

VERSIÓN INGLESA

Saber y enseñar matemáticas

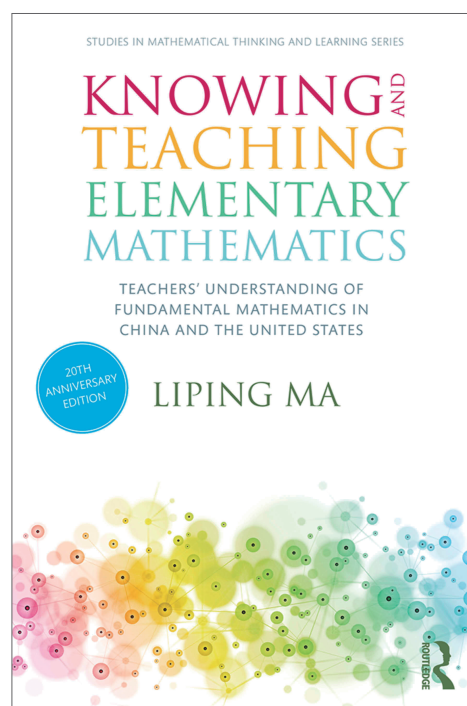
Maite Aranés Maza

SUMA núm. 97
pp. 89-93

Artículo solicitado por *Suma* en abril de 2021 y aceptado en junio de 2021

Para esta reseña he hecho un poco de trampa. El libro del que os voy a hablar hoy es un «clásico» publicado originalmente en el año 2000, pero con la excusa de una nueva edición el año pasado, aprovecho para reseñarlo en *Suma*. *Knowing and Teaching Elementary Mathematics* se referencia a menudo en la literatura anglosajona (por ejemplo en los Principios y Estándares del NCTM), y ha pasado por varias reediciones desde su publicación hace 20 años. Voy a empezar por el final y a deciros ya que me parece un libro muy interesante, totalmente recomendable. Para los que no puedan con la versión original, existe una traducción al castellano de la Academia Chilena de las Ciencias, editada en 2010 (yo no he sido capaz de localizar ninguna copia).

Normalmente os doy algún detalle biográfico del autor para aportar un poco de contexto. La trayectoria profesional de Liping Ma es bastante extraordinaria. Os hago resumen corto. Cuando tenía 13 o



Routledge, 266 páginas (2020)

14 años, en plena Revolución Cultural China, fue enviada desde Shanghai a un pueblecito en las montañas del sur de China, para ser «reeducada» por los campesinos. Al cabo de unos meses, le pidieron que hiciera de maestra en la escuela local. A partir de ahí, Liping Ma consigue desarrollar una carrera docente que la lleva de vuelta a Shanghai, donde finaliza un máster en educación, y finalmente llega a Estados Unidos con la idea de completar un doctorado, cuya tesis da lugar al libro que nos ocupa.

En principio, *Knowing and Teaching Elementary Mathematics* es un análisis comparativo del conocimiento de las matemáticas y su didáctica entre docentes de China y de Estados Unidos. Los participantes en el estudio son profesores/maestros de matemáticas de niveles desde primaria hasta 1.º-2.º de la ESO, más o menos, con diversos rangos de experiencia profesional.

El libro se estructura en cuatro capítulos iniciales en los que se comparan las respuestas entre los docentes estadounidenses y los chinos a varias cuestiones, y tres capítulos de síntesis y conclusiones. La edición del 20 aniversario incorpora además nuevos prefacios por parte de la autora y del editor (además de los correspondientes a la reedición de 2010), así como dos artículos. Uno de Liping Ma en el que realiza una crítica de la estructura de las matemáticas elementales en el sistema educativo estadounidense. El otro artículo, escrito para la reedición de 2010, sobre el impacto de la primera edición del libro en diversos ámbitos relacionados con la educación en Estados Unidos.

Las preguntas planteadas durante el estudio evalúan el conocimiento de los entrevistados en cuatro temas de las matemáticas elementales: la resta «llevando», el algoritmo de la multiplicación por números de varias cifras, la división de fracciones, y el área y perímetro de un rectángulo. Al mismo tiempo, cada una de las cuestiones se enlaza con una exploración de algunas de las tareas típicas en la docencia: explicación de un procedimiento, respuesta a un error del alumnado, generación de ejemplos y modelos para una operación matemática y respuesta a una idea original propuesta por un alumno.

$$\begin{array}{r} 56^1 2 \\ - 49 \\ \hline 13 \end{array}$$

Figura 1. El algoritmo de la resta, la cuestión tratada en el capítulo 1 (Subtraction With Regrouping: Approaches To Teaching A Topic).

Si os estáis preguntando qué grupo de docentes sale mejor parado en las entrevistas, la respuesta es sin ninguna duda el chino. Personalmente, la lectura de algunas de las respuestas de los docentes estadounidenses me ha resultado casi dolorosa. Aunque en realidad el impacto del libro no reside tanto en el contraste entre ambas nacionalidades, sino en la realización de la profundidad con la que puede conocerse un concepto de lo que consideramos matemáticas elementales, y la influencia que dicho conocimiento tiene en la actitud y pedagogía del docente, y por tanto en la experiencia del alumnado. La misma autora, al principio del capítulo 1, nos advierte de la importancia de poseer una comprensión profunda del contenido a enseñar.

Subtraction, with or without regrouping, is a very early topic anyway. Is a deep understanding of mathematics necessary in order to teach it? Does such a simple topic even involve a deep understanding of mathematics? Would a teacher's subject matter knowledge make any difference in his or her teaching, and eventually contribute to students' learning? There is only one answer for all these questions: Yes. Even with such an elementary mathematical topic, the teachers displayed a wide range of subject matter knowledge, which suggests their students had a corresponding range of learning opportunities.

Sin embargo, no es hasta el momento en que leemos las declaraciones de los distintos grupos de docentes cuando se aprecia de verdad la diferencia que supone el conocer a fondo lo que se tiene que enseñar. En el caso de la resta, la mayoría de los profesores americanos se concentran en el procedimiento o algoritmo, y las explicaciones que plantean para sus alumnos tienen una base matemática escasa o inexistente. En contraste,

la mayoría de los docentes chinos no solo planean cómo justificar el algoritmo matemáticamente para sus alumnos, sino que además lo relacionan con ideas ya trabajadas con anterioridad, como el algoritmo de la suma, el significado de la notación posicional y la idea de suma y resta como operaciones inversas. Es más, tienen muy claro la necesidad de seguir una secuencia de aprendizaje que facilite el refuerzo de conceptos anteriores al encontrar nuevas ideas, y la importancia de establecer enlaces entre los varios algoritmos e ideas matemáticas que los alumnos van encontrando.

Estas actitudes vuelven a observarse en el segundo capítulo, cuando se pide al profesorado entrevistado que explique cómo respondería si varios alumnos cometen el error en la multiplicación que se observa en la figura 2.

Nuevamente vemos cómo el colectivo estadounidense se concentra en el aspecto algorítmico, con un menor porcentaje de docentes que en el colectivo chino justificando el procedimiento de forma matemática. Lamentablemente, algunos de los profesores americanos confiesan que son incapaces de explicar por qué es necesario desplazar los resultados parciales hacia la izquierda, solo saben que hay que hacerlo así. Obviamente estas actitudes repercuten en las medidas pedagógicas que proponen para corregir el error. Por ejemplo, las únicas propuestas en las que se potencia el diálogo entre el alumnado o la discusión guiada por el profesor parten de los docentes asiáticos. Nuevamente Liping Ma insiste en su mensaje sobre las limitaciones que el conocimiento del profesor implica en sus actividades. Comenta que algunos profesores se concentran en el aspecto puramente algorítmico a pesar de

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 1845 \end{array}$$

Figura 2. Error en el algoritmo de la multiplicación

tener una base matemática sólida. Por otra parte, ninguno de los docentes entrevistados es capaz de conducir a sus alumnos más allá de sus propios límites.

On one hand, none of those teachers whose knowledge was procedural described a conceptually directed teaching strategy. On the other hand, a few teachers who held a conceptual understanding of the topic would take a procedural direction in their teaching - they did not expect their students' learning to reach as far as theirs. Not a single teacher was observed who would promote learning beyond his or her own mathematical knowledge.

El capítulo 3 es quizás uno de los más llamativos, al darse el caso que tan solo el 43 % del profesorado americano fue capaz de realizar correctamente el cálculo de la figura 3.

Todos los docentes chinos completaron la operación sin ningún problema. Es más, un buen número ofrecieron justificaciones de sus cálculos, o dieron más de un método para calcular el resultado (por ejemplo, utilizar números decimales). También llama la atención cómo utilizan un lenguaje matemático muy preciso, haciendo referencia a las propiedades distributiva y conmutativa, convenciones en el orden de operaciones, la división como operación equivalente a multiplicar por el inverso, etc. Claramente se sienten muy cómodos con las leyes de las operaciones aritméticas, y además asumen que sus alumnos manejan estas ideas y propiedades de forma habitual en el aula.

En la segunda parte de la pregunta, en la que se pedía crear una historia o modelo para esta operación aritmética, solamente uno de los profesores americanos propuso un modelo conceptualmente correcto, frente al 90% de los asiáticos. Al final del capítulo la autora hace nuevamente una reflexión sobre la importancia del conocimiento del docente.

$$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$$

Figura 3. División por una fracción: la cuestión considerada en el capítulo 3

The Chinese teachers' performance on the task for this chapter was not noticeably different from that on the previous tasks. [...] Their ability to generate representations that used a rich variety of subjects and different models of division by fractions seemed to be based on their solid knowledge of the topic. On the other hand, the U.S. teachers, who were unable to represent the operation, did not correctly explain its meaning. This suggests that in order to have a pedagogically powerful representation for a topic, a teacher should first have a comprehensive understanding of it.

En el cuarto capítulo se explora la actitud matemática de los docentes. Se plantea la cuestión de responder a una alumna que afirma que ha descubierto una teoría que no has explicado en clase: que el área de un recinto cerrado aumenta cuando aumenta su perímetro. En este caso, la diferencia entre las respuestas de las dos nacionalidades no está en la habilidad de calcular perímetro y área de un rectángulo, sino en la actitud que adoptan ante un problema del que a priori no conocen la respuesta. A estas alturas ya no sorprende ver cómo los docentes chinos abordan el problema con ganas y en su mayoría con rigor matemático, frente a los americanos, que en su mayor parte se reducen a decir que no creen que sea cierto, pero ni saben decir por qué, ni cómo investigar el problema. Obviamente, esta diferencia en actitudes (figura 5) se refleja también en el tipo de respuesta que proponen para la hipotética alumna del ejercicio.

Con toda la evidencia recogida en estos cuatro capítulos, Liping Ma dedica el capítulo 5 a definir lo que ella llama «conocimiento profundo de matemáticas

fundamentales» (Profound Understanding of Fundamental Mathematics o «PUFM»). Esto conlleva también una definición de matemáticas fundamentales. La autora defiende con mucha pasión la idea de que las matemáticas elementales tienen un carácter fundamental. En repetidas ocasiones durante todo el texto, no solo durante este capítulo, hace hincapié en la terrible injusticia que se comete al considerar las matemáticas elementales como una colección de identidades numéricas y algoritmos de cálculo sin ninguna conexión entre ellos. Defiende que las características primarias y fundamentales de la matemática se pueden encontrar en estas matemáticas elementales, y por lo tanto constituyen la base sobre la que el alumnado construirá todo su aprendizaje matemático.

From a perspective of attaining mathematical competence, teaching elementary mathematics does not mean bringing students merely to the end of arithmetic or to the beginning of «pre-algebra». Rather, it means providing them with a groundwork on which to build future mathematics learning.

En consecuencia, el conocimiento profundo de las matemáticas que define Liping Ma implica tener una visión de conjunto de las matemáticas elementales, ser capaz de abordar un problema desde distintas perspectivas, ser consciente de las ideas básicas de la materia y establecer relaciones entre los diferentes conceptos y procedimientos que la componen. Además, este conocimiento debe reflejarse en la actividad docente.

$$\begin{aligned}
 1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} &= 1\frac{3}{4} \div (1 \div 2) \\
 &= 1\frac{3}{4} \div 1 \times 2 \\
 &= 1\frac{3}{4} \times 2 \div 1 \\
 &= 1\frac{3}{4} \times (2 \div 1) \\
 &= 1\frac{3}{4} \times 2
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} &= \left(1\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}\right) \div \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{1}\right) \\
 &= \left(1\frac{3}{4} \times \frac{2}{1}\right) \div 1 \\
 &= 1\frac{3}{4} \times \frac{2}{1} \\
 &= 3\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Figura 4. Dos explicaciones ofrecidas por docentes chinos para justificar el algoritmo de división por una fracción

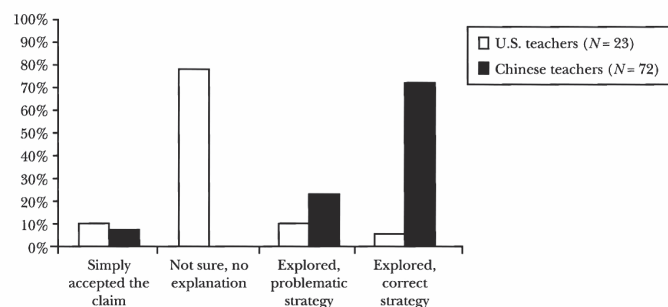


Figura 5. Gráfico comparando las respuestas de los dos colectivos de docentes a la cuestión del capítulo 4

¿Cómo y cuándo se consigue este conocimiento profundo de las matemáticas? Esta cuestión es el objeto del capítulo 6. Dado que durante su estudio no encontró evidencia de este conocimiento entre el profesorado estadounidense, Liping Ma dirige su mirada a la formación del profesorado chino. Al margen de si parten de una mejor base matemática al terminar la escolarización básica, la conclusión de la autora es que este conocimiento se desarrolla durante la carrera profesional del docente. Esto es posible gracias a una carga lectiva relativamente ligera, que implica la disposición de tiempo dedicado específicamente tanto al estudio de la materia (suele ser un estudio pormenorizado del libro de texto) como a la discusión entre colegas de los aspectos didácticos y pedagógicos del material del curso.

A lo largo de todo el libro Liping Ma ha establecido su tesis sobre la estrecha relación entre la calidad de la educación matemática que recibe el alumnado y el nivel de conocimiento del docente. Concluye pues que uno de los mayores problemas que afectan al sistema educativo estadounidense, en lo que se refiere a matemáticas, se debe a la falta de conocimiento de las mismas por una gran parte del profesorado. Para solucionar esta situación propone que se trabajen simultáneamente la formación del cuerpo docente y la mejora del aprendizaje del alumnado.

The second reason that improving teachers' subject matter knowledge cannot be isolated from improving school mathematics teaching is that, as I have revealed, the key period during which Chinese teachers develop a teacher's subject matter knowledge of school mathematics is when they teach it - given that they have the motivation to improve their teaching and the opportunity to do so. [...] What is needed, then, is a teaching context in which it is possible for teachers to improve their knowledge of school mathematics as they work to improve their teaching of mathematics.

En este capítulo de conclusiones Liping Ma también aborda otros asuntos como la formación inicial del profesorado y el posible papel de materiales curriculares como el libro de texto en un movimiento de reforma educativa. Dedicó también algunas páginas a aclarar lo que ella considera la parte esencial de una reforma efectiva en la enseñanza de las matemáticas elementales.

Con respecto al artículo de Liping Ma reproducido al final del libro, se trata de la versión inglesa de un artículo publicado por la autora en una revista china en 2012. En él repasa la historia del desarrollo del currículo de las matemáticas elementales en Estados Unidos, y realiza una crítica de su estructura. Indudablemente este contenido «extra» en la nueva edición es de más interés para nuestros homólogos estadounidenses. Por mi parte, ha sido interesante leer sobre los aspectos históricos que va comentando Liping Ma en el artículo, pero no estoy lo suficientemente informada para valorar las críticas que realiza.

Espero haber despertado vuestro interés hacia el trabajo de Liping Ma en esta reseña. Resulta fascinante leer las respuestas de los docentes participantes en el estudio. Aparte de lo que os he contado, hay otras ideas que la autora comenta en el libro, y lo que he mencionado aquí lo desarrolla con mucho más detalle y coherencia. Liping Ma se expresa en un estilo que a mí me ha parecido claro y ameno, y nos da mucho en lo que pensar. En fin, que, como ya os he dicho al principio, es una lectura absolutamente recomendable.

Maite Aranés Maza

IES de Villanueva de Gállego,
Villanueva de Gállego (Zaragoza)
<maite.aranes@gmail.com>