

MUJERES MATEMÁTICAS: ROMPIENDO MOLDES

Marjorie Rice: teselando el plano con pentágonos convexos

Marta Macho Stadler

SUMA núm. 97
pp. 35-40

Artículo solicitado por *Suma* en abril de 2021 y aceptado en junio de 2021

La mente y el espíritu son el punto fuerte de todos estos aficionados: el intenso espíritu de investigación y la entusiasta percepción de todo lo que hallan. Ninguna educación formal proporciona estos dones. La simple ausencia de un grado matemático separa a estos «aficionados» de los «profesionales». Sin embargo, su intrépida curiosidad y sus ingeniosos métodos los convierten en verdaderos matemáticos. Martin Gardner ha despertado a muchos de esos matemáticos.¹

Doris Schattschneider (Schattschneider, 1981)

Marjorie Rice, una matemática aficionada

Marjorie Jeuck nació el 16 de febrero de 1923 en San Petersburgo (Florida, EE. UU.). Se crio en una pequeña granja cerca de Roseburg (Oregón). En esa ciudad aprendió en una humilde escuela en la que algunas de sus profesoras —sobre todo Miss Keasey y Miss Timmons— reconocieron su talento e incentivaron su incipiente inclinación por la ciencia.

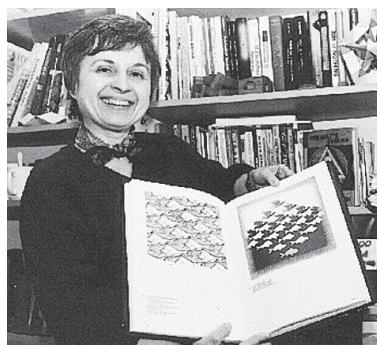


Figura 1. Marjorie Rice
Fuente: Math Pickle
<<https://mathpickle.com/artists>>

La aritmética era fácil y me gustaba descubrir las razones de los métodos que utilizábamos... Estaba interesada por los colores, los patrones y los diseños de la naturaleza, y soñaba con convertirme en una artista².

Marjorie Rice (Schattschneider, 1981)

Cuando Marjorie cursaba la enseñanza secundaria, su familia se mudó a Pine Castle (Florida). Allí estudió —sin demasiado éxito— taquigrafía y mecanografía y, desafortunadamente para ella, no pudo seguir ningún curso de matemáticas aparte de la asignatura general básica exigida. Se graduó a los 16 años y, en 1945, tras trabajar en una lavandería y posteriormente en una imprenta, se casó con Gilbert Rice. El matrimonio se mudó a Washington, D. C. y después a San Diego con su primer bebé. Este niño falleció, pero llegaron otros cinco y Marjorie se convirtió en madre y ama de casa a tiempo completo.

Pero Marjorie nunca perdió su interés por las matemáticas. Ayudaba a su hijo mayor en sus tareas, aprendiendo con él sobre «matemáticas modernas» y encontrando en algunas ocasiones las soluciones a los ejercicios propuestos mediante procedimientos «peculiares». Frecuentaba la biblioteca pública buscando lectura científica e inculcó a sus hijos ese interés por la ciencia.

Cuando estaba en sexto o séptimo grado, nuestra maestra nos mostró un día la razón áurea en las proporciones del marco de una imagen. Esto atrapó inmediatamente mi imaginación y aunque fue solo un acontecimiento puntual, nunca lo olvidé. He seguido leyendo sobre una amplia variedad de temas a lo largo de los años y me ha interesado especialmente la arquitectura y las ideas de arquitectos y urbanistas como Buckminster Fuller. Encontré de nuevo la razón áurea en mis lecturas y pensé en su uso en pintura y diseño. Un libro que fue especialmente útil e inspirador para mí en este sentido fue «*The Geometry of Art and Life*» de Matila Ghyka³.

Marjorie Rice (Schattschneider, 1981)

La familia estaba suscrita a la revista de divulgación científica *Scientific American*⁴. Cuando Marjorie tenía un rato libre —cuando estaba sola en casa— leía con fascinación la columna *Mathematical Games* de Martin Gardner⁵. En julio de 1975, Gardner describía⁶ en su sección de matemática recreativa ocho tipos de pentágonos convexos⁷ que teselaban⁸ el plano. Los últimos tres tipos habían sido descubiertos por el matemático Robert Kershner, quien había afirmado que, con ellos, la clasificación de este tipo de teselaciones por pentágonos estaba completa. Pero

Kershner se equivocaba: en diciembre de 1975, Gardner anunciaba que el informático Richard James —uno de sus fieles lectores— había descubierto un nuevo tipo de pentágono que embaldosaba el plano. La curiosidad de Marjorie se avivó y comenzó su propia investigación.

Nuestra protagonista no tenía conocimientos formales de geometría, pero poseía un desarrollado sentido de la organización. Así, Marjorie inventó su particular notación para expresar las propiedades de los nueve tipos de teselaciones por losetas pentagonales conocidos hasta el momento. Representaba cada tipo de embaldosado mediante un pentágono en forma de casa, con líneas interiores indicando los ángulos en cada vértice del pentágono y marcas identificando los lados iguales (figura 2).

En febrero de 1976, gracias a su sistemática búsqueda, Marjorie encontró un nuevo tipo de pentágono teselando el plano, y anunció su descubrimiento a Martin Gardner. Para comprobar que, efectivamente, ese pentágono era diferente de los nueve encontrados anteriormente, el divulgador envió las anotaciones de Rice a varias personas especialistas en la materia, entre ellas a la matemática Doris Schattschneider⁹. Marjorie tenía razón, y Doris Schattschneider se convirtió en su contacto con la comunidad matemática profesional.

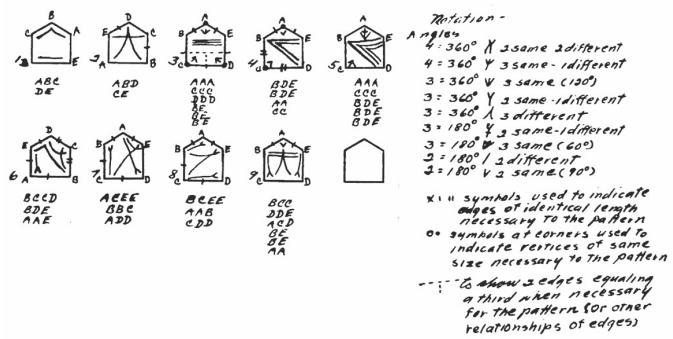


Figura 2. La notación pictórica inventada por Marjorie Rice. En la imagen se recoge la información de los nueve tipos de pentágonos que teselaban el plano y descubiertos hasta 1975
Fuente: Schattschneider (1981)

Marjorie continuó sus búsquedas esporádicamente, encontrando y dibujando largas listas de pentágonos teselando el plano. Schattschneider le proporcionaba algunos artículos sobre teselaciones que animaban a Marjorie a emprender nuevas investigaciones. En diciembre de 1976, Rice encontró dos nuevos tipos de pentágonos teselando el plano y, en 1977, descubrió una nueva clase (figura 3).

Los hallazgos de Marjorie fueron una importante contribución al problema de caracterización de pentágonos convexos que pueden teselar el plano. Pero también la inspiraron para realizar diseños decorativos similares a los de Maurits Cornelis Escher¹⁰, adornados con flores, mariposas, abejas, conchas o peces (figura 4).

Aunque a partir de entonces no descubrió nuevos tipos de mosaicos por losetas pentagonales, Marjorie continuó durante muchos años aumentando sus listas y bocetos buscando completar la clasificación de teselaciones por pentágonos convexos. Y Doris Schattschneider seguía enviando a Rice artículos sobre el tema que, sin duda, inspiraron a Marjorie, quien descubrió unas sesenta teselaciones diferentes con distintos tipos de pentágonos.

En 1999, uno de sus mosaicos se colocó —en forma de baldosas de cerámica esmaltada— en el vestíbulo

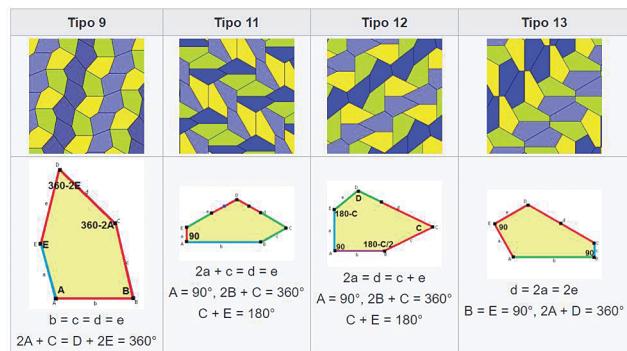


Figura 3. Los 4 tipos de teselas pentagonales descubierta por Marjorie Rice y teselados representativos que generan cada uno de ellos
Fuente: Wikimedia Commons
[<https://es.wikipedia.org/wiki/Marjorie_Rice#Geometría>](https://es.wikipedia.org/wiki/Marjorie_Rice#Geometría)

de la sede de Asociación Matemática de América (MAA) en Washington, D. C. (figura 5)

En marzo de 1995, en una reunión de la MAA, Doris Schattschneider dictó una conferencia sobre el trabajo de Rice. La invitó a hablar ante la audiencia de especialistas en matemáticas. Marjorie no se atrevió a hacerlo, pero accedió a presentarse tras finalizar la

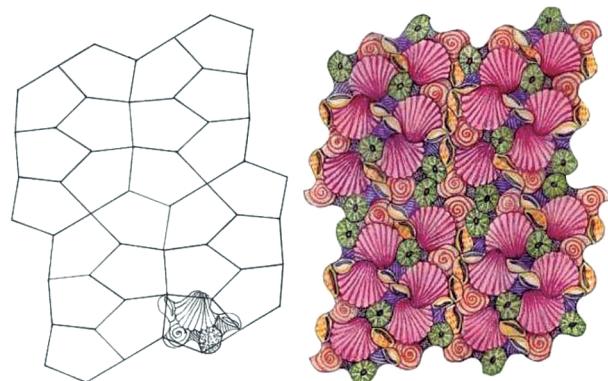


Figura 4. Diseño decorativo de Marjorie Rice basado en losetas pentagonales. Se utiliza un pentágono con cada lado de la misma longitud. Cualquier variación tendrá que provenir de los tamaños de los dos ángulos que suman 180 grados. Cada lado debe distorsionarse de la misma manera para formar un patrón porque cada lado debe coincidir con todos los demás lados

Fuente: Intriguing Tessellations

<<https://sites.google.com/site/intriguingtessellations/home/tessellations/shell>>



Figura 5. Mosaico por pentágonos descubierto por Marjorie Rice en el vestíbulo de la MAA
Fuente: The Mathematical Tourist
[<http://mathtourist.blogspot.com/2010/06/tiling-with-pentagons.html>](http://mathtourist.blogspot.com/2010/06/tiling-with-pentagons.html)

conferencia de Schattschneider. Una calurosa ovación, con el auditorio en pie, agradeció el valor científico de su trabajo y la inspiración que representaba su esfuerzo.

En sus últimos años de vida Marjorie luchó contra el cáncer y la demencia senil. Esta última le llevó a olvidar tantos y tantos pentágonos que había estudiado con meticulosidad en el poco tiempo libre que le dejaba su familia. Pero nos queda su hermoso legado.

Falleció el 2 de julio de 2017, con 94 años.

Bonus. Teselaciones pentagonales convexas del plano

Recordemos que una teselación o mosaico del plano consiste en una serie de polígonos —las teselas o losetas— que lo cubren sin dejar zonas vacías, de manera que, si dos teselas se tocan, lo hacen necesariamente lado con lado o vértice con vértice.

En su obra *Harmonices mundi*¹¹, el astrónomo Johannes Kepler estudió qué polígonos regulares podían cubrir el plano. Es decir, se preguntaba si existen mosaicos que utilicen un polígono regular como única tesela base. La respuesta es sencilla: los únicos que existen son los mosaicos por triángulos, cuadrados y hexágonos regulares.

¿Por qué no hay más? Por ejemplo, en el caso del pentágono regular, su ángulo interno es de 108 grados. Si deseáramos teselar el plano con pentágonos regulares, los vértices de dos losetas colindantes deberían tocarse sin dejar ningún hueco. Pero esto es imposible, ya que 360 no es divisible por 108. De otra manera, si colocamos pentágonos regulares alrededor de un vértice, se observa inmediatamente que solo pueden colocarse tres, pero queda un espacio que no puede cubrirse con pentágonos.

Recordemos que un polígono regular de n lados posee ángulos internos¹² de $180 \cdot (n-2)/n$ grados. Así, para polígonos con siete o más lados, el ángulo inte-

rior es mayor que 120 grados, pero menor que 180, con lo que llegamos a la misma conclusión que con el pentágono. Es decir, el triángulo, el cuadrado y el hexágono son los únicos polígonos regulares cuyos ángulos internos (60 grados, 90 grados y 120 grados, respectivamente) son divisores de 360 grados.

En el estudio de mosaicos podríamos preguntarnos qué sucede al mezclar varios polígonos regulares para cubrir el plano —teselaciones semirregulares¹³, de estos solo hay ocho—, o al usar una única pieza no regular, o varias no regulares. Estos problemas no son sencillos de resolver. Cuando comenzó a sistematizarse su estudio se desarrollaron técnicas matemáticas complejas dirigidas al estudio de teselaciones del plano (y del espacio) que después han encontrado utilidad en otros campos.

Las más importantes aportaciones de Marjorie Rice, de las que hemos hablado antes, intentaban responder a la siguiente pregunta: ¿Se puede teselar el plano con un único pentágono (convexo) no regular? Como ya hemos visto, la respuesta es positiva, y además existen solo quince maneras de hacerlo —este punto parece estar aún en fase de revisión—.

Las personas que han descubierto estas quince clases de pentágonos son: Karl Reinhardt¹⁴ encontró cinco

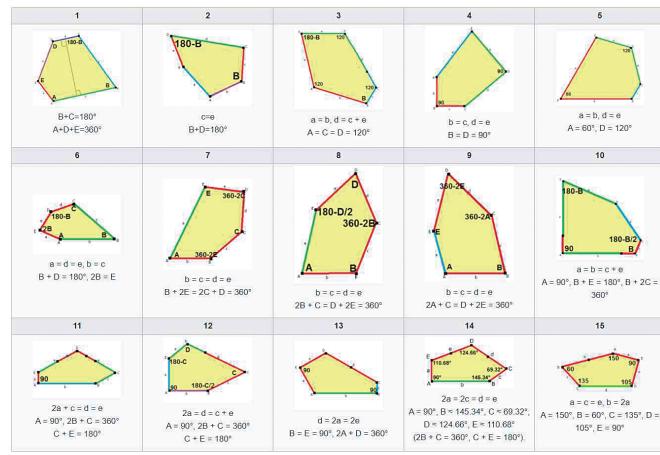


Figura 6. Los 15 tipos de teselas pentagonales

Fuente: Wikimedia Commons

<https://es.wikipedia.org/wiki/Teselado_pentagonal>

en 1918¹⁵; Richard B. Kershner¹⁶ halló tres más en 1968¹⁷; Richard James¹⁸ descubrió el noveno tipo en 1975 tras leer el mismo artículo de Martin Gardner que inspiró a Marjorie Rice sobre teselaciones pentagonales en la revista *Scientific American*; después llegó, como ya hemos comentado, Marjorie Rice quien halló otros cuatro tipos en 1976 y 1977¹⁹; Rolf Stein²⁰ encontró el decimocuarto tipo de pentágono en 1985; y en 2015 Casey Mann, Jennifer McLoud y David Von Derau²¹ descubrieron una nueva clase con ayuda de un programa informático²².

El 1 de mayo de 2017 el especialista en teoría de grafos Michaël Rao²³ anunció²⁴ que había realizado una prueba asistida por ordenador en la que demostraba que estos quince pentágonos convexos eran los únicos que teselaban el plano con un único tipo de lóseta. La parte computacional de su demostración ha sido revisada y no contiene errores, aunque aún no se ha publicado la prueba definitiva revisada por pares.

Referencias bibliográficas

MACHO, M. (2020), «Tesselando el plano con pentágonos», *Cuaderno de Cultura Científica*, Matemoción, 19 de febrero de 2020, <<https://culturacientifica.com/2020/02/19/tesselando-el-plano-con-pentagonos/>>.

- MACHO, M. (2020), «Marjorie Rice: la pasión por resolver problemas matemáticos», *Mujeres con ciencia, Vidas científicas*, 28 de febrero de 2020, <<https://mujeresconciencia.com/2020/02/28/marjorie-rice-la-pasion-por-resolver-problemas-matematicos/>>.
- RICE, M., *Intriguing Tessellations* <<https://sites.google.com/site/intriguingtessellations/home>>.
- SCHATTSCHNEIDER, D. (1978), «Tiling the plane with congruent pentagons», *Mathematics Magazine*, n.º 51 (1), 29–44, <https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Allendoerfer/1979/0025570x.di021103.02p0247f.pdf>.
- (1981), «In praise of amateurs», en D. Klarner (ed.), *The Mathematical Gardner*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 140–166, <<https://math.jhu.edu/~eriehl/301-s19/Schattschneider-Amateurs.pdf>>, [Reimpreso como *Mathematical Recreations: A Collection in Honor of Martin Gardner*, Dover Publications, New York, 1998].
- (2017), «Marjorie Rice (16 February 1923–2 July 2017)», *Journal of Mathematics and the Arts*, n.º 12 (1), 51–54, <<https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/17513472.2017.1399680>>.
- (2018), «The Story of Marjorie Rice», *G4G Celebration*, 13 de abril de 2018 <<https://youtu.be/q2gs9LpICCk>>.
- WOLCHOVER, N. (2017), «Marjorie Rice's Secret Pentagons», *Quanta Magazine*, 11 julio 2017 <<https://www.quantamagazine.org/marjorie-rices-secret-pentagons-20170711/>>.

Marta Macho Stadler

Universidad del País Vasco
[<marta.macho@ehu.eus>](mailto:marta.macho@ehu.eus)

¹⁵ The mind and spirit are the forte of all such amateurs—the intense spirit of inquiry and the keen perception of all they encounter. No formal education provides these gifts. Mere lack of a mathematical degree separates these «amateurs» from the «professionals». Yet their dauntless curiosity and ingenious met-

hods make them true mathematicians. Martin Gardner has awokened many such mathematicians.

¹⁶ Arithmetic was easy and I liked to discover the reasons behind the methods we used... I was interested in the colors, patterns, and designs of nature and dreamed of becoming an artist.