MATEMÁTICAS A UN CLIC

La mitad del cubo

José Antonio Mora Sánchez
José Luis Muñoz Casado
José Aurelio Pina Romero

SUMA+ núm. 98
pp. 93-104
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

Las tecnologías existentes hoy en día permiten plantear al alumnado investigaciones y proyectos que pueden ayudar a mejorar su competencia matemática, estableciendo conexiones con diferentes áreas como la biología, la tecnología, la historia, el arte, etc., y extrapolando conceptos y procedimientos propios de las matemáticas a otros entornos no matemáticos.

En los últimos años, el uso de impresoras 3D en el ámbito educativo se ha visto incrementado por su coste y accesibilidad de la mano del profesorado (Beltrán-Pellicer, 2017; Aguilar, 2020) innovador y creativo. Creemos que el uso de esta tecnología se puede utilizar para generar oportunidades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel escolar, abriendo la mente del alumnado (Reichenberger y otros, 2019).

El software libre GeoGebra <https://www.geogebra.org/>, de atractiva interfaz gráfica, disponible en distintos idiomas y dispositivos, con una amplia comunidad global, y en constante desarrollo, permite trabajar con objetos 3D a partir de la versión 5 con relativa sencillez. La versión 6 (escritorio y web: figura 1) incorpora la posibilidad de exportar las construcciones al formato STL para luego poder imprimirlas utilizando una impresora 3D.

Cabe recordar que también ha incorporado la Realidad Aumentada (RA) en las aplicaciones para dispositivos móviles (figura 2):

https://cutt.ly/VEJ95tK
https://cutt.ly/sEJ93fF

Proponemos una actividad clásica, conseguir la mitad de un objeto geométrico, con la utilización de la tecnología para generar no solo conocimiento matemático sino también computacional al tener que explorar, analizar, modelizar o generalizar los diferentes procesos que intervienen en el proyecto.

Antecedentes

Este problema proviene de una investigación de matemática escolar desarrollada a lo largo de más de 30 cursos en las clases de 1.º a 4.º ESO con distintos niveles de profundización y que ha sido descrita en tres artículos:

- «La mitad del cuadrado» (Mora, 1991). Mitades con lápiz y la tecnología más avanzada del papel cuadriculado y el lápiz de punta fina. El foco se puso en los procesos que llevan a los estudiantes a descubrir nuevos procedimientos para conseguir la mitad del cuadrado y en la organización de la clase para conseguir que unos procedimientos abran el camino a otros.
- «La mitad del cuadrado con geometría dinámica» (Mora, 2007) en la que se exploran las ideas de construcción de un procedimiento con el software matemático Cabri II y se centra en las soluciones que incluyen elementos dinámicos para ir de unos procedimientos a otros.
- «Azulejos con GeoGebra en el Museo de Onda» (Mora, 2017). El software utilizado es GeoGebra, el foco se pone en la construcción de soluciones dinámicas que incluyen elementos manipulables (mediante desplazamiento, giro, etc.) bajo ciertas condiciones para dar lugar a nuevas soluciones. Con esos diseños creamos baldosas para obtener mosaicos que después llevamos al taller del Museu del Taulell de Onda para pintarlos y decorar con ellos el instituto.

Ya desde el primer artículo se proponen varias posibilidades de ampliación del problema a otras situaciones en las que se cambia el cuadrado por un triángulo equilátero, un hexágono o un círculo, obtener un tercio o la cuarta parte del cuadrado y también se incluye «el paso del plano al espacio: obtener un poliedro cuyo volumen sea la mitad del cubo», que es el tema que abordamos en este artículo.

Tenemos otro antecedente de este trabajo en la investigación de las secciones del cubo. Normalmente

Versión escritorio

Versión web

Figura 1

Iphone

Android

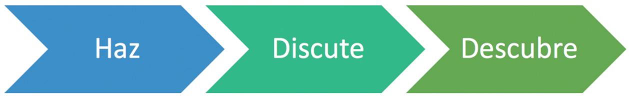
Figura 2

la primera sesión empezaba con una situación de imaginar, también se podría llamar de intuición espacial. Al principio seguía una secuencia tomada de Alonso y Salar (1992) parecida a esta:

- Toma un cubo. Da un pequeño corte a una esquina. Intenta que la sección que se obtiene sea un triángulo equilátero.
- Da un nuevo corte de forma que el triángulo equilátero sea un poco mayor. Sigue hasta que el triángulo sea lo más grande posible.
- Sigue un poco más, ¿ya no es triángulo? ¿Qué nueva figura se ha formado?
- ¿Puedes conseguir que el hexágono sea regular? ¿Cómo es el corte en este caso?
- Sigue dando cortes paralelos a los anteriores hasta que salga de nuevo un triángulo equilátero cada vez más pequeño.

El trabajo continuaba con la obtención de secciones del cubo con todas las formas que pudiéramos conseguir: triángulos, cuadriláteros y otros polígonos.

El esquema de trabajo de una investigación solía ser:



Pero siguiendo a Fielker (1987) se da un vuelco a este orden que se daba por establecido:

Es decir, ante las propuestas de trabajo, primero se hace una predicción de la figura que se va a obtener, después el estudiante debe defender su propuesta ante otras distintas de sus compañeros y, solo al final, hacer dibujos sobre plantillas de cubos o dar el corte a cubos de estiropor.

Secciones modulares del cubo con GeoGebra 3D

De aquella propuesta inicial de trabajo cuyo objetivo era conseguir secciones poligonales en los cortes del cubo hemos pasado a otra que enlaza mejor con la mitad del cuadrado. Lo que nos propusimos es intentar que esas secciones fueran modulares, es decir, que dieran lugar a dos partes exactamente iguales en forma y tamaño.

Las primeras secciones no eran difíciles: un plano paralelo a una de las caras que pase por los puntos medios de cuatro aristas (sección cuadrada), un plano que entre por una arista y salga por la arista opuesta (rectángulo), un plano que vaya por la diagonal principal y sea perpendicular a la diagonal espacial opuesta (rombo) o un plano perpendicular a la diagonal principal que incluya a los puntos medios de seis aristas (hexágono) (figura 3).

En los *applets* se representa el desplazamiento del plano de corte que se introduce en el interior del cubo para componer una de las dos partes en las que se ha dividido el cubo. Tomamos nota de los puntos que se generan para construir una a una las caras del poliedro que constituye esa sección modular (la cara

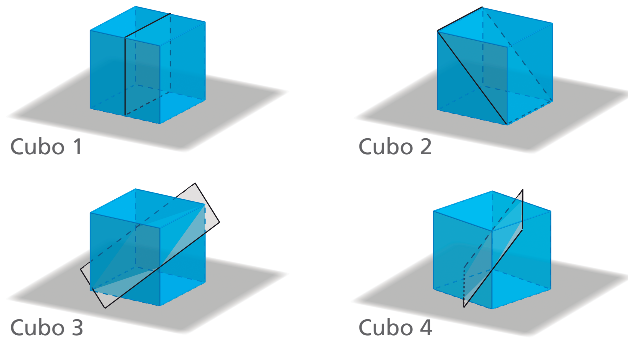


Figura 3

que proviene del corte y todas las caras poligonales que se originan sobre las caras del cubo).

La técnica utilizada con GeoGebra ha consistido en crear una lista con todos los polígonos que envuelven a esa mitad del cubo, esto nos permite trabajar con ese poliedro como un objeto único (una lista en color rojo) con el que construir la otra mitad (en color verde) por traslación, giro o simetría (o una combinación de esos movimientos). Después los separamos con una traslación para ver la descomposición del cubo en dos partes que podemos alejar y acercar con un deslizador.

Propuestas didácticas

PROPUESTA 1

Muchas de las piezas que hemos realizado requieren de una gran destreza en el uso de GeoGebra, sin embargo, alguna de ellas sí permite trabajar con el alumnado. En particular, las piezas que vamos a mostrar se trabajaron en 2.º de ESO con alumnado que el año anterior, durante el confinamiento, habían realizado «La mitad del cuadrado» (figura 4).

Figura 4. Vídeo *Mitad del cuadrado*

Con «La mitad del cuadrado» se trabajaron:

- Las propiedades de las formas de 2D.
- La descripción con precisión.
- La clasificación según las propiedades de las formas y la comprensión de las relaciones entre sus elementos.

Con la versión en 3D el planteamiento didáctico fue el siguiente:

- Usar la geometría analítica para representar y examinar propiedades de algunas figuras 3D.
- Describir los tamaños, las posiciones y las orientaciones de figuras geométricas 3D sometidas a transformaciones como reflexiones, rotaciones, traslaciones y escalas.

El alumnado de esta experiencia estaba familiarizado con el uso de GeoGebra en el plano. Sin embargo, la parte 3D era nueva para ellos, por tanto, se dedicaron varias sesiones a familiarizarnos con la geometría 3D y con GeoGebra 3D. Aprendieron a representar puntos en el espacio y formas tridimensionales como prismas, pirámides, conos y poliedros aprendiendo sus elementos principales.

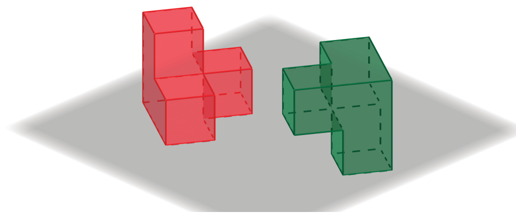
Una vez familiarizados con las formas 3D y las diferentes vistas se lanzó el reto de dividir el cubo en dos mitades iguales. Al igual que en la mitad el cuadrado, los primeros cortes surgen de modo natural, son las que hemos construido en la sección anterior.

Para avanzar un poco más en la visualización tridimensional, se sugirió la posibilidad de usar más de un corte al dividir el cubo, en la propuesta no se menciona usar exclusivamente uno solo. Se propuso construir los dos modelos de la figura 5, uno con una simetría central y el otro no. Tras examinar las piezas, y con el dato previo de que el cubo tenía que tener de longitud de arista 4 cm, se lanzaron a investigar cómo realizar las figuras.

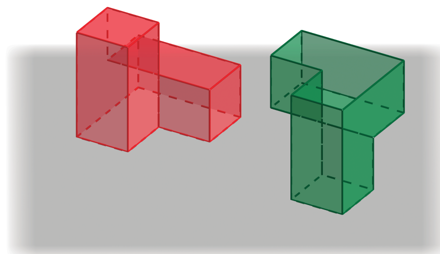
Hubo un grupo de alumnos que recurrió a dibujar el cubo de arista 4 cm y representar los puntos necesarios para conseguir la figura (figura 6).

Una vez localizado los vértices, construyó cara a cara la pieza (figura 7).

Sin embargo, otro grupo de alumnos descompuso la pieza en otras conocidas: un prisma cuadrado de base 2×2 y altura 4, y dos cubos $2 \times 2 \times 2$ (figura 8).



Propuesta número 1



Propuesta número 2

Figura 5

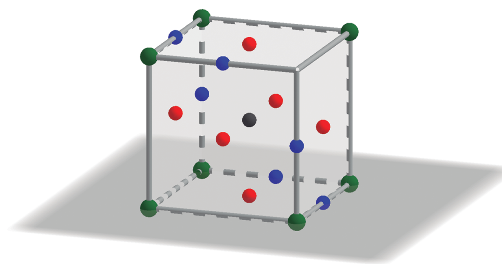


Figura 6. Cubo con los puntos medios de caras y aristas

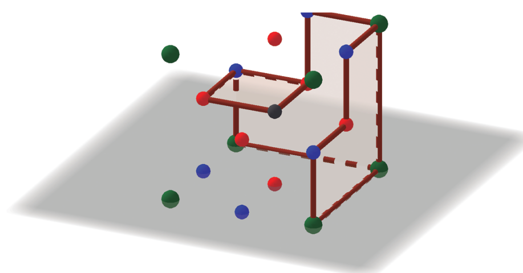


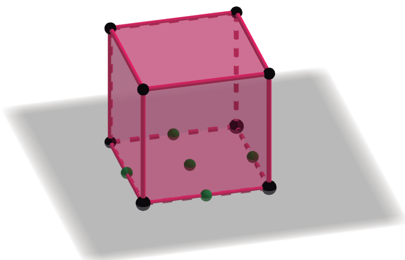
Figura 7. Construcción de las caras de la pieza

Para conseguir la segunda pieza usaron la simetría por el centro del cubo.

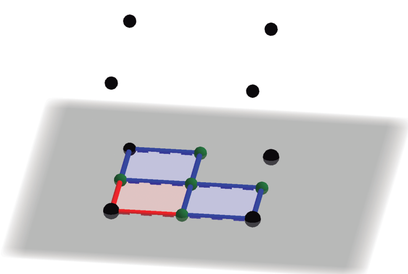
Al realizar la segunda propuesta, todos los alumnos observaron que la pieza a construir era un prisma «de pie» y otro «tumbado» (figura 9).

Sin embargo, al representar la figura simétrica por el centro del cubo descubrieron que parecían piezas iguales pero que no lo eran, dando pie a explicar las diferentes simetrías que se pueden realizar en el espacio (figura 10).

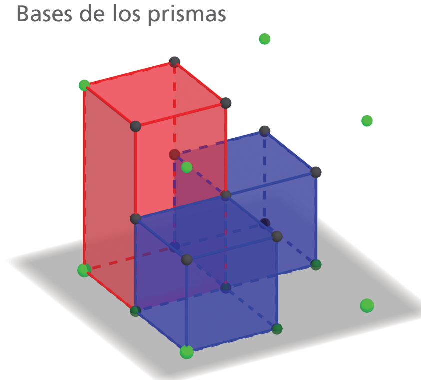
Para solventar el problema, los alumnos representaron los otros prismas de igual forma que los primeros.



Puntos medios de aristas y caras



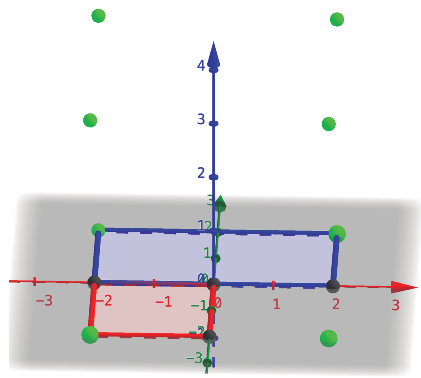
Bases de los prismas



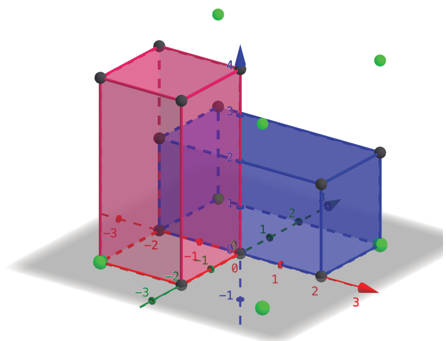
Pieza construida por composición

Figura 8

Para finalizar la actividad, los alumnos exportaron el fichero en formato STL, y con la impresora 3D del centro, y a lo largo de varios días, se imprimieron las piezas a cada uno de los alumnos.



Bases de los prismas



Prismas de base cuadrada y rectangular

Figura 9

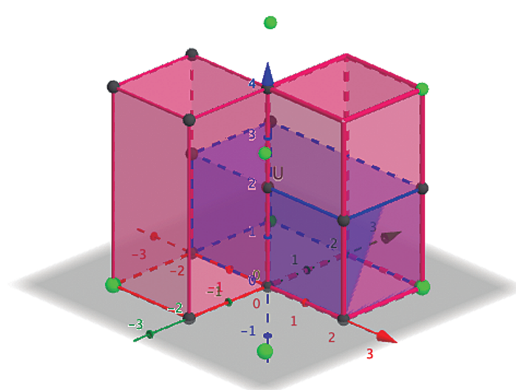


Figura 10. Al hacer la simetría se solapan los prismas

PROPUESTA 2

Esta propuesta se realizó en el proyecto interdisciplinar con alumnado de 4.º ESO en el IES Gaia de Sant Vicent del Raspeig. Se les propuso construir la mitad del cubo, pero de igual área y volumen, con la cara del corte de forma hexagonal (figura 11).

En sesiones anteriores se había realizado una iniciación a GeoGebra 3D, con la construcción de su primera pieza y de un tangram en 3D.

En clase se les proporcionaron piezas impresas para que investigaran cómo construirlas mediante GeoGebra.

Un alumno unió las dos piezas y observó que los vértices del corte hexagonal recaían en el punto medio de las aristas. Construyó un cubo de arista 5 cm, y marcó los puntos medios de todas las aristas. A partir de este punto construyó el corte hexagonal, y el resto de los polígonos (figura 12).

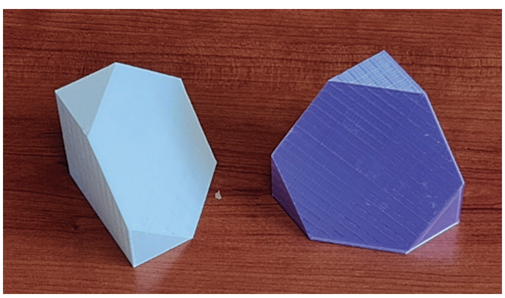


Figura 11. Cubo impreso

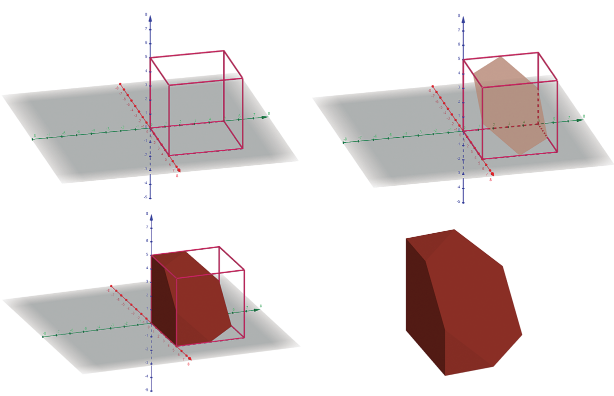


Figura 12

Para profundizar

SECCIONES CURVAS

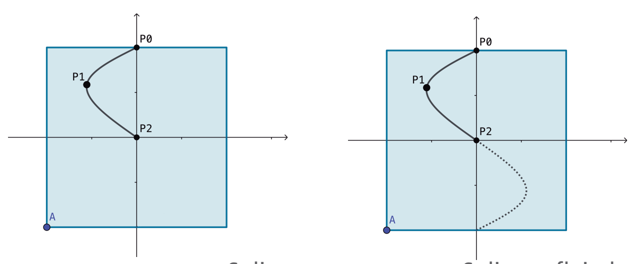
Una vez realizadas las secciones rectas, el siguiente reto que se plantea es encontrar secciones curvas que dividan al cubo en dos partes iguales.

Para conseguir piezas iguales o simétricas es interesante reflexionar sobre la simetría de la curva que cortará alrededor del centro de una de las caras. Una forma de conseguir curvas suaves consiste en usar la herramienta **Spline**.

> **Spline**
>
> Una función spline está formada por varios polinomios, cada uno definido sobre un intervalo, que se unen respetando ciertas condiciones de continuidad. Si tenemos $n+1$ puntos, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ y fijamos el grado de los polinomios en la función spline S debe verificar:
>
> — En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i)$ la función S es un polinomio de grado menor igual que k.
>
> — S tiene derivada de orden $k-1$ continua en $[x_0, x_n]$.
>
> GeoGebra ofrece la posibilidad de obtener S simplemente indicando los puntos y el grado de los polinomios.
>
> — Spline(<Lista de puntos>)
>
> — Spline(<Lista de puntos>, <Grado≥3>)

Una vez obtenida una curva suave, podemos obtener la curva simétrica por el centro del cuadrado (figura 13).

Una vez tenemos la curva podemos dar el corte al cubo con una superficie que la contenga y que contenga a otra idéntica en la cara opuesta (figura 14).



Spline Spline reflejada

Figura 13

Siguiendo la misma estructura que con los cortes del apartado 3, podemos generar los cortes (figura 15).

Y también hacer nuevas variaciones o utilizar superficies regladas (figura 16).

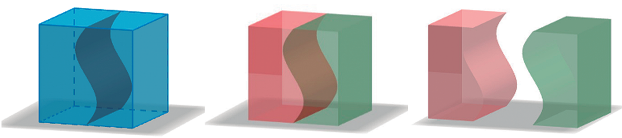


Figura 14

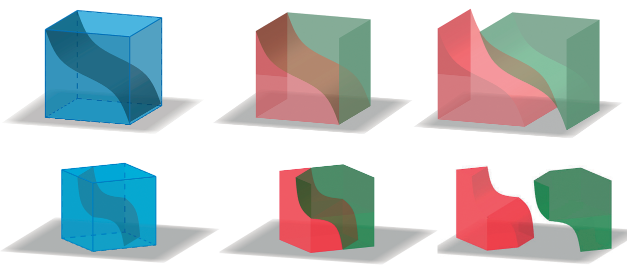


Figura 15

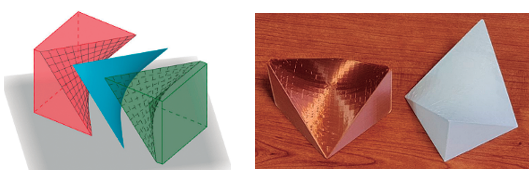


Figura 16

SECCIONES MODIFICABLES

Se utilizan técnicas que ya aparecían en la mitad del cuadrado, que provienen de procedimientos que podemos llamar dinámicos: cuando trazamos una diagonal (triángulo) o el segmento que une los puntos medios (rectángulo) obtenemos dos mitades del cuadrado. El objetivo es dar un salto en nuestra forma de pensar para convertir esa solución en otra más general que se puede analizar de forma dinámica tomando una recta que pase por el centro del cuadrado (trapecios). Avanzado el trabajo, algunos alumnos experimentan nuevos saltos en sus estrategias de pensamiento, desde esta solución con una línea recta a líneas poligonales (a veces curvas) con simetría en el centro del cuadrado (figura 17).

Podemos utilizar razonamientos parecidos al anterior cuando buscamos la mitad del cubo: si partimos de una sección que da origen al cuadrado y otra que da lugar al rectángulo, podemos enlazar estos procedimientos para dar una nueva inclinación al corte y hacer que el plano, en lugar de cortar por las diagonales de dos caras dividiéndolas en dos triángulos rectángulos o dos rectángulos, corte formando dos trapecios y generalizarlo a nuevas figuras (figura 18).

Y esto lo podemos aplicar a las soluciones como la del rombo (el plano que pasa por dos vértices opuestos y los puntos medios de dos aristas), del hexágono y también modificar la solución para hacer algo parecido con las líneas poligonales con simetría central en el punto medio de una cara (figura 19).

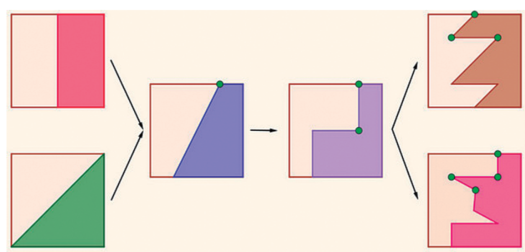


Figura 17

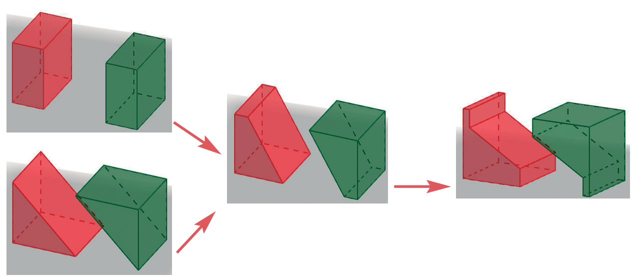


Figura 18

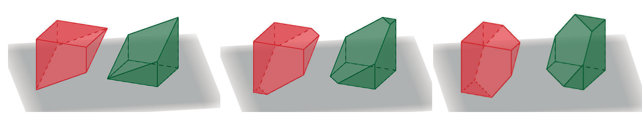


Figura 19

SECCIONES MODULARES DEL CUBO

Tienen su origen en la carpeta de recortables geométricos *Secciones modulares del cubo* de Javier Carvajal que contiene ocho recortables que se introducen en un cubo de mayor tamaño. En la figura 20 tenemos dos de las construcciones.

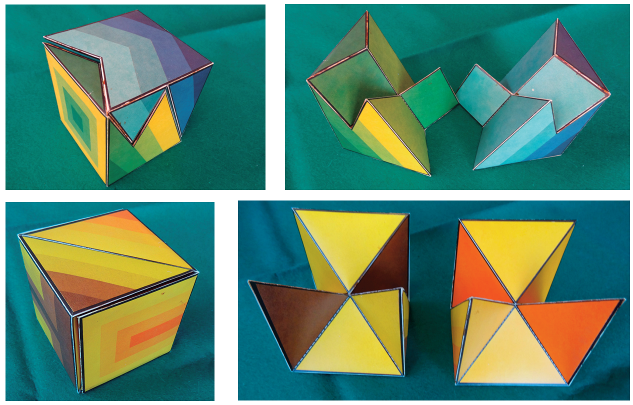


Figura 20

El problema principal para conseguir estos compuestos con GeoGebra consistía en encontrar los planos de corte que dan lugar a la sección modular para obtener las caras del poliedro. Una vez hemos conseguido esos polígonos, los introducimos en una lista y obtenemos la otra mitad por simetría central respecto del centro del cubo (poliedro en verde). En la figura 21 se observan las distintas fases de construcción con GeoGebra y dos fotografías de las piezas obtenidas con una impresora 3D.

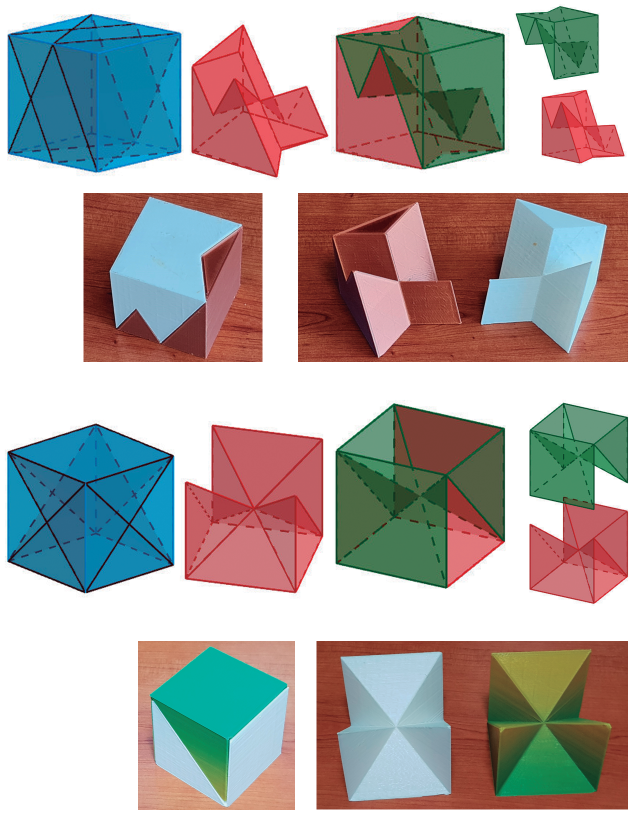


Figura 21

Hemos construido ocho secciones modulares en las que el cubo se divide en dos poliedros iguales excepto en una de ellas que se divide en tres.

IMPRESIÓN 3D

Una impresora 3D es una máquina que construye de forma automática objetos en tres dimensiones a partir de unas instrucciones almacenadas en un fichero electrónico. Existen diversas tecnologías de impresión 3D, aunque la más extendida en diversos ámbitos es la conocida como FDM (Modelado por Deposición Fundida) que se basa en 3 elementos: una cama de impresión, una bobina de filamento y una cabeza de extrusión (figura 22). El filamento es fundido por el extrusor de la impresora, que deposita el material capa a capa sobre la cama de impresión. El filamento se funde cuando el Fusor (Hotend) alcanza alrededor de 200° C (en función del tipo de material), a continuación se extruye el material de 1,75 mm de diámetro sobre la plataforma a través de una boquilla que se mueve sobre tres ejes (X, Y, Z). En ocasiones es necesario imprimir las piezas con soportes para mejorar la calidad de las piezas, y su función es apoyar las partes voladas.

Entre los tipos de materiales más usados en la FDM se encuentran el PLA (ácido poliacético), el ABS (Acrilonitrilo Butadieno Estireno), el PETG (Tereftalato de Polietileno Glicol), el TPE (elastómeros termoplásticos), el ASA (Acrilonitrilo estireno Acrilato) y el PD (Policarbonato).

Otra de las tecnologías utilizadas es la resina con tecnología DLP (Procesado Digital de Luz) (figura 23),

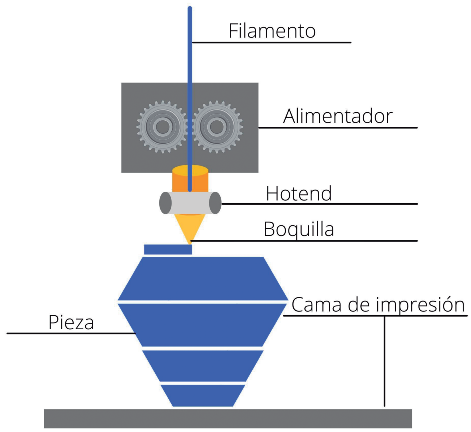


Figura 22

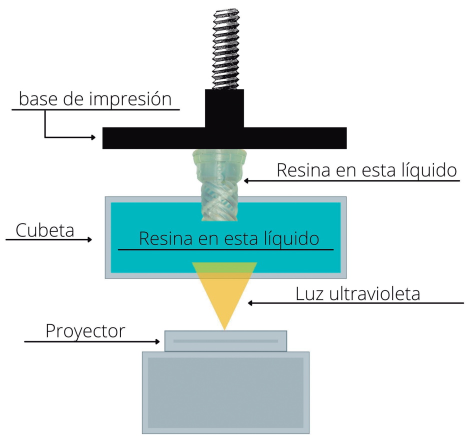


Figura 23

que consiste en la superposición por capas de una resina en estado líquido que se solidifica punto a punto, de manera muy precisa, mediante un láser ultravioleta. Cabe recordar que en esta tecnología el proyector DLP proyecta toda la silueta completa sin realizar recorridos en el plano XL.

Una de las ventajas frente a las FDM es que la resolución de impresión es muy superior a estas. Sin embargo, la principal desventaja es el coste de la resina liquida.

El post-procesado de las piezas es tedioso y debe ser ordenado, en primer lugar se debe limpiar el material sobrante, habitualmente con alcohol, y por último se cura la pieza mediante la exposición de luz ultravioleta.

Las impresoras FDM y DLP son máquinas de bajo coste, alrededor de 200 euros, y poco a poco están introduciéndose en el ámbito educativo. El bloque de geometría recogido en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato nos posibilita introducir su uso en las aulas de matemáticas en sinergia con otras materias que nos faciliten escenarios de aprendizaje en contextos multidisciplinares.

GeoGebra es un software matemático interactivo libre, que se puede utilizar en todas las etapas del sistema educativo del Estado español de acuerdo con la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre. Además, cabe recordar que el RD 1105/2005, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, promueve la utilización de aplicaciones informáticas de geometría dinámica que faciliten la compresión de conceptos y propiedades geométricas.

Con la ayuda de GeoGebra podemos modelar objetos en 3D, imprimirlos con nuestras impresoras 3D y colocarlos en cualquier entorno mediante realidad aumentada desde un dispositivo móvil. Así pues, se trata de una herramienta que nos permite abordar un enfoque STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas) en el aula de Matemáticas.

Impresión de objetos 3D con GeoGebra (Muñoz y otros, 2020)

A partir de la versión 6 (versión en línea y escritorio) los objetos se pueden descargar en formato STL.

- — *Paso 1.* Accede a la construcción, pulsa en los tres puntos que aparecen en la parte superior derecha y después en Abrir con GeoGebra (construcción: <https://www.geogebra.org/m/p98hu9s4>) (figura 24).
- — *Paso 2.* Pulsa en los tres segmentos horizontales de la parte superior derecha, después Descargar como → Archivo GeoGebra (.ggb) (figura 25).

— *Paso 3.* Accede a GeoGebra (versión escritorio), y abre el fichero que has descargado. Desde el menú principal, ubicado en la parte superior derecha, pulsar en Archivo → Abrir.
A continuación, pulsa en la carpeta que aparece en la parte derecha, y carga el fichero que has bajado en el paso 2 (figura 26).
Nota: es recomendable no mostrar el plano, puesto que aparecerá en el fichero STL. Pulsa sobre el botón derecho del ratón, y después sobre Mostrar plano. En caso que los ejes estén visibles debes de seguir las mismas pautas.
— *Paso 4.* Descargar la construcción en formato STL.
Desde el Menú principal, ubicado en la parte superior derecha, pulsar en Archivo → Descargar como… → Impresión 3D (.stl) (figura 27).
Se puede ajustar las dimensiones y el espesor del objeto (también existe la posibilidad de exportar el objeto con un relleno sólido pulsando sobre la casilla, y determinar el grosor en mm) (figura 28).
— *Paso 5.* Cargar el fichero en un laminador, en nuestro caso Cura versión 4.11 <https://ultimaker.com/es/software/ultimaker-cura>.
Dos posibles formas de cargar el fichero:
1. Arrastrar el fichero .STL al programa
2. Archivo → Abrir archivo(s)… (figura 29)
— *Paso 6.* Ajustes en Cura.
En primer lugar, hay que seleccionar la impresora con la que quieres imprimir tu pieza.(figura 30).
Si pulsamos en la parte superior aparecen los ajustes de impresión básicos (altura de capa, densidad de relleno, soporte y adherencia) (figura 31).
Una vez que se han modificado todos los ajustes oportunos, solo nos queda segmentar/laminar la pieza en cuestión pulsando en SEGMENTACIÓN (figura 32).
Nos indica el tiempo y la cantidad de material que necesitará. Y si pulsamos sobre el deslizador que aparece en la parte derecha, podemos observar la evolución de la pieza capa a capa.

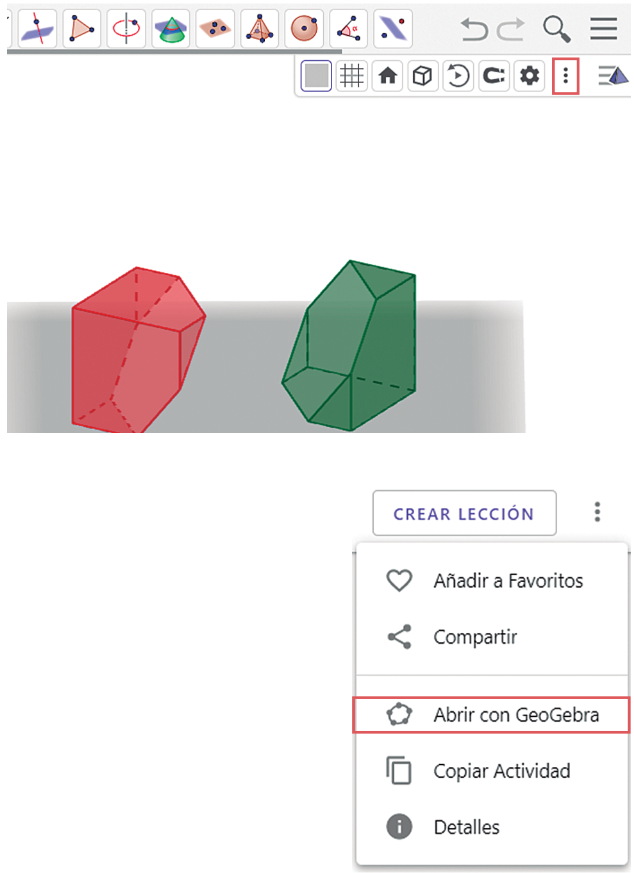


Figura 24

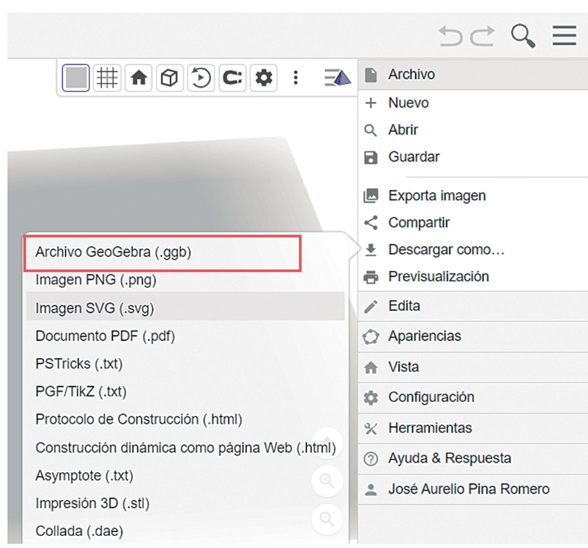


Figura 25

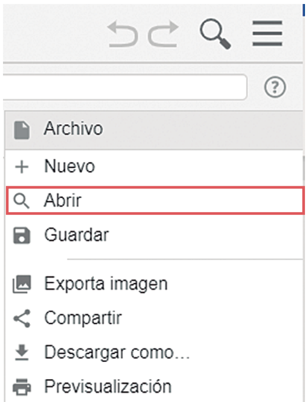


Figura 28

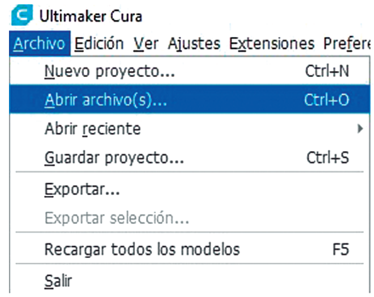


Figura 29

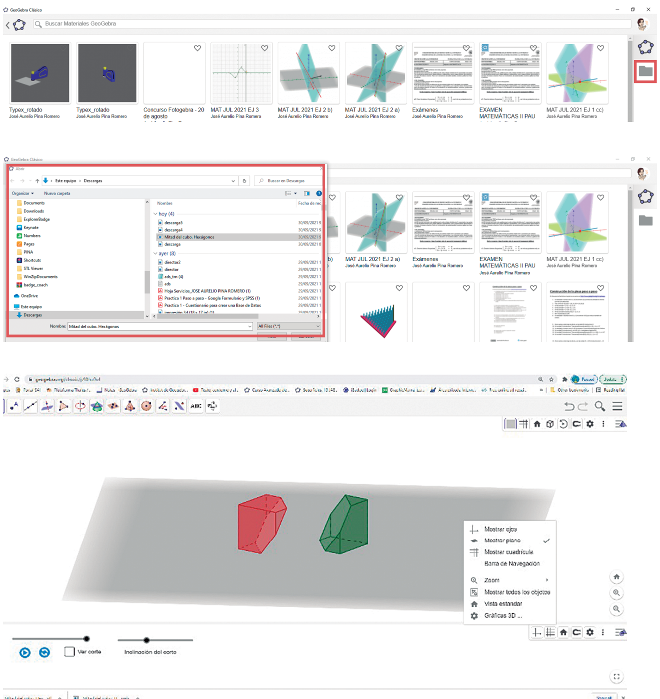


Figura 26

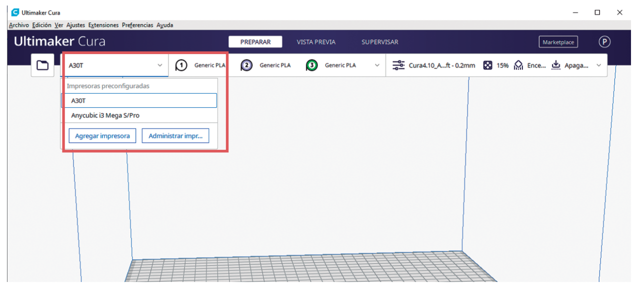


Figura 30

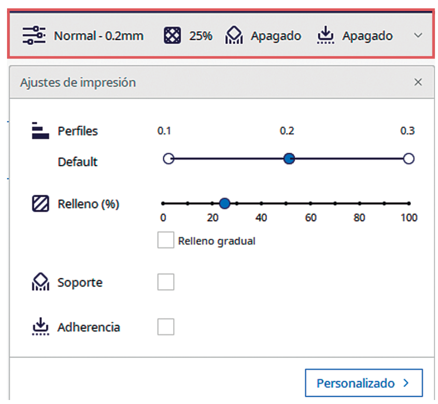


Figura 31

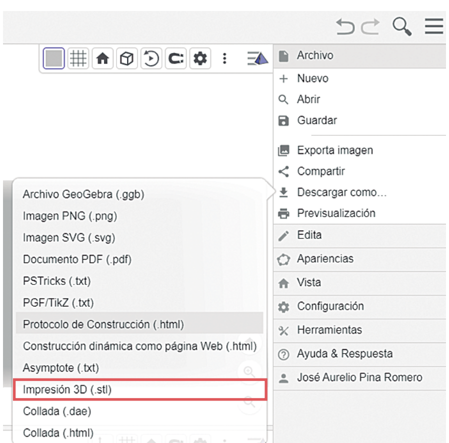


Figura 27

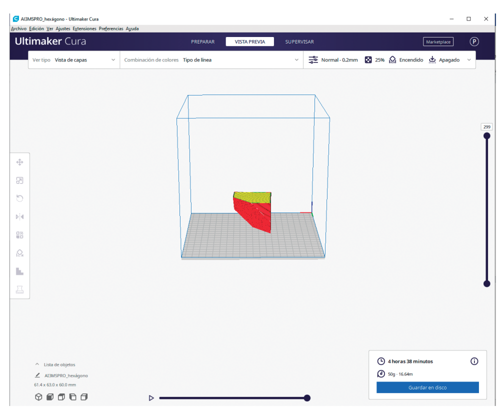


Figura 32

Referencias bibliográficas

Aguilar, G. (2020), «Modelos en GeoGebra para el plano y el espacio. Impresión de materiales 3D para su uso en el aula», *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo,* n.º 9(1), 132-146, <http://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p132-146>.

Alonso, P., y Á. Salar (1992), *Visión espacial: cortando un cubo,* Aula Material, n.os 5 y 7, Graó, Barcelona.

Carvajal, J. (1988), *Secciones modulares del cubo*, Generalitat Valenciana, Valencia.

Fielker, D. (1987), *Rompiendo las cadenas de Euclides,* MEC, Madrid.

Jones, R., P. Haufe, E. Sells, P. Iravani, V. Olliver, C. Palmer y A. Bowyer (2011), «RepRap- the replicating rapid prototyper», *Robotica*, n.º 29, 177-191.

Mora, J. A. (1991), «La mitad del cuadrado», *Suma,* n.º 8, 11-29.

Mora, J. A. (2007), «La mitad del cuadrado con geometría dinámica», *La Gaceta de la RSME*. vol. 10.3, 743-762.

— (2017), «Azulejos con GeoGebra en el Museo de Onda», *Uno,* n.º 77, 24-33.

Mora, J. A, y J. A. Pina (2020), «Guía para la impresión 3D», *Calidoscopis polièdrics*, <https://www.geogebra.org/m/bm4heq77#chapter/602526>.

Muñoz J. L., J. A. Mora y J. A. Pina (2020), *La mitad del cubo*, <https://www.geogebra.org/m/fzych5mj>.

Reichenberger, S., D. Lieban, C. Russo y B. Lichtenegger (2019), «3D Printing to Address Solids of Revolution at School», en S. Goldstine, D. McKenna, K. Fenyvesi y C. S. Kaplan (Hrsg.), *Bridges Linz 2019 Conference Proceedings,* Phoenix: Tessellations, 493-496.

José Antonio Mora Sánchez
Institut GeoGebra Valencià
<jmora7@gmail.com>

José Luis Muñoz Casado
Instituto Geogebra Maslama al-Mayriti
<jose.munoz.casado@gmail.com>

José Aurelio Pina Romero
IES Gaia, Sant Vicent del Raspeig (Alicante)
Institut GeoGebra Valencià
<apina@institutogaia.es>