Explorando las parábolas

Félix Martínez de la Rosa

SUMA+ núm. 97
pp. 25-32
Artículo recibido en *Suma* en marzo de 2020 y aceptado en agosto de 2020

En este artículo se muestran exploraciones relacionadas con las parábolas. El objetivo es aportar ideas para mejorar el entendimiento que tienen los estudiantes acerca de estas curvas.

Palabras clave: Parábolas, Exploraciones, Visualizaciones, Vértice, Tangentes.

Exploring parabolas // This paper shows explorations related to parabolas. The goal is to contribute ideas to improve students' understanding about these curves.

Keywords: Parabolas, Explorations, Visualizations, Vertex, Tangents.

Mis estudiantes de primer curso de Cálculo en la universidad suelen dar una respuesta de tipo descriptivo, cuando les animo a que definan las parábolas: son así, responden trazando con el dedo índice en el aire una especie de U. Cuando les pido más detalles mencionan el vértice y los polinomios de segundo grado.

Para averiguar si pueden concretar más sobre las características de estas curvas, les planteo varias cuestiones:

— ¿Por qué la gráfica de una función cuadrática corresponde a una parábola?
— ¿Por qué se utilizan las parábolas en antenas o telescopios?
— ¿Cuál es el vértice de $f(x)=(x-2)(x-6)$?

A la primera pregunta responden como si fuera algo obvio: basta con hacer una tabla de valores y unir los puntos obtenidos para comprobarlo. Para la segunda argumentan que los recipientes de tipo parabólico captan muy bien los rayos u ondas, de la misma manera que un buen cazo recoge el agua de lluvia. Para la tercera se remiten a la fórmula del vértice que aplicarían tras multiplicar los paréntesis.

Estas respuestas son totalmente congruentes con lo se expone en los libros de texto de 4.º de ESO. Al introducir las funciones cuadráticas $f(x)=ax^2+bx+c$ para $a\neq 0$, se especifica que su representación gráfica es una curva con dos ramas, una creciente y otra decreciente, denominada parábola, y se detallan las siguientes características (Colera y otros, 2016 y Gámez, 2016):

- Si $a>0$, las ramas van hacia arriba y si $a<0$, van hacia abajo.
- El punto en el que cambia el crecimiento de las ramas es el vértice cuya abscisa es $-b/2a$.
- El eje de simetría es una recta paralela al eje y que pasa por el vértice.
- Si dos funciones cuadráticas tienen el mismo coeficiente de x^2 la gráfica de ambas es la misma, aunque situadas en distinta posición.
- Cuanto mayor sea el valor absoluto de a, más estrecha es la parábola.
- Las gráficas se realizan con el apoyo de una tabla de valores.

Llama la atención la nula importancia que se le da a un elemento crucial como es el foco. Si se prescinde de él, no se puede enunciar la noción clásica de parábola como lugar geométrico y debido a esto, la conexión con las funciones cuadráticas no se establece de forma adecuada. Así que se recurre a las tablas de valores para afirmar que las gráficas que se obtienen, uniendo sus puntos, tienen forma parabólica. Aunque, si damos a x valores grandes, los correspondientes de y lo serán mucho más, por lo que resultará difícil ubicar los puntos en su lugar preciso y la gráfica saldrá deformada. Y solo con valores pequeños de x el dibujo quedaría muy limitado.

El cálculo del vértice solo usando la fórmula, revela el apego que los estudiantes tienen por una buena receta que poder utilizar. Esto también se traslada al profesorado: son una forma rápida y cómoda de capacitarlos para resolver ejercicios sencillos. Pero se olvidan con la misma rapidez que se aprenden.

Por último, el asunto de la anchura de las parábolas, resulta un misterio. No hay explicaciones que aclaren el hecho de que dependa de un solo coeficiente.

Todas estas consideraciones son las que motivan este artículo. Se propone abordar el tema de las parábolas empleando sencillas exploraciones, con las que poder visualizar sus características de una forma eficaz, atractiva y motivadora, y lograr así un mejor entendimiento de estas curvas.

Explorando la relación entre las parábolas y las funciones cuadráticas

La definición clásica de parábola como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo (foco) y de una recta (directriz), da pie a emplear un motivador recurso didáctico, para el que solo se necesita un folio de papel (figura 1).

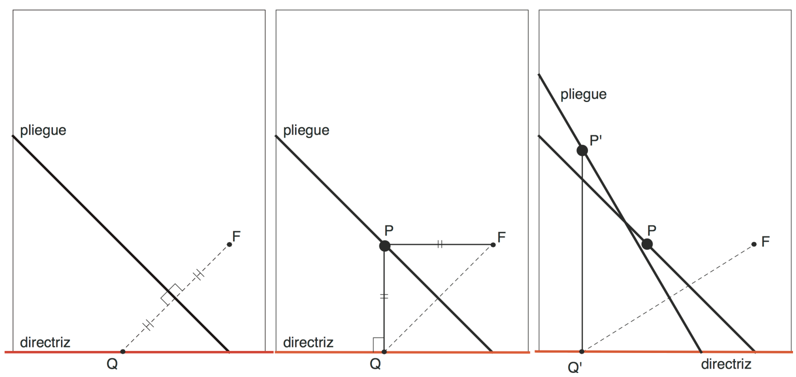

Figura 1

En el folio se marca un punto F que será el foco. La línea de abajo del folio será la directriz. Se señala un punto Q en la directriz y se dobla el folio, haciendo coincidir Q con F. Con esto se obtiene un pliegue que divide en dos partes iguales, y de forma perpendicular, al segmento QF. Ahora se traza una perpendicular a la directriz, desde Q hasta el pliegue. Esta línea lo corta en un punto P que pertenece a la parábola al ser QPF un triángulo isósceles. El proceso continúa tomando otro punto Q' de la directriz y, repitiendo el proceso, poco a poco la forma de la parábola aparece en el folio.

En Sánchez y Glassmeyer (2016) se recomienda comenzar con esta manipulación y obtener después las ecuaciones que conecten las parábolas con las funciones cuadráticas. El proceso se simplifica si se sitúa el foco en el punto $F(h, k+A)$ y la directriz en la recta $y=k-A$ (figura 2).

La distancia de cada punto $P(x, y)$ de la parábola al foco coincide con su distancia a la directriz, por tanto

$$\sqrt{(x-h)^2+[y-(k+A)]^2}=|y-(k-A)|.$$

Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene

$$y=\frac{1}{4A}(x-h)^2+k\,.$$

Finalmente, la relación entre esta fórmula y las funciones cuadráticas se aclara utilizando el método de completar cuadrados

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

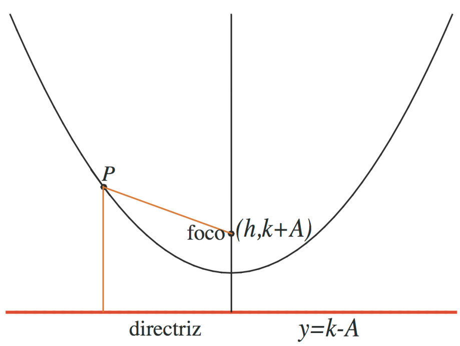

Figura 2

Por tanto $y=f(x)$ corresponde a una parábola de foco F y directriz $y=k-A$, siendo

$$h=-\frac{b}{2a},\quad A=\frac{1}{4a},\quad k=c-\frac{b^2}{4a}.$$

Explorando el vértice

La forma de una parábola sugiere la existencia de una recta vertical de manera que, si doblamos la curva por esa recta, los puntos de uno y otro lado de la curva se superponen. Para calcularla tomamos dos puntos de la función cuadrática $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ que estén a la misma altura, $f(x_0)=f(x_1)$. Sus coordenadas x_0 y x_1 deberán estar a la misma distancia de esa recta vertical. Al sustituir en la función cuadrática se obtiene

$$a\left(x_0^2-x_1^2\right)=b\left(x_1-x_0\right).$$

Por tanto

$$\frac{x_0+x_1}{2}=-\frac{b}{2a}.$$

En conclusión, el punto medio de x_0 y x_1 está en la recta $x=-b/2a$, el eje de simetría. La intersección entre la parábola y el eje de simetría se denomina vértice.

Esta exploración propicia una forma de calcular el vértice: su abscisa es el punto medio de las raíces del polinomio de grado dos.

Por otro lado, cualquier punto del eje X se puede expresar en la forma $-b/2a+h$. Empleando el método de completar cuadrados, es sencillo comparar la altura del punto correspondiente de la parábola con la del vértice

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}$$
$$f\left(-\frac{b}{2a}+h\right)=ah^2+c-\frac{b^2}{4a}\,.$$

Por tanto, si $a>0$, el vértice es el punto más bajo de la parábola, lo que indica la orientación hacia arriba de sus ramas. Lo contrario para el caso $a<0$.

Otra manera de hallar el vértice de $f(x)=ax^2+bx+c$ sin recurrir a las raíces del polinomio, (que a veces no existen o son complicadas) consiste, como se sugiere Weiss (2016), en apoyarse en la función $g(x)=ax^2+bx$.

Sus raíces sí son fáciles de calcular. Además $g(x)=f(x)-c$, por lo que sus gráficas (figura 3) son dos parábolas iguales pero situadas a una distancia vertical c, así que la abscisa de sus vértices coincide. Por otro lado, esta idea muestra que los vértices de todas las funciones cuadráticas con los mismos valores de a y b están sobre la recta $x={}^{-b}\!/_{2a}$ pero a diferentes alturas. Al variar c podemos imaginar a sus vértices *viajando* sobre ella. La figura 4 muestra esta situación para $a=b=1$.

En varios artículos (Edwards, 1996; Edwards y Ozgun-Koca, 2009; Davis, 2012 y 2013), se analiza el comportamiento de las parábolas y de sus vértices al variar los coeficientes. Hay una idea básica con la que explorar: para encontrar una curva que contenga al vértice de una parábola, este deberá cumplir su ecuación. Para ello reescribimos la ordenada del vértice en la forma

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}=\frac{b}{2}\left(-\frac{b}{2a}\right)+c\,.$$

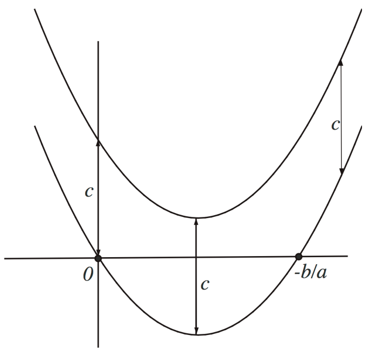

Figura 3

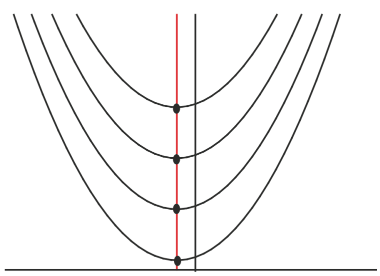

Figura 4

Esto quiere decir que el vértice cumple la ecuación $y=\frac{b}{2}x+c$. Por tanto, al variar a todas las funciones cuadráticas con los mismos valores de b y c cumplen que sus vértices *viajan* sobre esa recta. La figura 5, muestra el caso $b=2$, $c=1$, y la recta $y=x+1$.

Una nueva manipulación de la ordenada del vértice consiste en expresarla como sigue

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right)=c-\frac{b^2}{4a}=-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c.$$

Por tanto, los vértices de las funciones cuadráticas con los mismos valores de a y c *viajan* sobre la parábola $y=-ax^2+c$ al variar b. La figura 6, muestra el caso $a=-1$, $c=1$, en la que los vértices están sobre $y=x^2+1$. La figura 7, corresponde al caso $a=1$, $c=2$, y los vértices recorren $y=-x^2+2$.

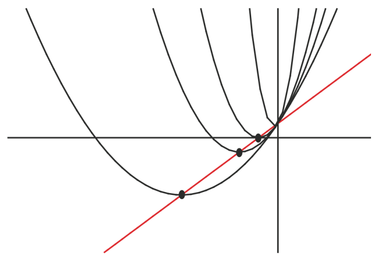

Figura 5

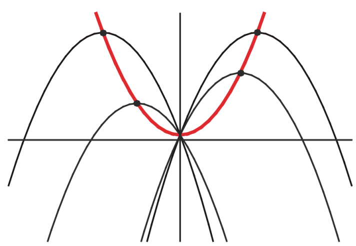

Figura 6

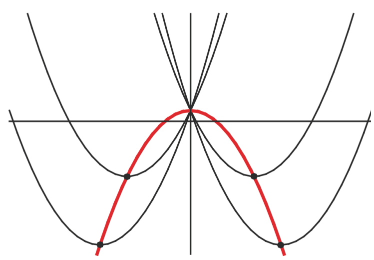

Figura 7

En los textos de secundaria se suele mencionar, sin explicarlo, que la anchura de la parábola depende exclusivamente del coeficiente del término de grado dos. Pero el motivo es fácil de entender a partir de una visualización adecuada. La idea es comparar dos parábolas cualesquiera desplazándolas sin deformarlas, hasta situar sus vértices en el origen de coordenadas (figuras 8, 9 y 10).

La figura 8, muestra dos parábolas $f(x)=ax^2+bx+c$ y $g(x)=a'x^2+b'x+c'$, para a, $a'>0$. Al completar cuadrados se obtiene

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

$$g(x)=a'\left(x+\frac{b'}{2a'}\right)^2+c-\frac{b'^2}{4a'}.$$

Si en ambas expresiones se cambia, respectivamente, x por $x-{}^{b}\!/_{2a}$ y por $x-{}^{b'}\!/_{2a'}$ las parábolas se desplazarán por el eje X hasta lograr que sus vértices se sitúen sobre el eje Y (figura 9). Por último, si eliminamos los términos independientes, las estaremos desplazando por el eje Y de forma que ambos vértices se sitúen en el origen de coordenadas (figura 10). Tras este proceso, las ecuaciones se han transformado en $y=ax^2$ e $y=a'x^2$.

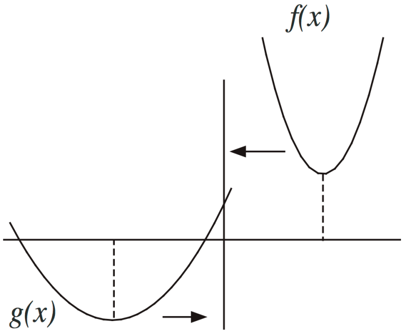

Figura 8

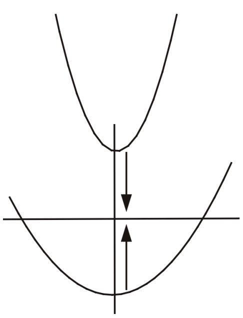

Figura 9

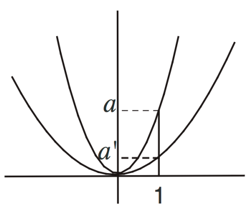

Figura 10

Tomando el valor $x=1$, se visualiza que si $a>a'>0$ entonces $f(x)$ es más estrecha que $g(x)$.

Explorando las tangentes

Otro de los elementos que dan a paso a exploraciones muy motivadoras son las rectas tangentes. Para poder realizarlas en cursos donde aún no se han introducido los conceptos de límite y derivada se puede comenzar, como se sugiere en Range (2018), recuperando el antiguo concepto de Descartes de *punto doble* y observando la figura 11.

Se observa que un mínimo desplazamiento de la recta R hace visible dos puntos de intersección con la parábola: es la idea de que R corta a la parábola en un *punto doble* que correspondería a un punto de tangencia. Esta situación no se da en la parte de abajo de la figura 11 ya que ningún pequeño movimiento de la recta S da lugar a dos puntos de corte con la parábola (al menos en un entorno de P).

El concepto de *punto doble* conecta muy bien con la idea de que una recta es tangente a una curva en un punto $x=a$ cuando el contacto entre ambas es tan intenso como para que su diferencia contenga el factor $(x-a)^2$. O como se enuncia en Arao (2000), la recta $y=mx+b$ es tangente a la gráfica de un polinomio $p(x)$ en $x=a$ si y solo si $mx+b$ es el resto de la división de $p(x)$ por $(x-a)^2$.

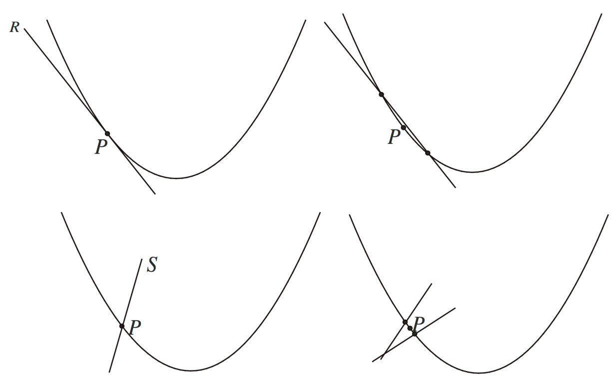

Figura 11

Por ejemplo, de la expresión

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

se deduce que la recta $y = c - {}^{b^2}\!/\!_{4a}$ es tangente horizontal a su gráfica en el punto $x = {}^{-b}\!/\!_{2a}$.

Para obtener la ecuación de la tangente a una parábola debemos conocer su pendiente. Para calcularla sin usar la derivada tomamos la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. La recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y tiene pendiente m es

$$y = f(x_0) + m(x - x_0).$$

La intersección entre recta y parábola se consigue igualando sus ecuaciones

$$ax^2 + bx + c = ax_0^2 + bx_0 + c + m(x - x_0).$$

Por tanto $a(x^2 - x_0^2) + (b - m)(x - x_0) = 0$.
Los puntos de corte son

$$x = x_0 \quad \text{y} \quad x = \frac{m - b - ax_0}{a}.$$

Igualando ambos valores se obtiene la pendiente de la tangente en $x = x_0$ para que haya un contacto doble

$$m = 2ax_0 + b.$$

El siguiente paso en esta exploración consiste en observar la figura 12. En ella se intuye que las tangentes a dos puntos de la parábola que están a la misma altura, se cortan en el eje de simetría.

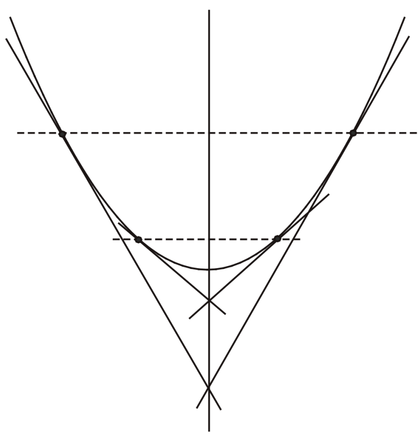

Figura 12

Para probar esa intuición se calculan las tangentes en $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Sus ecuaciones son

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x_1) + (2ax_1 + b)(x - x_1) \\ y = f(x_2) + (2ax_2 + b)(x - x_2) \end{array}\right\}.$$

El punto de corte entre ambas se logra igualando las ecuaciones y simplificando

$$2ax(x_1 - x_2) - b(x_1 - x_2) = 2a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

Como los puntos están a la misma altura sabemos que

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

por tanto se concluye que

$$x = \frac{2a(x_1 + x_2) + b}{2a} = -\frac{b}{2a}.$$

Para explorar las tangentes en puntos que no están a la misma altura observamos la figura 13.

Parece claro que la intersección no está sobre el eje de simetría, y para probarlo partimos de dos puntos $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$, tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Como se sugiere en Stenlud (2001) tomamos x_1 y $x_2 = x_1 + h$ e igualamos las ecuaciones de las tangentes

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c + (2ax_1 + b)(x - x_1) = \\ = a(x_1 + h)^2 + b(x_1 + h) + c + \\ + (2a(x_1 + h) + b)(x - x_1 - h). \end{aligned}$$

La simplificación de esta farragosa igualdad da lugar a $0 = -2ahx_1 + 2ahx - ah^2$. Por ser $a \neq 0$ y $h \neq 0$, tenemos

$$x = \frac{2x_1 + h}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

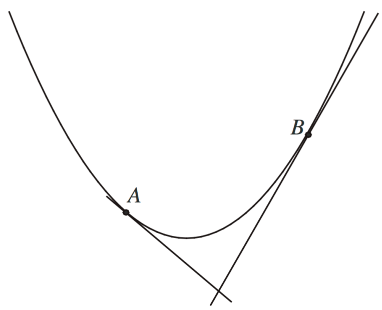

Figura 13

Es decir, la abscisa del punto de corte es el punto medio de las abscisas de los puntos de tangencia.

La última exploración relacionada con las tangentes a una parábola consiste en analizar la figura 14. Trazamos la cuerda que une $A(x_1, f(x_1))$ con $B(x_2, f(x_2))$ y la tangente a la parábola en el punto

$$C\left(\tfrac{x_1+x_2}{2}, f\left(\tfrac{x_1+x_2}{2}\right)\right).$$

y visualizamos la posibilidad de que ambas rectas sean paralelas. Tomando los valores x_1 y $x_2 = x_1 + h$, se obtiene el resultado esperado

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = ah + 2ax_1 + b =$$
$$= a(2x_1+h)+b = 2a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+b\,.$$

La pendiente de la cuerda coincide con la de la tangente y por tanto ambas son paralelas. Esta exploración anticipa el teorema del valor medio de Lagrange.

Explorando la propiedad de reflexión de la parábola

Las parábolas cumplen una propiedad de gran utilidad para la construcción de antenas parabólicas, focos de coches o telescopios: los rayos provenientes de una fuente lejana y paralelos al eje de simetría, al reflejarse se concentran en el foco. Es decir, si un rayo incide en el punto P, el ángulo I que forma con la tangente en P, coincide con el ángulo II que forma la línea PF con la tangente (figura 15).

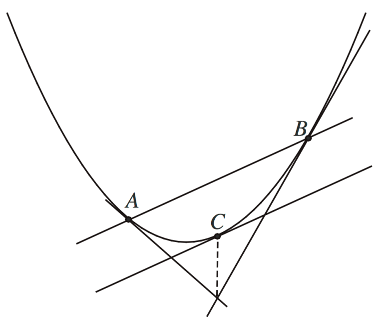

Figura 14

Situando el foco en $F(0, A)$ y la directriz en $y=-A$, la ecuación de la parábola es:

$$y = \frac{1}{4A}x^2.$$

Se verifica que la pendiente de la tangente en $P(a, b)$ es la inversa con signo contrario de la pendiente de la recta QF, por tanto ambas son perpendiculares entre sí (figura 16).

Al ser P un punto de la parábola su distancia al foco F y al punto Q coinciden, luego el triángulo QPF es isósceles. Como la tangente es perpendicular a QF, ambas se cortan en el punto medio M, por lo que los ángulos II y III son iguales (figura 16). Por último, los ángulos I y III también coinciden al ser ángulos opuestos entre dos rectas, por lo que el ángulo I es igual a II.

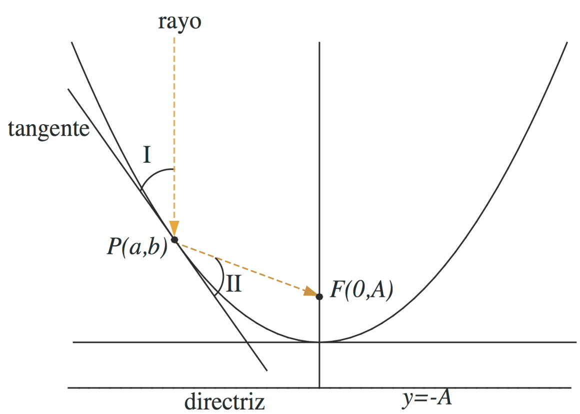

Figura 15

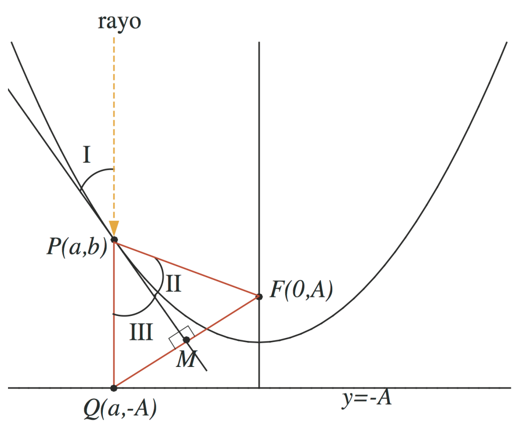

Figura 16

Resumen final

Las exploraciones mostradas en este artículo se pueden explicar al introducir las parábolas y pueden ser útiles para motivar a los estudiantes y ayudarles a comprender mejor la naturaleza de estas curvas. El principal recurso empleado es la visualización. Con imágenes adecuadas se pueden trasmitir muchas más ideas que con una simple receta. Además de los recursos visuales sencillos también se han incorporado las demostraciones de los resultados. Estas no resultan complicadas porque no lo son las herramientas requeridas. Se utiliza el método de completar cuadrados y algunos razonamientos geométricos básicos. La ecuación de la recta en forma punto pendiente es lo único que se utiliza en la sección de las rectas tangentes.

Referencias bibliográficas

Arao, J. (2000), «Tangents without calculus», *The College Mathematical Journal*, n.º 31(5), 406-407.

Colera, J., M. J. Oliveira, I. Gaztelu, y R. Colera (2016), *Matemáticas 4.º ESO (Opcion A) - Adaptacion Curricular,* Anaya, Madrid.

Davis, J. (2012), «Investigating the effects of parameters on quadratic functions», *Mathematics Teacher,* n.º 106(1), 64-68.

— (2013), «An unexpected influence on a quadratic», *Mathematics Teacher,* n.º 107(3), 212- 218.

Edwards, T. (1996), «Exploring quadratic functions; from *a* to *c*», *Mathematics Teacher,* n.º 89(2), 144-146.

Edwards, T., y A. Ozgun-Koca (2009), «Creating a Mathematical 'B' movie: The effect of *b* on the graph of a quadratic», *Mathematics Teacher,* n.º 103(3), 214-219.

Gámez, J. C., (2016), *Matemáticas, enseñanzas académicas 4.º ESO (Serie resuelve)*, Santillana, Madrid.

Range, R. M. (2018), «Using high school algebra for a natural approach to derivatives and continuity», *The Mathematical Gazette,* n.º 102(555), 435-446.

Sánchez, W., y D. Glassmeyer (2016),«Connecting parabolas and quadratic functions», *Mathematics Teacher,* n.º 110(5), 380-386.

Stenlund, M. (2001), «On the tangent lines of a parabola», *The College Mathematics Journal,* n.º 32(3), 194-196.

Weiss, M. (2016), «Solving and graphing quadratics with symmetry and transformations», *Mathematics Teacher,* n.º 110(5), 394-397.

Félix Martínez de la Rosa
Universidad de Cádiz
<felix.martinez@uca.es>