¿A qué quieres que te gane?

Daniel Sadornil Renedo

SUMA+ núm. 98
pp. 59-67
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

> La matemática tiene una rama que se llama Teoría de Juegos. ¿No debería ser suficientemente atractiva una ciencia que ofrece juegos en su menú? ¿No sería interesante considerarla como alternativa para estimular a los niños/jóvenes cuando están en el colegio?
> A. Paenza (2007)

Hace algunos años, tras los éxitos de algunos deportistas y equipos españoles en diversas competiciones, se puso de moda en los «mentideros» de las redes sociales y en los medios de comunicación la expresión: «Soy español, ¿a qué quieres que te gane?» Parecía que siempre un compatriota ganaba y que éramos lo mejor del mundo. Los futboleros recordamos también a Luis Aragonés en rueda de prensa diciendo repetidamente: «…ganar, ganar, ganar y volver a ganar…» repitiéndolo en bucle explicando el fútbol. No obstante, por muy deportistas y competitivos que seamos no siempre podemos asegurar los éxitos. Pero, se puede modificar un poco la expresión: «Sé matemáticas, ¿a qué quieres que te gane?». En diversos juegos de estrategia, las matemáticas permiten conocer y diseñar la forma de jugar para ganar a estos juegos (o al menos no perder). En esta sesión del proyecto ESTALMAT se presenta la relación entre juegos de estrategia y resolución de problemas matemáticos, así como diversos juegos y sus estrategias ganadoras.

El juego constituye una parte intrínseca de la naturaleza del hombre. Desde bien pequeños, jugamos con todo tipo de cosas: piedras, cartas, canicas… Empleamos los juegos para aprender y desarrollar nuestro conocimiento acerca del mundo que nos rodea. Por otra parte, no solo el juego forma parte de la vida del ser humano, ya que las matemáticas también aparecen en muchos aspectos de nuestra vida cotidiana. Las matemáticas se manifiestan en diferentes campos: ciencia, tecnología, economía, arte…, y de esta forma, diversas actividades requieren, en mayor o menor medida, del conocimiento matemático. Como afirma de Guzmán (1993):

> Al igual que las matemáticas, un juego comienza con la introducción de una serie de reglas, un cierto número de objetos o piezas, cuya función en el juego viene definida por tales reglas, exactamente de la misma forma en que se puede proceder en el establecimiento de una teoría matemática por definición implícita. Quien se introduce en la práctica de un juego debe adquirir una cierta familiarización con sus reglas, relacionando unas piezas con otras al modo como el novicio en matemáticas compara y hace interactuar los primeros elementos de la teoría unos con otros. Estos son los ejercicios elementales de un juego o de una teoría matemática.

Igualmente, muchos juegos utilizan la matemática en su desarrollo e incluso características, haciendo uso de los números o las relaciones geométricas, lo que les hace muy interesantes para su inclusión en el aula pues generan situaciones en las que son necesarios conceptos y técnicas presentes en el currículo y, al mismo tiempo, su práctica promueve el descubrimiento y aplicación de estrategias (Deulofeu y Edo, 2001).

Es por ello, que podemos asimilar la búsqueda de una estrategia ganadora a un juego con las mismas fases definidas por Polya (1989) para la resolución de problemas:

— comprender el problema,
— concebir un plan,
— ejecutar el plan,
— examinar la solución obtenida,

y emplear en el mismo contexto para los juegos matemáticos, tal y como hizo De Guzmán (1984):

— antes de hacer, tratar de entender,
— tramar una estrategia,
— mirar si la estrategia ideada lleva al final,
— sacarle jugo al juego.

Las similitudes entre la resolución de problemas matemáticos y su aplicación para la resolución de los juegos se pueden resumir según la tabla 1.

Problemas	Juegos
1. Comprender qué se pide.	1. Comprender los requisitos
2. Comprender qué quiero encontrar.	2. Comprender los movimientos.
3. Comprender qué datos tengo.	3.Comprender cómo se gana.
4. Existe un problema parecido.	4. ¿He jugado algún juego similar?
5. Formular conjeturas.	5. ¿Qué puedo hacer?
6. Seleccionar posibles estrategias.	6. Seleccionar posibles estrategias.
7. Ejecutar un plan y examinar la validez de la conjetura.	7. ¿Qué movimientos de ataque/defensa (oposición) hacen que el jugador progrese.
8. Se ha resuelto un problema.	8. He ganado (o perdido)
9. ¿Cuál es la estrategia general?	9. ¿Por qué?
10. ¿Se puede usar otra forma?	10. ¿Hay otra forma de ganar? ¿Es la mejor estrategia?
11. ¿Funciona siempre? Modificar el problema.	11. ¿Y si cambian las reglas?

Tabla 1. Estrategias de resolución de problemas y búsqueda de estrategias ganadoras (Salvador, 2012)

Por todo esto, la sesión «¿A qué quieres que te gane?» no solo trata de jugar, que también, sino de realizar los pasos señalados anteriormente, al estilo de los diferentes heurísticos involucrados en la resolución de problemas.

Desarrollo de la sesión

Las sesiones de ESTALMAT se desarrollan durante tres horas con un descanso de aproximadamente 20 minutos, es por ello que se dispone de algo más de dos horas y media para tratar el tema de los juegos de estrategia. La sesión no está diseñada para un nivel especial, se ha impartido en los distintos cursos de ESTALMAT, para alumnos desde 1.º a 3.º de la ESO. Este hecho no interviene en el modelo del desarrollo de la sesión.

Existen diferentes formas de aproximarse a los juegos de estrategia y motivar a los alumnos para mantener su atención y lograr los objetivos que se pretende. La elección de la presentación no es del todo propia, pero conjuga la relación entre los juegos y los problemas de matemáticas junto con la competición propia y el deseo de ganar siempre.

La sesión comienza intentando explicar (no siempre esto es fácil) que para poder resolver algunos problemas matemáticos no es posible siempre aplicar una fórmula conocida, de hecho, existen cuestiones en la que esto no es posible. Dependiendo del curso de los alumnos se pone como ejemplo la resolución de ecuaciones de grados dos, tres, cuatro o cinco y se aprovecha para contarles un poco la historia de este problema (Sabariego, 2020). Otro problema que se puede presentar es la conjetura de Collatz: tomemos un número natural cualquiera, si dicho número es par, lo dividimos entre dos, y si es impar lo multiplicamos por 3 y le sumamos 1; y repetimos el proceso con cada nuevo número que se obtenga. Tras varios ejemplos, vemos que llegamos siempre al número 1. ¿Es eso siempre cierto?, ¿cuántos pasos son necesarios? (Manero y Población, 2021). Es claro que esta introducción al tema no reproduce los diferentes pasos o heurísticos de la resolución de problemas, pero existen otras sesiones de ESTALMAT, que se realizan con anterioridad a esta, que tratan este tópico con lo que no es necesario ahondar en ello. A continuación, se expone la tabla anterior, que estará presente y disponible en todo momento de la sesión y se explica paso a paso las similitudes entre resolución de problemas y juego. Para ello, se pone como ejemplo de juego (aunque no existe una estrategia ganadora) el parchís (y algunas de sus variantes) que es de sobra conocido por todos los alumnos.

En la sesión se muestran diferentes juegos y algún pseudojuego, un juego en el que los jugadores no pueden hacer nada por cambiar el devenir de las partidas. Es decir, sean cuales sean las jugadas realizadas por cada uno de los jugadores, al final siempre ganará (o perderá) el mismo jugador, el que empieza la partida o el otro. En este sentido, independientemente de su tipología, todos se presentan de la misma forma y no se comenta de cuál de los dos tipos es. De esta forma, la sorpresa de los alumnos cuando descubren que se trata de un pseudojuego, y no hay nada que hacer para ganar o perder, se mezcla con la decepción. No obstante, encuentran también divertidos los pseudojuegos.

Es importante señalar, y así se les muestra a los alumnos, que los juegos que se van a presentar pueden clasificarse como juegos de información completa, en los que el azar no forma parte del desarrollo del juego y cada jugador sabe en todo momento qué jugadas puede hacer y qué consecuencias tiene cada uno.

A partir de este momento es cuando se empieza realmente a jugar y todos los juegos se presentan de la misma forma. Recordando el título de la sesión (y del artículo) «¿A qué quieres que te gane?» cada juego se explica de la siguiente forma:

— Útiles necesarios.
— Reglas de juego.
— ¿Quién se atreve a jugar conmigo?
— …

Siempre, o salvo en un pequeño número de ocasiones que se pueden contar con los dedos de una mano, en todos los años que he impartido esta sesión, el siguiente punto es el mismo:

— Oh, ¡has perdido!

De ahí proviene el título del artículo. Cada uno de los juegos tiene una estrategia ganadora para el primer o segundo jugador (salvo que sea un pseudojuego).

Lógicamente, yo conozco quién de los dos jugadores posee una estrategia ganadora, pero en algunos de ellos invito al voluntario de turno a que decida si quiere empezar a jugar o no. Usualmente, aunque el juego tenga estrategia para el primer jugador y sea el voluntario el que comience, al no conocer la estrategia, puedo recuperar «ese poder de la estrategia» fácilmente. En aquellos juegos en los que este hecho es difícil o imposible o en los pseudojuegos, no realizo esta invitación.

Tras ganarles varias partidas, pues los alumnos se empeñan en no querer perder, les invito a que jueguen por parejas. Para cada juego, se les proporciona una ficha donde van escribiendo los movimientos de cada jugador y el resultado final. Tras unos intensos minutos de competición algunos valientes se atreven a conjeturar (como si fuera un problema matemático) cuál es el proceso para ganar. Es importante, para que todas las parejas lleguen a descubrir correctamente la estrategia o acercarse al menos a ella, que no digan en voz alta sus conclusiones. Si la estrategia es correcta, les comunico que esperen a sus compañeros (pues siempre hay unos más rápidos que otros); en caso contrario, les invito a jugar conmigo otra vez, y como era de esperar y tras sorpresa, ellos vuelven a perder, lo que les motiva aún más para poder seguir buscando la estrategia correcta. Cuando ya casi todos los grupos encuentran la estrategia correctamente, se abre un turno de debate y preguntas para conocer cómo han llegado a ella. Curiosamente, los razonamientos mostrados, en ocasiones son totalmente disparatados y sin sentido aun llegando a la estrategia correcta. Para algunos de los juegos se pueden proponer variantes que se exponen y enseguida los alumnos, sin jugar siquiera, saben cómo ganar.

A continuación, se muestran algunos de los juegos realizados en esta sesión junto con las estrategias ganadoras y algunas de sus variantes.

Juego 1: Quitando fichas

Se dispone de un número determinado de fichas sobre la mesa, digamos por ejemplo 14. Por turnos, cada uno de los dos jugadores puede retirar una o dos fichas. El que retira la última ficha gana.

Este quizás es uno de los juegos más simples que se pueden presentar, el número de fichas inicial no es del todo importante, aunque de él depende quién tiene la estrategia ganadora como veremos a continuación.

La práctica reiterada del juego permite descubrir que, si hay tres fichas en la mesa, el siguiente jugador perderá de forma inexorable el juego. En efecto, si ahora quita una ficha, el otro jugador quitará las dos para ganar; si en cambio quita solo una, el segundo jugador retira la ficha que queda sobre la mesa también para ganar. Pero claro, ¿cómo se llega a dejar tres fichas cuando en principio había 14? Aquí es donde entra en juego la tabla de partidas que han rellenado para buscar patrones. Un ejemplo podría ser el de la tabla 2.

En la segunda partida de ejemplo no se ha llegado a la situación de dejar tres fichas, pero sí en los otros dos casos (que curiosamente ganaron jugadores distintos). No es difícil darse cuenta de que si queremos dejar tres fichas al adversario (para que pierda), en la jugada anterior este último nos tiene que haber dejado cuatro o cinco fichas, para que al quitar una o dos respectivamente tengamos el resultado adecuado. Claramente, la forma de hacer esto, es dejarle antes 6 fichas. Repitiendo este razonamiento hacia atrás con el número de fichas en la mesa, se observa que si se deja un número de fichas que sea múltiplo de tres se gana siempre la partida. Esto permite obtener, en este

Jugador	Partida 1		Partida 2		Partida 3	
	Quita	Queda	Quita	Queda	Quita	Queda
A	1	13	2	12	1	13
B	2	11	2	10	1	12
A	2	9	2	8	2	10
B	1	8	2	6	1	9
A	1	7	1	5	2	7
B	2	5	1	4	1	6
A	2	3	2	2	2	4
B	1	2	2	0	1	3
A	2	0			2	1
A					1	0
	Gana A		Gana B		Gana B	

Tabla 2. Ejemplos de partidas del juego «Quitando fichas»

caso, una estrategia ganadora para el primer jugador, quitando primero 2 fichas para dejar 12 (obsérvese la partida 3 del ejemplo).

Cambiar el número de fichas no cambia la estrategia ganadora, pero sí puede que cambie el jugador que tiene ventaja. Si en la mesa hay 15 fichas (o cualquier múltiplo de 3), la misma estrategia de dejar un número de fichas múltiplo de 3, da la ventaja al primer jugador.

Este primer juego tiene varias variantes cuya estrategia es similar y no es difícil de obtener.

Variante 1: En lugar de quitar una o dos fichas se pueden quitar 1 a n, el número que hay que dejar son siempre los múltiplos de n+1. Por ejemplo, si n=4, hay que dejar siempre múltiplos de 5.

Variante 2: En cada turno se pueden quitar 1, 3, 5 fichas y hay por ejemplo 20 fichas. En este caso siempre hay una estrategia ganadora para el segundo jugador. 20 es un número par, quitando 1,3 o 5 (impares) se convierte en impar el número de fichas que quedan. Quite las que quite el segundo jugador, será par. Y así sucesivamente, sobre la mesa hay un número par, impar, par, impar, par… y de eta forma para quitar la última ficha debe haber un número impar de fichas antes (1,3 o 5) y eso solo lo puede encontrar el jugador 2. Si hubiera de inicio un número impar de fichas, ganaría siempre el primer jugador.

Variante 3: En este caso lo que cambia es la elección del ganador. En lugar de ganar el jugador que retira la última ficha, pierde el que quita la última ficha. Para poner un ejemplo supongamos como al principio que tenemos 14 fichas y que se pueden retirar una o dos. Al principio, los alumnos intentan buscar una estrategia similar a la del primer juego trabajando con los múltiplos de 3, pero enseguida se dan cuenta de que esto no sirve. En este caso, para ganar, habrá que dejar al otro jugador 1,4,7,10... fichas, es decir, una más que un múltiplo de 3.

En el desarrollo de la sesión, algunos intentos de alcanzar la estrategia por parte de los alumnos son:

— «… tiene que haber 3 fichas para ganar seguro».
— «Pues que cuando quite uno, que quite 2 y si no al revés».
— «Que intente quedarse con 3 fichas».
— «Que empiece cogiendo 2, y al final que queden 3».

Juego 2: Chocolate y Piedra

Este juego es de carácter geométrico. Se dispone de una tableta de chocolate en el que la onza de la esquina inferior izquierda ha sido sustituida por una piedrita tal como se recoge en la figura 1.

Cada jugador por turnos, parte la tableta horizontal o verticalmente (en onzas enteras) y se queda (o come) con la parte de chocolate que no contiene la piedra, porque digamos que esta es algo indigesta. Gana el jugador que se come el último trozo de chocolate y deja al otro solamente la piedra.

Para aclarar mejor cuáles son las posibles acciones, se muestra en la figura 2 dos posibles cortes de la tableta para el primer jugador al empezar el juego.

A la izquierda, el primer jugador ha cortado la tableta de chocolate verticalmente y se ha quedado/comido un trozo de chocolate de 3 onzas de ancho por 5 de

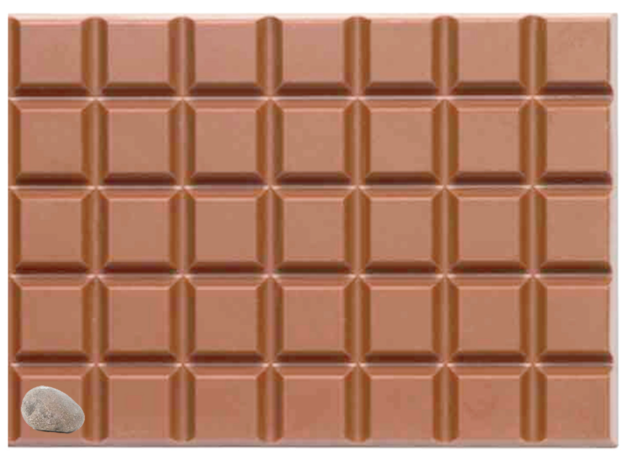

Figura 1. Tableta de chocolate con piedra

alto y le ha ofrecido al segundo jugador el trozo de tableta que tiene la piedra. A la derecha, el corte se ha realizado en horizontal.

Lógicamente, en el mercado no existen tabletas con estas características, con lo que la actividad se realiza con las tabletas impresas y con unas tijeras. Es recomendable disponer de tabletas de diferentes tamaños para que la estrategia sea general y no particular de la tableta escogida.

Como en el juego anterior, y en la mayoría de los juegos de estrategia, a medida que los alumnos juegan, van dándose cuenta de que la búsqueda de la estrategia ganadora es más fácil si se hace desde los últimos pasos, es decir, empezar por los casos fáciles. En este caso, si la tableta fuese solo una fila o una columna, es claro que es posible cortarla de una vez para dejar la piedra al otro jugador.

Cualquiera de estas dos formas son posiciones ganadoras. Pero, ¿y si tenemos más filas o columnas? ¿es más fácil o más difícil? Abordar el problema de esta forma no es sencillo y llevaría a estudiar muchos casos posibles y no es factible.

No obstante, los estudiantes, tras jugar varias veces con tabletas diferentes, seguro que han descubierto que si un jugador deja al otro una tableta que sea un

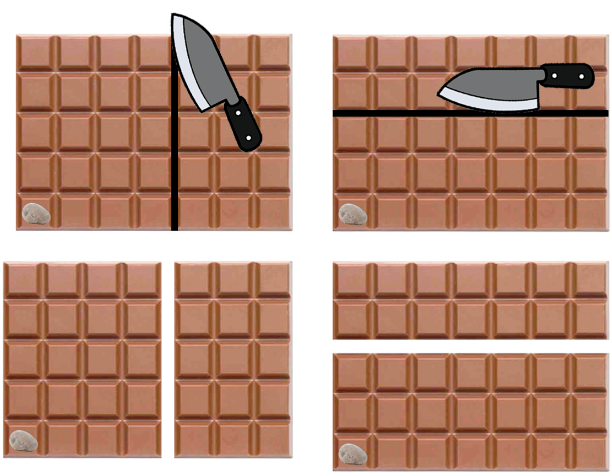

Figura 2. Dos posibles jugadas iniciales

cuadrado pequeño (2×2 o 3×3) gana la partida. En el caso 2×2, el siguiente jugador solo puede dejar una fila o columna y en el caso 3×3, aun habiendo más posibilidades, todas se reducen a obtener un cuadrado 2×2 o una fila o columna. En este momento, los alumnos no siempre ven la estrategia ganadora y es necesario jugar más veces con otros tamaños.

A veces es necesario darles alguna indicación para que piensen qué figuras geométricas resultan tras los cortes. Solo hay dos opciones: rectángulos y cuadrados (aunque recordemos que todos los cuadrados son rectángulos y no al revés).

Si se parte de un cuadrado, cualquier corte deja un rectángulo y a partir de un rectángulo siempre es posible cortar para obtener un cuadrado. El jugador que se queda solo con la piedra pierde, que es justamente un cuadrado 1×1.

Por tanto, la estrategia ganadora para este juego es ir dejando al otro jugador una tableta cuadrada y, salvo que solo sea la piedra, este devolverá de nuevo un rectángulo que puede convertirse de nuevo en cuadrado y así sucesivamente.

Dependiendo si la tableta original es un cuadrado o no, la estrategia ganadora es para el segundo jugador o para el primero.

Una variante de este juego es considerar otro lugar de la tableta para colocar la piedra. Recomendamos en este caso, empezar a colocarla en el borde y así reducir el juego al anterior, pues colocarlo en el medio puede confundir un poco en la búsqueda de la estrategia (que la hay).

Algunos de los comentarios de los alumnos para alcanzar la estrategia ganadora son muy acertados:

- «Dejar al contrincante con un cuadrado de 2×2».
- «Que intente hacer cuadrados iguales».
- «Siempre coger líneas para formar un cuadrado».
- «Dejar siempre lado $\times$ altura igual (cuadrado)».

Juego 3: Uniendo puntos

En una circunferencia se tiene un número de puntos dado. Por turnos, cada uno de los jugadores une dos puntos cualesquiera por un segmento (por dentro del círculo, es decir, una cuerda). Pueden unirse puntos si no están ya unidos y el segmento resultante no corta a uno hecho. El que no pueda trazar más segmentos pierde. La figura 3 muestra un ejemplo con 8 puntos antes de empezar y tras algunas jugadas (exactamente siete).

A cada pareja de alumnos se les puede dar distintas configuraciones de los puntos en la circunferencia e incluso distinto número de puntos. Estos dos aspectos, aunque a priori puedan parecer importantes son totalmente superfluos pues no alteran en absoluto el resultado. Tras varias partidas en parejas, a pesar del entusiasmo y concentración que puedan tener los jugadores, en todos los casos siempre, aunque no sepas jugar, gana el primer jugador. Es lo que antes hemos denominado pseudojuego.

El máximo número de cuerdas que se pueden trazar no depende de la posición de los puntos y depende en exclusiva del número de ellos. Esto podría hacer pensar que, quizás, el segundo jugador tenga una oportunidad, si el número es adecuado, pero no es así. En una circunferencia con n puntos, se pueden trazar exactamente $2n-3$ cuerdas. Como este número es impar, la última cuerda posible la dibujará el primer jugador y gana la partida.

Este número resulta de cuál es la figura final, que no es más que una triangulación del n-ágono formado por los puntos iniciales. Una triangulación de un polígono siempre usa $n-3$ diagonales.

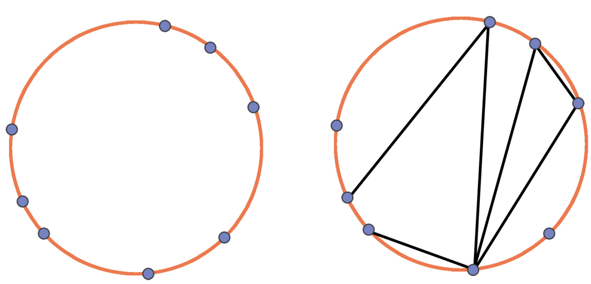

Figura 3. Figura inicial y tras siete jugadas

Hay que hacer notar también que dependiendo del número de puntos existen diversas configuraciones finales de la partida. Para tres puntos siempre queda el mismo dibujo (un triángulo), para cuatro hay dos (un cuadrado y una de sus diagonales), para cinco tres, pero para seis hay 12, 42 para siete…, y para ocho, que es el ejemplo que hemos tomado, hay 132. En general, con n puntos se obtiene el número de Catalan $Cn-2$ partidas distintas (número de triangulaciones de un polígono de n lados). Por eso conviene no poner menos de siete puntos con un grupo numeroso de alumnos para disimular que las partidas sean distintas.

Una generalización curiosa y menos conocida es permitir también puntos interiores en el círculo y añadir la regla de que el segmento que una dos puntos no puede pasar por otro punto. Sigue siendo un pseudojuego, pero esta vez, da la oportunidad también al segundo jugador pues si hay n puntos en la circunferencia y m en el interior, el número de segmentos que se pueden trazar es $2n+3m-3$. Por tanto, si m par, gana el primer jugador y si m es impar gana el segundo. Puede resultar útil para que los alumnos descubran, que un pequeño cambio (un punto dentro) provoca el resultado contrario.

En esta ocasión, algunos alumnos son muy escépticos:

— «Este juego es muy aburrido».
— «Puedo jugar sin pensar».
— «Pues así no tiene gracia».

Juego 4: Monedas en fila

Se tiene un número par de monedas (por ejemplo 6) de varios valores (pueden repetirse) de modo que la suma de todas no sea un número par, es decir, que el valor total no se pueda repartir en dos partes con el mismo valor. Por ejemplo, se pueden tomar las siguientes monedas de céntimo: 1 de un céntimo, 2 de dos céntimos, 2 de cinco céntimos y 1 de 10 céntimos; el valor total es 25 céntimos. También es posible realizar este juego con cartas de valores numéricos con la condición mencionada sobre la suma de los valores.

Antes de comenzar, es necesario explicar la dinámica del juego. Una vez dispuestas en una fila las monedas, por ejemplo, como se indica en la figura 4, por turnos, alternativamente, los jugadores retiran una moneda de algún extremo de la fila. Ganará el jugador que haya conseguido que las monedas que ha retirado valgan más, en conjunto, que las del otro jugador.

Este juego puede realizarse en dos versiones. La primera versión, que es la que se suele utilizar en la sesión de ESTALMAT es pedir al primer jugador que coloque las monedas en fila como él desee y que sea el segundo jugador el que empiece retirando monedas. La segunda versión consiste en empezar con las monedas ya colocadas y dejar al primer jugador que retire una moneda. Aunque la primera impresión es que ambas versiones son iguales, pues la estrategia es la misma como se verá a continuación, en la primera la ventaja es del segundo jugador y en la otra esa ventaja corresponde al primero.

Independientemente de cómo se coloquen las monedas, el jugador que empieza a retirarlas puede elegir las monedas adecuadamente para ganar el juego. El importe total de las monedas es, en este caso, de 25 céntimos. Claramente, cada uno se lleva tres monedas y no puede haber empate pues no hay ninguna elección de tres monedas que sea 12 céntimos y medio.

Si las monedas están colocadas de alguna forma concreta, se suman los valores de las monedas colocadas en las posiciones 1, 3 o 5 (impares). Si este valor es más grande que 12,5 entonces elegirá esas monedas, en caso contrario, elegirá las monedas que ocupen las posiciones pares. Esto se puede hacer siempre pues en la primera elección uno de los extremos es par y el otro impar. Si tuviera que elegir las posiciones impares, al elegir la primera, al oponente solo le quedan monedas en posición par y le permitirá de nuevo al primer jugador una posición impar. Si tiene que elegir las posiciones pares, eligiendo la última moneda le quedan al otro jugador solo posiciones impares.

Figura 4. Monedas dispuestas en fila

De esta forma, con la primera versión del juego, el segundo jugador puede ganar siempre mientras que en la segunda es el primer jugador, si escoge adecuadamente, el que gana.

Es conveniente recordar cuáles son las monedas que ocupan las posiciones pares o impares, pues si el jugador con estrategia ganadora se equivoca al quitar la moneda correspondiente, ya no se puede asegurar la victoria. En el caso de que las monedas tengan otro valor, hay simplemente que contar cuanto suman las monedas en posición par y en posición impar.

Una variante de este juego, y que se puede utilizar para despistar un poco tras haber jugado en varias ocasiones, es tomar un número impar de monedas, por ejemplo 7 (y que haya tres monedas que sumen más que las otras cuatro). En este caso, la estrategia ganadora corresponde al que coloca las monedas. El jugador que comienza retirando las monedas solo puede escoger una que esté en posición impar y además tras retirar todas, el primer jugador se queda con cuatro monedas mientras que el segundo solo con tres monedas. Si se colocan en las posiciones pares las tres monedas cuya suma sea mayor que las otras cuatro, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora.

Aunque a simple vista la estrategia parece sencilla, no es habitual que los alumnos lleguen a ella sin ayuda. En ocasiones, puede ser conveniente jugar simultáneamente con varias disposiciones distintas en el que solo dos monedas (distintas claro) han cambiado su posición, por una parte, cuando ambas ocupan posiciones pares (o impares) y por otra cuando una está en posición par y la otra en impar. Los alumnos han percibido cierta dificultad en el desarrollo del juego, aunque al final alguno acertó:

— «Coger la de más valor siempre».

— «Depende de la suerte».
— «El que coloca, pierde».

Conclusiones

Jugar es divertido, las matemáticas son divertidas (aunque algunos piensen lo contrario). Por tanto, jugar con matemáticas o hacer matemáticas jugando tiene que ser doblemente divertido, ¿no? Además, durante los juegos mencionados se pueden trabajar de forma «algo entretenida» diversos conceptos matemáticos del currículo. Más concretamente, se tratan múltiplos y divisores en el primer juego, rectángulos y cuadrados en el segundo, cuerdas, polígonos y diagonales en el tercero (incluso triangulaciones) y finalmente, paridad en el cuarto. Pero no es solo importante el contenido matemático implícito en el juego lo que se trata en esta sesión, sino también la capacidad de razonamiento, abstracción, generalización y las diversas heurísticas utilizadas para llegar a la estrategia ganadora.

Finalmente, podemos señalar algunos de los comentarios realizados por los alumnos tras la sesión en respuesta a si les ha ayudado a entender mejor ciertos aspectos matemáticos, que muestran como el objetivo de potenciar el razonamiento matemático se ha conseguido:

—«Sí, a buscar estrategias con las ansias de ganar».
—«Sí, me ha ayudado a pensar siempre y también a aprender a perder».
—«Porque hace que pensar».
—«Porque me ha ayudado mucho a usar la cabeza».

Los tres primeros juegos se presentaron en las actividades organizadas por el Comité Español de Matemáticas en la celebración del Día Internacional de las Matemáticas de 2021, contando con el apoyo de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). Se puede visualizar su desarrollo en <https://www.youtube.com/watch?v=udM1HiLM2XM>.

Referencias bibliográficas

Deulofeu, J. (2010), *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes. Teoría de Juegos*, Colección «El mundo es matemático», RBA.

Deulofeu, J., y M.Edo (2006), «Investigación sobre juegos, interación y construcción de conocimientos matemáticos», *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*,Vol. 24, n.º 2, 257-268.

Guzmán, M. de (1984), «Juegos matemáticos en la enseñanza», *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas celebradas en Santa Cruz de Tenerife del 10 al 14 de septiembre de 1984.* También en *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, n.º 59, 2004, 5-38.

— (1993), *Tendencias Innovadoras en educación matemática,* Ediciones OEA.

Manero, V., y A. Población (2021), «La conjetura de Collatz: un problema sencillo que desafiará tu intuición» en *ABCdario de las matemáticas*, <https://www.abc.es/ciencia/abci-conjetura-collatz-problema-sencillo-desafiara-intuicion-202101180110_noticia.html>.

Paenza, A. (2007), *Matemática… ¿Estás ahí? Episodio 3,14,* Colección «Ciencia que Ladra…», Siglo xxi Editores, Buenos Aires.

Polya, G. (1989), *Cómo plantear y resolver problemas* (2.ª ed.), Editorial Trillas, México.

Sabariego, P. (2020), «Duelos matemáticos del siglo XVI», Blog *MatemáticaMente* <https://bit.ly/33B4OTE>.

Salvador, A. (2012), «El juego como recurso didáctico en el aula de Matemáticas», Universidad Politécnica de Madrid, <https://bit.ly/3t141WF>.

Daniel Sadornil Renedo
Universidad de Cantabria
<sadornild@unican.es>