

VERSIÓN INGLESA

Teaching math with examples

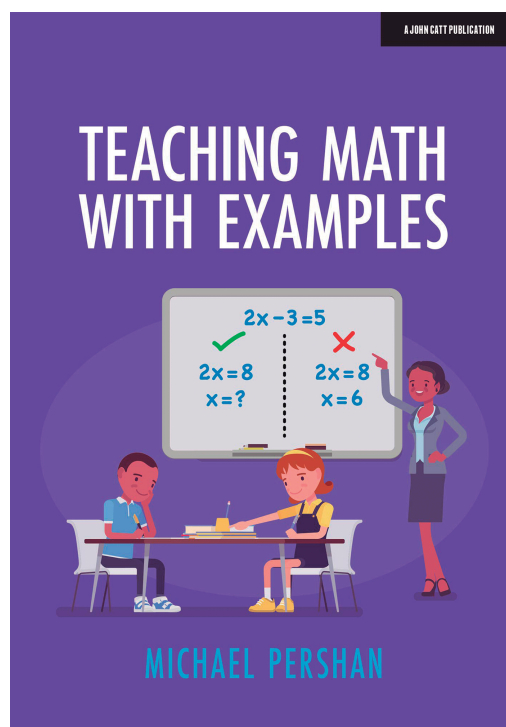
Maite Aranés Maza

SUMA núm. 98
pp. 105-110

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

Michael Pershan es un profesor de matemáticas estadounidense que da clases a niveles que van desde primaria hasta secundaria y bachillerato. Comenzó su carrera profesional en 2010, recién salido de la universidad y con experiencia y formación nula en docencia. Esto le llevó a buscar ayuda en la literatura científica, comenzando a leer estudios y artículos en la rama de la psicología, y continuando con la educación matemática. Ha mantenido una presencia activa en las redes sociales, y ha ganado cierto reconocimiento entre el profesorado de habla inglesa. *Teaching math with examples* es su primer libro.

Este es un libro informativo y conciso. Según el mismo Pershan, su intención es contarnos todo lo que ha aprendido en su estudio de la literatura sobre el trabajo con ejemplos, acompañado por sus experiencias y conclusiones personales. El estilo es informal y amigable, y transmite, en mi opinión, el deseo del autor de mantener una conversación con sus lectores.



John Catt Educational, 126 páginas (2021)

Quiero destacar que desde un primer momento Pershan es muy claro separando qué dice la teoría, cuál es su interpretación, cuáles son sus conclusiones y cómo decide aplicarlo en su aula. Lo que tú hagas con esa información ya es asunto tuyo. Su actitud con respecto a las teorías y resultados de experimentos académicos es muy pragmática: podemos tenerlos en cuenta para plantear nuestra actividad docente, pero es prácticamente imposible aplicarlos tal cual a la realidad del aula. Este posicionamiento es muy cercano al propuesto por el educador Dylan Wiliam (al que se menciona en el texto). Pershan reconoce también que un resultado teórico puede interpretarse o aplicarse de forma diferente según la personalidad y objetivos del docente.

I'd define «evidence-informed teaching» as however it is you teach when you understand the research evidence. I don't believe teaching can ever be evidence-based, but I think it would be terrific if teaching became more informed by evidence. As Wiliam says, this wouldn't lead to a total convergence in techniques. We teachers all have different abilities and dispositions, and many of us even have different classroom goals. We'll never teach the same, and that's OK by me.

La estructura del libro es simple. Tras prefacio e introducción, los dos primeros capítulos son algo más teóricos. En ellos se resumen los trabajos que Pershan ha estudiado sobre el uso de ejemplos como herramienta pedagógica. En los siguientes capítulos nos cuenta sus experiencias personales, qué rutinas utiliza, y en qué situaciones utiliza ejemplos. En el capítulo 7 habla brevemente del diseño de materiales y termina en el capítulo 8 compartiendo su uso de ejemplos en la enseñanza de demostraciones geométricas. Al final del libro incluye un breve epílogo con las ideas principales que hemos ido encontrando en el texto. Para aquellos que quieran profundizar más en el tema Pershan también incluye una bibliografía.

Los ejemplos de los que nos habla Pershan son, según su propia descripción, soluciones completas que los alumnos deben estudiar y aprender de ellas («worked examples» en la literatura). En el prefacio hace una reflexión bastante provocativa en la que compara la resolución de problemas con el estudio de su solución

(es decir, el estudio de un ejemplo resuelto). Plantea una situación ficticia en la que dos personas deben resolver un problema matemático. Una de ellas, tras muchos intentos, da con la solución más o menos por accidente. La otra persona no consigue resolverlo; tras intentarlo y reflexionar sobre varias estrategias decide consultar la solución y la estudia detenidamente. ¿Quién ha aprendido más del problema? Por supuesto no podemos saberlo. Pero Pershan cree que la resolución correcta de un problema es importante si con ella entendemos el problema completamente. En caso contrario, esta experiencia nos habrá servido de poco, y quizá nos valía más el estudiar la solución.

In my view, this is a fundamental shift in perspective that teachers and students need to make. If what we mainly value is problem solving, studying a solution is just giving up. But if we value achieving mathematical understanding, we can see the studying of a solution for what it is: a core mathematical art. This is something I believe deeply, and it's why I wrote this book.

En resumen, Pershan opina que deberíamos dar más valor al estudio de soluciones/ejemplos resueltos en el proceso de aprendizaje.

El ejemplo del prefacio enlaza directamente con el capítulo 1, «How learning from examples works». Pershan nos explica que el alumnado puede aprender tanto, o tan poco, del estudio de una solución detallada como de un proceso menos guiado de descubrimiento. La clave en el éxito de cualquiera de las dos estrategias está en conseguir una reflexión cuidada por parte de los estudiantes.

Teaching only works when it provokes this sort of active, deeper thought: «manipulating, linking, and evaluating information». Performing a series of worked examples while students drool in their notebooks doesn't meet this standard. Neither does discovering a solution if students discover it by guessing. Either approach can, and often does, fail to produce learning. Educational techniques are not magic. If they don't provoke thinking, they don't work.

¿Cuáles son entonces los mayores obstáculos a la hora de aprender con ejemplos? Se pueden resumir en

dos: los alumnos no reflexionan de forma activa ni detenidamente sobre los pasos de la resolución, o no están lo suficientemente preparados para entender ni el problema ni su solución. Según Pershan, la estrategia «habitual» (profesor en la pizarra, haciendo problemas paso por paso y preguntando a los alumnos de vez en cuando) no resuelve estas cuestiones. Fue en una iniciativa llamada «Algebra by Example» dónde observó por primera vez un uso efectivo de ejemplos. En este programa se da respuesta al primer problema (falta de reflexión) a través del diseño de los ejemplos: incluyen instrucciones para favorecer que el alumnado analice la solución, explique por qué funciona y la aplique en otro problema. En particular, las rutinas que comparte Pershan en el capítulo 3 están basadas en las estrategias del equipo de «Algebra by Example».

Con respecto a la segunda cuestión, que el alumnado no esté preparado para entender ni el problema ni su solución, Pershan nos comenta que no vamos a encontrar una respuesta inequívoca. Por una parte, hay quien sostiene que intentar hacer el problema antes de estudiar la solución (fallo productivo) es la estrategia más adecuada. Por otra parte, están los partidarios de comenzar directamente con el ejemplo resuelto. Al parecer, podemos encontrar estudios y experimentos apoyando ambas posturas. A falta de consenso, Pershan intenta al menos esclarecer algunos aspectos esenciales en la preparación de los estudiantes antes de comenzar el estudio de una solución. Entre otras cosas, el alumno debe ser consciente de

todos los aspectos del problema que intervendrán en la solución. Además, debe recordar contenidos y estrategias que van a darse por sabidos en la misma. Su respuesta a estas necesidades es el plantear un problema previo más sencillo que sirva como introducción al ejemplo a estudiar.

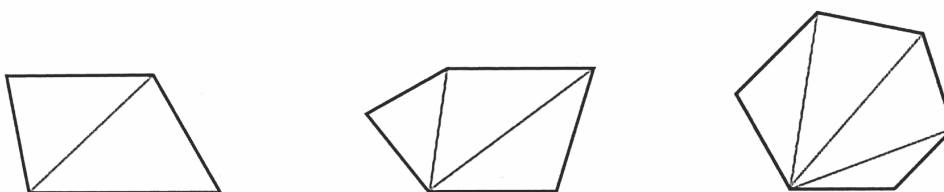
To learn from a solution, students need to *notice* crucial aspects of the problem. They also need to *remember* some things they have already learned. A problem that comes before an example can help students notice and remember this information, and so enhances their learning from the example.

Pershan explica su interpretación de todo el proceso con detalle en el capítulo 3, «Routines for learning from examples». Lo hace con ayuda de un ejemplo concreto: el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono, que os resumo brevemente. Antes de presentar la solución que los alumnos deben estudiar, les propone que resuelvan el siguiente problema (figura 1), similar a otros trabajados en días anteriores.

Tras su resolución, propone que, en silencio, estudien el siguiente ejemplo resuelto, y posteriormente, trabajando en parejas, los alumnos deben explicar todos los pasos a su compañero.

Como parte del proceso para asegurarse de que los alumnos están atentos a los aspectos esenciales del problema, también añade preguntas que inciden en dichos aspectos (o explicaciones parciales que deben

These polygons have been divided into triangles with diagonals coming out of one vertex:



How many triangles would be formed if you divided a 10-sided polygon in this way?

Bonus: What about a polygon with 100 sides? N sides?

Figura 1. Problema inicial (antes de estudiar el ejemplo)

completarse, etc.). Para terminar plantea un problema similar para que los alumnos apliquen las técnicas del ejemplo (figura 2).

Pershan nos explica además en este tercer capítulo todos los detalles de cómo desarrolla la actividad en el aula. Por si nos quedan dudas, aclara algunos asuntos extra en el capítulo 4, «Some questions and answers about the routine».

Otra importante cuestión es por supuesto cuándo utilizar ejemplos resueltos dentro de una secuencia didáctica. Pershan nos explica por qué él ha decidido que prefiere siempre empezar con ejemplos en el capítulo 2, «The case for starting with examples». La literatura sugiere que es más rápido y eficiente aprender nuevos contenidos y/o estrategias con el estudio de un ejemplo resuelto. También se puede aprender en el proceso de resolución de un problema, pero es más costoso. Por supuesto que esta «optimización» no tiene por qué ser el objetivo de la práctica docente. En cualquier caso, Pershan prefiere, en la mayoría de ocasiones, comenzar con un ejemplo, y tiende a dejar la resolución de problemas para otros momentos.

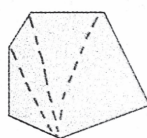
cuando Pershan utiliza la palabra «problema», se refiere a ejercicios que requieren una solución sofisticada o elaborada, más que a actividades abiertas de investigación. Al final del capítulo 2 incluye algunas reflexiones y comentarios bastante interesantes sobre cómo plantea una sesión centrada en la resolución de un problema. Y en el capítulo 5, «Moving from examples to problem solving», nos explica cómo pasar a resolver ejercicios más complicados. La dinámica ejemplo-problema que ha explicado en los capítulos anteriores resulta algo limitada cuando el contenido es complejo. Una de las razones por las que el alumnado experimenta dificultades es que no domina lo suficiente los pasos intermedios necesarios para llegar a la resolución completa del problema. Aquí Pershan introduce las ideas de práctica de una parte y práctica de tarea completa («part-task practice» y «whole-task practice»). En su opinión, este segundo tipo de actividad, la «práctica de tarea completa», es más difícil de diseñar y quizás no la estemos usando en clase con suficiente frecuencia. Básicamente, la idea es utilizar actividades que permitan practicar una parte de una tarea más compleja pero manteniendo la integridad de la tarea completa. No voy a entrar en detalles, salvo comentar que comparte

[...] Why not directly focus on the solution, then? One reason is because math class can be about more than just learning skills. It can be a chance for students to engage in all sorts of mathematical activities that are connected to the discipline. For some people, math class is all about giving students a chance to engage in rich problem solving. That's not my orientation (see the Preface), but I do see value in sometimes giving students a juicy mathematical problem to work on. If for no other reason, just because it can be a lot of fun.

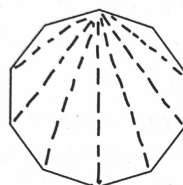
Como es natural en cualquier texto sobre la enseñanza de las matemáticas, la resolución de problemas forma parte de la discusión. Aclaro que la mayor parte del tiempo,

1. Analyze this

Find the interior angle sum of each polygon



$$180^\circ \times 4 = 720^\circ$$



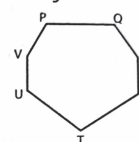
$$180^\circ \times 8 = 1440^\circ$$

2. Answer these

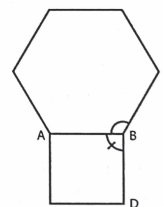
- Why did they only draw the diagonals coming out of one vertex?
- How come there are 6 sides on the left shape but only 4 triangles?

3. Your turn

- a. Find the interior angle sum



- b. Both of the polygons below are regular. What's the sum of angle ABC and ABD ?



- c. What's the interior angle sum in a 14-gon?

Figura 2. Ejemplo resuelto, preguntas de reflexión para el estudio del ejemplo, y ejercicios de aplicación

con nosotros los cinco tipos de tarea que él utiliza habitualmente, y los ilustra para el caso concreto de la resolución de sistemas (figuras 3 y 4).

El capítulo 6, «Giving worked examples as feedback», es particularmente interesante por las reflexiones que encontramos sobre evaluación formativa y *feedback* (del docente hacia el alumnado). En general, no hay un consenso sobre qué constituye *feedback* en educación ni cuándo o cómo es más efectivo, aunque se acepta generalmente como componente esencial de la enseñanza. Pershan plantea reducirse a principios fundamentales. Esencialmente, podemos influir en el proceso de aprendizaje del alumnado de dos formas: o bien damos una respuesta que enseña algo nuevo al alumno, o bien nuestra respuesta motiva al alumno a aprender algo nuevo por su cuenta. Es decir, cuando estemos considerando una forma u otra de *feedback* para nuestros alumnos podemos preguntarnos: ¿es motivadora para el alumnado? ¿es efectiva?

Para Pershan esto ha supuesto la transición hacia el uso de actividades como respuesta a las dificultades y errores cometidos por los alumnos.

To give feedback in this way, we need to scour our students' work for ideas they need to better understand. We want to look carefully at the mistakes they've made and understand how we might address them. Then, we need to put together some sort of activity that addresses just the need that we have identified.

Por supuesto Pershan después de esta reflexión, nos cuenta exactamente cómo implementa estas ideas en sus clases (utilizando un ejemplo resuelto, naturalmente), aunque ya no os lo voy a contar porque si no esto se va a alargar mucho.

En el siguiente capítulo, «Designing worked examples», nos hace un resumen de algunos principios de

Complete the steps, solve the system

1. $-6x + y = -50$ $y = -4x$ $-6x + (-4x) = -50$ $-6x - 4x = -50$ $-10x = -50$ $x = 5$ $y = \underline{\hspace{2cm}}$	2. $-10y = x$ $-5x - 7y = 43$ $-5(-10y) - 7y = 43$ $50y - 7y = 43$	3. $3x + 4y = 50$ $-2x = y$ $3x + 4(-2x) = 50$	4. $y = 2x$ $-3x + 8y = 26$
--	--	---	---------------------------------------

Figura 3. «Whole-task practice»: ejemplos que «se desvanecen» («Fading out examples»)


Michael made a mistake in his first step of solving this system. $2x + y = -4$ $-x + y = 11$ <hr/> $x + 2y = 7$ 	Michael should have subtracted first. If he had done that he would have $3x = -15$. Why would that get him closer to the solution?	Your turn Solve the system: $x + 3y = 14$ $x + y = 6$
--	--	---

Figura 4. «Whole-task practice»: análisis de errores

diseño efectivo para actividades y ejemplos en el aula. Esto no se trata de hacer que quede bonito, sino de que transmita la información necesaria de la forma más eficiente y efectiva. Aparte de eso, también implica la elección del contenido según criterios pedagógicos. Como en los otros capítulos, Pershan nos hace un resumen breve de las conclusiones de psicólogos y ciencia cognitiva, para después darnos algunos ejemplos concretos (figura 5).

En el último capítulo, «Teaching proof with examples», Pershan quiere mostrarnos la potencia de enseñar con ejemplos explicando cómo los usa para un tema más complejo: las demostraciones geométricas. Al ser un contenido más sofisticado, su rutina es algo distinta de la descrita en el capítulo 3. Este capítulo es interesante por ver otra «aplicación» de enseñar con ejemplos, ya que este tema no aparece en nuestro currículo.

Con esto llego al final de la reseña. La lectura de «Teaching math with examples» me ha resultado muy agradable. Por una parte, es un libro muy práctico: breve pero con detalles suficientes si queremos intentar utilizar alguna de las estrategias compartidas por el autor. Por otra parte, me ha gustado el estilo abierto e informal de Pershan. Es interesante «escu-

22 Persistence

The **persistence** of 52 is 2.

52 $\xrightarrow{5 \times 2}$ 10 $\xrightarrow{1 \times 0}$ 0

The **persistence** of 94 is 3.

94 \rightarrow 36 \rightarrow 18 \rightarrow 8

The **persistence** of ____ is 4.

The **persistence** of ____ is 5.

What if ... 52 $\xrightarrow{5+2}$ 7 ?

Source: Andrew Egendorf & George Starkshall [Play With Your Math.com](https://playwithyourmath.com)

Figura 5. «Persistence», *Play With Your Math*:
<<https://playwithyourmath.com/2019/12/02/22-persistence/>>
Pershan admira el diseño y claridad de exposición de las actividades del proyecto *Play With Your Math*

char» las opiniones de otro profesor, como también lo es ver lo que hacen en un aula distinta a la tuya.

Maite Aranés Maza

IES de Villanueva de Gállego,
Villanueva de Gállego (Zaragoza)
<maite.aranes@gmail.com>