de la matemática*, Alianza, Madrid.

CAÑÓN, C. (1993), *La Matemática: Creación y descubrimiento*, UPCO, Madrid.

EUCLIDES (1991), E*lementos*, *Libros I-IV* (Intr. Luís Vega), Gredos, Madrid.

— (1994), E*lementos*, *Libros V-IX*, Gredos, Madrid.

— (1996), E*lementos*, *Libros X-XIII*, Gredos, Madrid.

GHEVERGHESE, G. (1996), *La cresta del pavo real: la matemática y sus raíces no europeas*, Pirámide, Madrid.

KLINE, M. (1992), *El pensamiento matemático: Desde la Antigüedad a nuestros días*, Alianza, Madrid.

MATES, B. (1985), *Lógica de los estoicos*, Tecnos, Madrid.

MILLÁN, A. (2004), *Euclides: La fuerza del razonamiento matemático*, Nivola, Madrid.

PLATÓN (1996), *Obras completas*, Aguilar, Madrid.

SARTON, G. (1980), *Ciencia antigua y civilización moderna*, FCE, Madrid.

SOLÍS, C., y M. SELLÉS (2005), *Historia de la Ciencia*, Espasa, Madrid.

VEGA, L. (1990), *La trama de la demostración*, Alianza, Madrid.

Abilio Orts Muñoz
IES Tavernes Blanques, Valencia
<abilioorts@gmail.com>