# SUMA+

Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje
de las matemáticas · **diciembre 2021**

– núm. 98 –



SUMA 98
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje
de las matemáticas · diciembre 2021

3 Herencias

## Artículos

11 Enseñar a través de la resolución de problemas
Pablo Beltrán-Pellicer y Sergio Martínez-Juste

23 Diseño de logicomios y sudokus para el taller de matemáticas
José de Francisco Estaire

35 El Buscaminas, aplicación lúdica de las matemáticas
Diego Alonso Santamaría

## Secciones

47 MUJERES MATEMÁTICAS: ROMPIENDO MOLDES
Las hermanas Bowman: Julia Robinson y Constance Reid
Marta Macho Stadler

55 DEL MMACA AL AULA
Lo importante es participar
MMACA

59 EL RINCÓN DE ESTALMAT
(coord. Rafael Ramírez Uclés)
¿A qué quieres que te gane?
Daniel Sadornil Renedo

69 SÍ A LAS CALCULADORAS
(coord. M.ª Cristina Naya Riveiro)
De la teoría a la práctica: una experiencia en la escuela de Guinardó
Tuti Comalat i Navarra

81 DIARIO DE EXPERIENCIAS MATEMÁTICAS
Geometría estelar
Susanna Morell Torrens, Catalina Maria Pizà Mut
y Maria Àngels Portilla Rueda

93 MATEMÁTICAS A UN CLIC
La mitad del cubo
José Antonio Mora Sánchez, José Luis Muñoz Casado
y José Aurelio Pina Romero

105 VERSIÓN INGLESA
Teaching math with examples
Maite Aranés Maza

111 RESEÑAS
Disparates y gazapos frente a problemas de la Olimpiada
Fernando de la Cueva Landa y Juan Martínez-Tébar Giménez

## FESPM & Cía

117 Problemas y más problemas
Francisco Haro Laguardia

119 Cine, literatura y redes sociales en los *webinars* de inicio de curso
Juan Carlos Toscano Grimaldi

125 Seminario GeoGebra para infantil y primaria en Teruel
Carmen Soguero Pamplona

130 XII Premio Gonzalo Sánchez Vázquez
Junta de Gobierno de la FESPM

132 Servicio de publicaciones de la FESPM
Juan Martínez-Tébar Giménez

## Suma digital <revistasuma.fespm.es>

Enlaces referenciados en este número

EDITORIAL

# Herencias

## Problema 1

### ENUNCIADO

La marquesa de Chundarata ha fallecido, y sus herederos esperan ansiosos la lectura de las últimas voluntades. Su único hijo, que no mantenía una buena relación con su madre, es el más inquieto de los presentes en la sala del notario en la que se encuentran reunidos.

Llega el momento de escuchar el reparto de los terrenos urbanizables, propiedad del marquesado que tienen en la localidad donde residen. Estas tierras comprenden un terreno cuadrado de 250 m de lado, y 7 terrenos rectangulares de dimensiones 200 m $\times$ 500 m. El hijo de la marquesa recibirá de estos terrenos la tercera parte, lo que le corresponde como legítima, y la quinta parte del resto.

a) Expresa las dimensiones de los terrenos como cantidad escrita en forma de fracción, en km.
b) Encuentra la operación combinada que te permite calcular la superficie, en $km^2$, que le corresponden al hijo de la marquesa como herencia.
c) Realiza la operación correspondiente y expresa la solución lo más simplificada posible.
d) ¿Qué superficie de terrenos urbanizables hereda el hijo de la marquesa de Chundarata?

### RESPUESTA

a) El terreno cuadrado tiene 0,25 km = 1/4 km de lado.
Los terrenos rectangulares son de dimensiones 1/5 km $\times$ 1/2 km.

b) $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 7 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\right)\right] \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\right)$

c) $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+7\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{16}+7\cdot\frac{1}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{15}\right)=$
$=\left(\frac{1}{16}+\frac{7}{10}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{15}\right)=\left(\frac{5}{80}+\frac{56}{80}\right)\cdot\left(\frac{5}{15}+\frac{2}{15}\right)=$
$=\frac{61}{80}\cdot\frac{7}{15}=\frac{427}{1200}$

d) El hijo de la marquesa de Chundarata recibe como herencia una superficie de 427/1200 km$^2$.

Si bien un enunciado de este tipo sería imposible encontrarlo en un manual de 1.º de la ESO, no es extraño encontrar el ejercicio como tal, de ahora en adelante denominado el «incuestionable».

## Ejercicio 1 (El «incuestionable»)

Realiza la operación y simplifica:

$$\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+7\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

El lector debe ser consciente del esfuerzo realizado para intentar conseguir un enunciado que permitiera formular el mítico ejercicio del castillo de fracciones, pero nos ha sido totalmente imposible.

En este nivel educativo podríamos encontrar enunciados como el que sigue:

## Problema 2

### ENUNCIADO

Un grupo de albañiles realiza una obra en el castillo de la marquesa de Chundarata, la reparación de la pared principal de la muralla que rodea su inmenso y lujoso castillo.

El primer día reparan 2/5 de la longitud del muro, y el segundo día los 2/3 del resto, quedando para el tercer día 85 metros. ¿Cuál es la longitud del muro que están reparando los albañiles?

### RESPUESTA

La fracción del muro que queda para reparar el tercer día es:

$$1-\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\right)=1-\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\right)=1-\frac{4}{5}=\frac{5}{5}-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$$

1/5 del muro son 85 metros. Por lo tanto, la longitud del muro es $5\cdot 85=425$ m.

Sin duda, este segundo enunciado es más apropiado para un nivel de 1.º de la ESO. Con conceptos implicados nada desdeñables: unidad, cantidad, fracción como parte del todo, fracción como operador, operaciones de fracciones, secuencia, orden, texto… La operación combinada necesaria no es tan exigente como la del «incuestionable», pero es la que encontramos en enunciados más apropiados para este nivel.

Si al «incuestionable» (¿1.º/2.º ESO?) le añadimos, siempre con el «opera y simplifica»:

— El «indiscutible» (¿1.ºESO?)

$$\left[(-2)^2\cdot(-3)+\sqrt{16}-4\cdot(-5)\right]-(1-3)^2$$

— El «ineludible» (¿3.º/4.º ESO?):

$$\left(6x^3-4x^2+8x-1\right):\left(x^2-2x+1\right)$$

— El «indispensable» (¿3.º/4.º ESO?)

$$12\sqrt[3]{16}-3\sqrt{12}-\frac{3}{5}\sqrt[3]{128}+5\sqrt{147}$$

— El «inevitable» (¿4.º ESO?)

$$\left(\frac{1}{x^2+3x}-\frac{6x}{x^2-4}\right):\frac{2}{x^2+4x+4}$$

— Y a los que podemos añadir el «indudable», el «innegable», el «insustituible»…, el «impepinable».Y aquí proponemos al lector que dé rienda suelta a su imaginación y experiencia profesional para asociar tipos de ejercicios que desgraciadamente se proponen en nuestas aulas a esta enumeración de calificativos.

Estamos ofreciendo a nuestro alumnado una variada colección de ejercicios «in… ables», donde la correspondencia entre la exigencia operativa y el contexto que pueda sostener un enunciado no existe.

La realización de estas operaciones de forma correcta, para la gran mayoría de nuestro alumnado, se hace imposible. No existen o no conocemos estudios rigurosos que analicen esta situación, pero podemos asegurar, con esa certeza que nos da la experiencia y la tradición, que a este tipo de tareas es dedicado mucho tiempo para la relevancia que pudieran tener, al menos en lo referente a que el alumnado se enfrente a propuestas contextualizadas en estas etapas educativas obligatorias. No todo tendrá que ser en contexto, ¿verdad? Podremos incluso proponer tareas en contextos, digamos, puramente matemáticos, que favorecieran el razonamiento, la investigación, la búsqueda de patrones, de modelos…, pero se debería reflexionar profundamente sobre la gran desconexión que ofertamos a nuestro alumnado en este tipo de ejercicios, el tiempo dedicado a ello y las consecuentes insatisfacción e incomprensión.

Como plato principal, el «incuestionable», el «indiscutible», el «ineludible», el «indispensable» y el «inevitable», junto con tantos otros «in…bles» que pudiéramos añadir,

conforman un brebaje difícilmente digerible. A este menú le podemos incluir un segundo plato, condimentado con:

— Voy a ver si acabo estos ejercicios y hacemos algún problema…
— No he podido trabajar problemas, porque sigo con fracciones, que no hay manera…
— Este año volvemos a quedarnos cojos con los contenidos, nos quedamos sin ver probabilidad en 2.º de la ESO, la geometría en 3.º de la ESO…
— Nada, que he tenido que repasar ecuaciones, no son capaces de aplicar el teorema de Pitágoras, y mucho menos utilizar las fórmulas geométricas…
— Y un largo etcétera. Entre ellos, el temido «esto siempre se ha hecho así», «¿¡cómo no vamos a trabajar este tipo de ejercicios!?», «esto es lo que se ha venido haciendo».

Como postre podemos incluir la imposible coordinación entre docentes, bien porque no se disponen de tiempos y espacios en el quehacer diario, bien porque no sabemos hacerlo, como consecuencia de las prisas con que se asumen las tareas, en ausencia de reflexión meditada… o porque extraemos las tareas que proponemos a nuestro alumnado de manuales, libros de texto, que sí contienen claramente esta propuesta donde la desconexión entre contexto y operación es intolerable.

El diccionario de la Real Academia de la Lengua define «descontextualización» como acción y efecto de descontextualizar, es decir, sacar algo de su contexto, pero pensamos que no es esto exactamente lo que está ocurriendo, sacamos de contexto y además, no existe ese contexto, esa conexión con la realidad. Así que, perdonen la intromisión, pero nos vamos a permitir inventarnos una palabra que incluya ambos conceptos. Sea «desconextextualización».

Con sacarina, por favor.

Está claro que el menú que sale de nuestras cocinas resulta un poco indigesto.

El pasado 19 de enero de 2021 entró en vigor la nueva ley educativa LOMLOE, con su calendario de aplicación. Eso quiere decir que volveremos a estar inmersos durante un buen tiempo en la definición y concreción de la nueva normativa, y en concreto de los currículos. La «desconextextualización» no es un fenómeno olvidado en las anteriores leyes educativas, ni en los currículos que de ellas emanan, ni en el debate educativo, pero en esta nueva ley, otra más, definitivamente deberíamos tomarnos en serio el efecto de la tradición en la práctica docente.

No podemos decir que no haya críticas al respecto. En los últimos tiempos, además, y motivado por la creciente preocupación por esta materia tan relevante en la formación de los jóvenes, diferentes medios muestran grandes reflexiones sobre cómo deben ser consideradas las matemáticas en las diferentes etapas educativas: inclusivas, con perspectiva de género, cercanas, desarrolladas desde el razonamiento, centradas en la resolución de problemas…

El documento «La reforma del currículo en el marco de la LOMLOE», publicado por la Secretaría de Estado de Educación, en noviembre de 2020, plantea serias reflexiones sobre los cambios que necesita el currículo actual, entre ellas:

— Profundizar en la transición desde la tradicional acumulación enciclopedista de conocimientos (que sigue pesando en ciertos sectores de la comunidad educativa) hacia la adquisición de competencias.
— Ajustar los aprendizajes al nivel evolutivo del alumnado de cada curso y etapa.
— Fomentar activamente la equidad y la inclusión, modificando el carácter excesivamente estructurado del modelo actual, para responder a las necesidades de todo el alumnado.
— Dotar al currículo básico de un verdadero carácter esencial, en aras de una mayor profundización de los aprendizajes. Se acabaría así con la tradición de los currículos inabarcables, de imposible cumplimiento en la práctica docente.

En el número anterior de esta revista pudimos leer sobre la presentación del documento «Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria», publicado por el CEMat (Comité Español de Matemáticas), en mayo de 2021. Un documento que debería ser referencia en la definición de la práctica docente, esperando que sea, eso sí, guía de la definición del currículo; y que muestra manifiestamente su preocupación sobre las propuestas de menú indigesto realizadas a nuestro alumnado y que encontramos más habitualmente de lo deseado.

En resumidas cuentas: en esto de la «desconextextualización», herencias, las justas.

## Comisión Ejecutiva de la FESPM
## Renovación de cargos

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), en la reunión celebrada en Madrid el día 11 de diciembre de 2021, acordó convocar la renovación de los siguientes cargos:

— Servicio de Publicaciones.
— Formación.
— Divulgación.

De acuerdo con lo establecido en el artículo 8 del Reglamento de régimen interno de la FESPM:
Podrá ser candidato a las secretarías, cualquier socio de una sociedad federada, con un año de antigüedad al menos. La solicitud, dirigida al presidente de la FESPM, deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

1. Certificado en el que conste que es socio activo de una sociedad federada, y su antigüedad.
2. Un proyecto en el que se exponga su línea de trabajo (máximo tres folios).

Las candidaturas se podrán presentar hasta el 31 de mayo de 2022, por correo electrónico remitido a:

admin@fespm.es

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá las personas que se harán cargo de las secretarías entre las candidaturas presentadas, en su reunión que tendrá lugar durante la celebración de las XX JAEM (València, julio de 2022).

Diciembre, 2021
Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Secretario general FESPM




# artículos

# Enseñar a través de la resolución de problemas

Pablo Beltrán-Pellicer
Sergio Martínez-Juste

SUMA+ núm. 98
pp. 11-21
Artículo recibido en *Suma* en julio de 2020 y aceptado en septiembre de 2020

Describimos las características de un enfoque de enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas, cuya esencia reside en que el contenido emerge de las situaciones y problemas que se proponen al alumnado. A partir de nuestra experiencia, realizamos un recorrido por los diversos bloques del currículo para ilustrar cómo son las tareas, la organización de aula y el papel del profesor para proporcionar el andamiaje necesario. Ofrecemos también alguna idea para, ante un posible confinamiento, mantener la coherencia con esta manera de concebir la enseñanza y el aprendizaje.

**Palabras clave:** Resolución de problemas, Actividades ricas, Atención a la diversidad, Inclusión.

**Through problem solving** // We describe the fundamentals of teaching mathematics through problem solving, the essence of which is that the content emerges from the situations and problems that are proposed to students. Based on our experience, we walk through the curriculum to illustrate what the tasks are like, the organization of the classroom and the role of the teacher in providing the necessary scaffolding. We also offer some ideas to face a possible lock down, due to a pandemic scenario, to maintain coherence with this way of conceiving teaching and learning.

**Keywords:** Problem solving, Rich tasks, Attention to diversity, Inclusion.

Esta no es la primera vez que se escribe sobre este tema, tampoco será la última. Lo que pretendemos no es más que compartir nuestra experiencia en torno a esta concepción de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Pensamos que es algo necesario, ya que es una cultura de aula que pocos han tenido la oportunidad de vivir como estudiantes. Y es que, aunque parezca una obviedad decirlo, los profesores tendemos a repetir los modelos de enseñanza que hemos vivido como alumnos, otorgándoles el crédito de nuestro propio éxito (Wright, 2017). ¿Quién no ha oído decir aquello de: «Los de la EGB no hemos salido tan mal, y estábamos 40 en clase»?

## ¿Qué es enseñar *a través* de la resolución de problemas?

El enfoque de enseñanza que presentamos sigue un modelo de constructivismo guiado basado en la en-

señanza a través de la resolución de problemas, que está íntimamente ligado con el aprendizaje basado en problemas (Lopes y Costa, 1996), pero que se introduce como alternativa a los enfoques para y sobre la resolución de problemas (Bingolbali y Bingolbali, 2019; Gaulin, 2001).

La enseñanza para la resolución de problemas tiene una concepción instrumental de la educación matemática. En este modelo de enseñanza, tras la exposición del conocimiento, los estudiantes lo aplican para resolver problemas. Por otro lado, la enseñanza sobre la resolución de problemas se centra en estrategias generales y el uso de heurísticos para la resolución de problemas matemáticos. En cambio, en el enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas los alumnos adquieren el conocimiento enfrentándose a la resolución de problemas diseñados por el profesor con la intención de hacer emerger los contenidos matemáticos deseados.

El proceso de enseñanza a través de la resolución de problemas sigue una secuencia similar a la siguiente:

— Los escolares se enfrentan a situaciones problemáticas sin haber recibido instrucción previa sobre los contenidos que quieren enseñarse.
— Los problemas deben promover la reflexión y la indagación hacia la búsqueda de estrategias que permitan resolverlos.
— El profesor utiliza las respuestas de los alumnos para organizar una puesta en común que permita introducir los nuevos conceptos.
— Por último, los alumnos resuelven problemas para afianzar los nuevos contenidos.

Por tanto, este enfoque no excluye la enseñanza de heurísticos y la aplicación de contenidos, sino que los contiene. Además, ha ganado relevancia en la investigación en educación matemática en las últimas décadas (English y Gainsburg, 2015) como alternativa a aproximaciones «primero concepto y después aplicación» y su uso es efectivo para el desarrollo cognitivo de los estudiantes (Bingolbali y Bingolbali, 2019).

En la enseñanza a través de la resolución de problemas es fundamental la interacción. Lo ideal es trabajar las actividades en grupos de tres o cuatro alumnos (figura 1). Un número mayor aumenta la probabilidad de que alguno de ellos se descuelgue. En el otro extremo, un trabajo por parejas reduce las interacciones entre estudiantes y dificulta el trabajo del docente. Durante el desarrollo de la actividad, el profesor se pasea por la clase, observando el trabajo de cada grupo y realizando actuaciones concretas que permiten proseguir en la tarea. Si en lugar de grupos de cuatro tenemos parejas, el profesor debe intervenir el doble de veces, lo cual es ineficaz. No obstante, en clases no habituadas a este enfoque y con alumnado disruptivo, se puede ser flexible. En cualquier caso, no se trata de hacer las agrupaciones atendiendo a criterios como el rendimiento académico, sino de que los grupos funcionen.

Es complicado etiquetar la práctica docente de uno mismo. Una misma secuencia, con matices, podría ubicarse en el aprendizaje a través de la resolución de problemas de la misma manera que en el aprendizaje por descubrimiento guiado. Sin embargo, existe un componente innegable de construcción de conocimiento y un andamiaje por parte del profesor. Es decir, que haya construcción de conocimiento no implica dejar a los alumnos solos. Ciertas referencias que suelen citarse para apoyar la instrucción explícita obvian este andamiaje (Hmelo-Silver, Duncan, y Chinn, 2007). La clase, como veremos, se detiene cada cierto tiempo para hacer puestas en común donde se negocian los significados de los objetos ma-



Figura 1. Organización de la clase

temáticos que van apareciendo. Con esto se consigue, por un lado, una propuesta ética de enseñanza. Por otro, se cede responsabilidad al alumnado, que pasa a hacer matemáticas, en lugar de limitarse a practicar, repetir y, con suerte, aplicar.

Creemos que la mejor forma de comprender este modelo para la enseñanza de las matemáticas es experimentándolo. Así, para que el lector interesado pueda acercar sus clases a este enfoque, en las siguientes secciones damos algunas ideas que utilizamos para diseñar y gestionar secuencias de aprendizaje que hemos llevado a la práctica en nuestras aulas de 1.º y 2.º de ESO.

## Estadística

Comenzamos nuestra andadura por los bloques curriculares con un pequeño homenaje a los magníficos materiales que, al amparo de la reforma educativa de la LOGSE, se generaron durante los años 90. En concreto, vamos a comentar el desarrollo de una actividad adaptada de la Guía Praxis, donde se incluye una propuesta para introducir la dispersión, titulada «Un extraño equipo de baloncesto» (Borrell, Pol y Saguer, 1998). Con el currículo actual, la secuencia está dirigida a alumnado de 2.º de ESO. La clase comienza planteando al alumnado lo siguiente:

Estamos en un partido de baloncesto. Pongamos que se trata de una final, que queda un minuto y que el entrenador tiene que decidir a qué jugadora sacar.

Después de una breve charla de clase, que aprovechamos para discutir acerca de los datos que necesitaríamos, viene la pregunta que se constituye en razón de ser de la secuencia:

Vamos a intentar averiguar a quién sacaría si va perdiendo de 8 puntos y a quién sacaría si va ganando de 2 puntos, y tenemos como datos los porcentajes de acierto.

En otras palabras, la decisión que debe tomar el entrenador, con los datos disponibles, es si sacan al mismo tipo de jugadora cuando se va ganando por poco que cuando el partido está prácticamente perdido, pero con alguna posibilidad de ganar. ¿Y qué datos son esos? Pongamos que disponemos del porcentaje de aciertos de tiro exterior de cinco jugadoras durante los últimos diez partidos. Es decir, la tabla 1, que se proporciona al alumnado en una ficha.

La primera cuestión sirve para entrar en calor y ver que hemos entendido el contexto, así como para intuir que la decisión no es sencilla: «¿En qué partidos podemos decir que Alba tiene un buen rendimiento?». No se trata de lanzar la pregunta y obtener una respuesta inmediata. Hay que ir con calma. Los alumnos discuten y trabajan en sus grupos sobre la situación. Cada alumno registrará en su cuaderno la actividad realizada, de manera que no se trata tanto de terminar con una producción única como de que cada uno, a partir de las interacciones, desarrolle la situación.

Entonces, el profesor se pasea por los grupos. Su papel no es el de desvelar la respuesta, si es que la hay, sino el de mantener vivas las discusiones. Su papel, como se señala en los estupendos materiales del Shell Centre, es el de moderador o facilitador; ocasionalmente, de un interrogador o un provocador; pero nunca un juez o un certificador (Swan, 1985: 247). Al preguntar, debemos evitar cuestiones cerradas que puedan responderse con monosílabos; y tratar de construir esas preguntas a partir de alguna discusión iniciada por los alumnos. En este caso, dependiendo de cómo sean esas discusiones de grupo, se puede plantear: «¿Cómo podemos distinguir entre un buen rendimiento o un mal rendimiento?» o «Está claro que en algunos partidos no ha sido la mejor, pero ¿eso significa que ha tenido un mal rendimiento?»

| | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *9* | *10* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Maria** | 56 | 57 | 67 | 49 | 45 | 73 | 65 | 59 | 65 | 44 |
| **Clara** | 61 | 54 | 56 | 64 | 58 | 47 | 52 | 74 | 60 | 54 |
| **Alba** | 66 | 46 | 61 | 59 | 73 | 47 | 56 | 53 | 61 | 58 |
| **Sonia** | 57 | 53 | 66 | 59 | 56 | 52 | 59 | 61 | 45 | 72 |
| **Laura** | 49 | 70 | 57 | 65 | 52 | 46 | 60 | 58 | 73 | 50 |

Tabla 1. Datos de porcentajes de acierto que se proporcionan al alumnado. Fuente: Borrell y otros (1998)

La actividad continúa y la intervención de algún alumno da pie a estudiar el rendimiento medio de cada jugadora. Y aquí viene una sorpresa, todas tienen la misma media de porcentaje de acierto. En el material del alumno se les invita a continuar explorando visualmente la situación, generando producciones como las que mostramos en la figura 2.

Estos gráficos proporcionan un primer acercamiento, intuitivo, a la dispersión. A pesar de que tienen un ejemplo de diagrama para una jugadora, como los alumnos trabajan de forma autónoma, las producciones son variadas y, en la puesta en común, se discuten aspectos como la necesidad de que estén alineados los ejes (figura 2, derecha) o la utilidad de diferenciar por colores (figura 3). En cualquier caso, la conclusión es que nos hace falta algo más que estos diagramas.

La puesta en común se aprovecha para discutir cómo se puede continuar. Ya que visualmente no hemos podido decidirnos, trataremos de utilizar un número. Es posible, incluso, que surja la palabra rango. De nuevo, cada grupo trabaja sobre ello. Observan que son rangos muy similares y abordan tareas que ponen

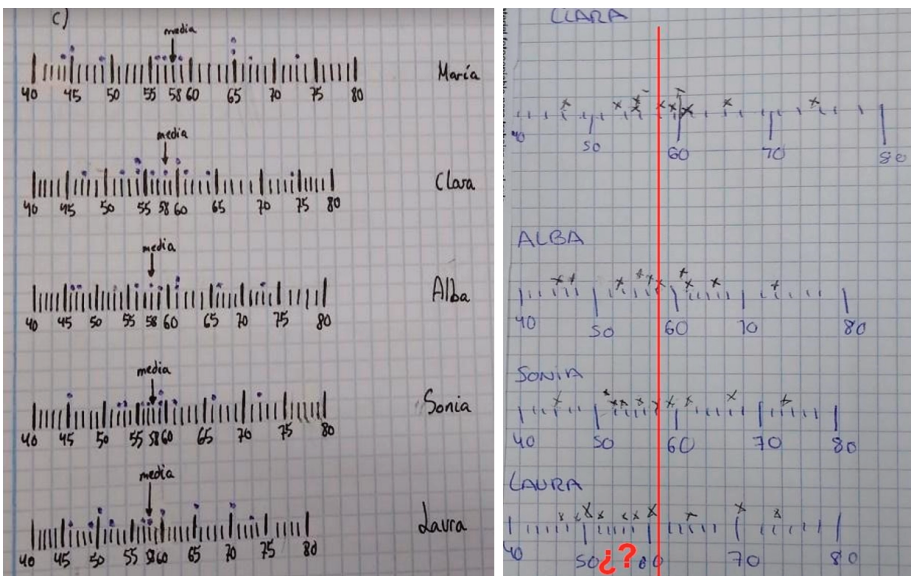



Figura 2. Representación alternativa de la dispersión, con un código de color diferente para cada jugadora

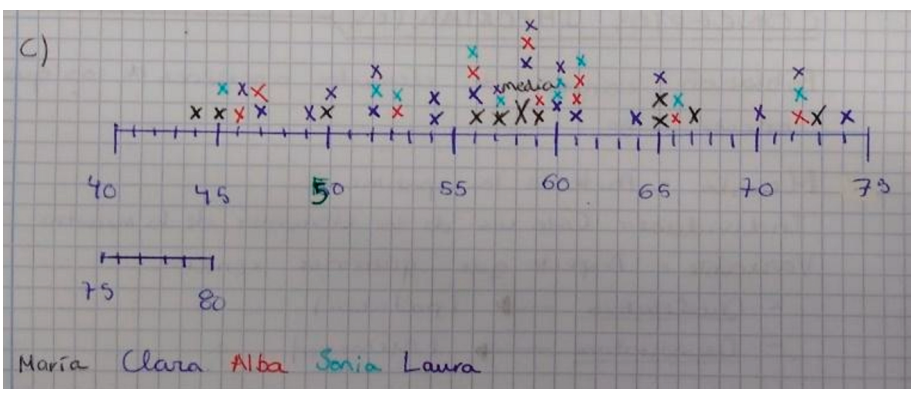



Figura 3. Actividad sobre el rango

de manifiesto que el rango no ofrece una buena medida de la dispersión (figura 4).

La secuencia continúa visitando diferentes medidas de la dispersión y justificando su razón de ser: desviación media, varianza y desviación típica. Una tras otra, se van poniendo en común las propiedades que surgen en cada tarea, a partir de las producciones de los alumnos. Señales de que vamos bien son preguntas como «A todo esto, ¿qué es la dispersión?, ¿la varianza?», que dan pie a diferenciar entre dispersión y formas de medir la dispersión. Por supuesto, al final hay que decidir a quién elegimos y por qué. Dejamos esto como ejercicio para el lector.

Es habitual pensar que, ante la presión de realizar algún trabajo en grupo, el bloque de estadística y probabilidad es el más propicio (Pierce y Chick, 2011). De hecho, por esto hemos elegido esta actividad sobre dispersión y no el clásico proyecto de estadística. En cualquier caso, ¿qué hacemos con el resto de los bloques de contenido? La respuesta es sencilla, lo mismo.

## Fracciones

El profesor entra a clase cargado de tiras de papel, cartulinas, folios, y los alumnos lo miran extrañados. Entonces dice: «Hoy vamos a medir como medían los egipcios». Así empieza la secuencia didáctica para la fracción en 1.º de ESO, donde el alumnado se enfrenta a actividades reales (no solo realistas) de medida. En otras palabras, tienen que medir y construir objetos reales. El docente lleva preparados los objetos a medir y muchas copias en material manipulable de la unidad de medida, para que a lo largo de la secuencia se dé significado de medida a la representación fraccionaria de los números racionales. A partir de ahí, se justificará el orden, las operaciones básicas y, lo más importante, se desarrollará la noción de que estamos ante un nuevo tipo de número.

Las tiras de papel conllevan el uso de la magnitud longitud, que es la más adecuada para empezar en primaria, o en secundaria si no se ha trabajado previamente este tipo de manipulaciones. Sin embargo, hay otras opciones, y, por ejemplo, el trabajo con superficies es mucho más rico.

En el caso de trabajar con longitudes, resulta que el largo de un DIN-A4 se aproxima a la medida entre la muñeca y el codo. Decimos que esa era la unidad de medida de los egipcios y que se llamaba codo sagrado o *bu*. Es necesario preparar objetos longitudinales (tiras de tela, papel…) de manera que se puedan obtener sus medidas como una fracción del codo sa-

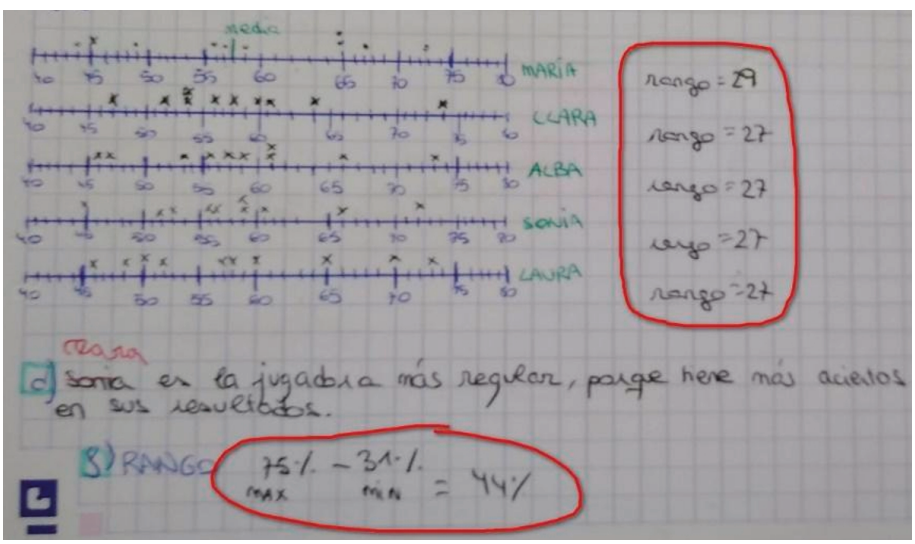



Figura 4. Actividad sobre el rango

grado. En la figura 5 observamos estudiantes calculando la medida de la tira verde, que mide 5/4 *bu*. Para obtener la medida, han dividido la unidad, el *bu*, en 4 partes iguales, y han necesitado 5 de ellas para medir la tira verde. Así, el 4 ya no es solo el denominador, sino que es el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad. Las subunidades de medida, en este caso, reciben el nombre de cuartos. El numerador es el número necesario de estas subunidades para medir el objeto.

El significado de medida permite desarrollar los contenidos curriculares de secundaria relativos a la fracción (Gairín y Sancho, 2002), considerando resultados de investigación que lo muestran más adecuado que el habitual parte-todo (Escolano, 2007).

La secuencia incorpora como tareas manipulativas situaciones de cálculo, donde los alumnos miden ciertos objetos; y situaciones de construcción, donde los alumnos construyen objetos con una cantidad de magnitud determinada. En estas primeras sesiones aparece la noción de equivalencia de fracciones al medir el mismo objeto de distintas maneras. Y los alumnos proponen, sobre los objetos reales, formas de encontrar *diferentes* fracciones que indiquen la misma cantidad de magnitud. Tras estas actividades se institucionaliza la noción de equivalencia y los métodos de ampliación y reducción para encontrar fracciones equivalentes.

Conviene señalar la importancia de que exista reflexión sobre la manipulación, por lo que los alumnos reflejan gráficamente en su cuaderno todas las acciones realizadas. Se trabaja así la conexión entre las manipulaciones con objetos reales y las representaciones gráficas de estos objetos y manipulaciones. Tras dos sesiones de trabajo manipulativo, se utilizan, casi en exclusiva, las representaciones gráficas que evocan los objetos y manipulaciones que han realizado en las primeras sesiones. Sin embargo, conviene que el material siga presente en el aula para atender a la diversidad.

El significado que los alumnos construyen de la fracción como número que indica una medida permite abordar la comparación de forma trivial (¿qué objeto es mayor?), la suma como una agregación de cantidades de magnitud o la resta como una sustracción. No solo se da sentido a lo que significa comparar, sumar o restar fracciones, sino que aparece de forma espontánea la necesidad de unificar la subunidad en la que están expresadas las fracciones (poner común denominador) para responder a los problemas que se les plantean.

La construcción del significado de medida para la fracción y la capacidad de conectar diferentes siste-



Figura 5. Estudiantes calculando la longitud de diferentes objetos

mas de representación favorecen el desarrollo de estrategias propias de resolución de problemas no triviales con poca intervención del profesor y la capacidad de realizar tareas de estimación como la mostrada en la figura 6.

## Proporcionalidad

De nuevo, todo comienza con una situación inocente:

> Suponed que vamos al supermercado y compramos 30 cosas. En total nos han cobrado 15 €. ¿Cuánto cuesta cada cosa?

A partir de esta pregunta, los alumnos discuten en sus grupos la posible respuesta. Al poco tiempo se ven las primeras manos levantadas. Los estudiantes comienzan a plantear sus dudas: «Esta pregunta tiene trampa», «Es que, depende de lo que compres», «¿Todas las cosas que compras son iguales?», «¿Todas las cosas tienen el mismo precio?».

La aparición de estas preguntas es un síntoma de que la actividad funciona. Precisamente, está planteada como situación introductoria al concepto de razón como tanto por uno y se pretende hacer reflexionar a los alumnos sobre las condiciones que debemos pedir a una situación en la que hay dos magnitudes relacionadas para que tenga sentido calcular la razón entre ellas (*repartir una entre otra*) e interpretar dicha razón como la cantidad de una de las magnitudes que se corresponde con cada unidad de la otra. De hecho, la actividad será exitosa si las respuestas de los grupos permiten establecer en la puesta en común las tres condiciones siguientes que permitirán introducir la noción de magnitudes directamente proporcionales:

- Debemos disponer de dos magnitudes.
- Las magnitudes deben estar relacionadas (covariación).
- A cada unidad de una de las magnitudes le debe corresponder siempre la misma cantidad de la otra (constancia).

A la última condición la denominamos *condición de regularidad* (Gairín y Escolano, 2009). Las intervenciones de los alumnos que hemos descrito se encaminan precisamente en esta dirección y algunos grupos las plasman por escrito en sus respuestas (figura 7).

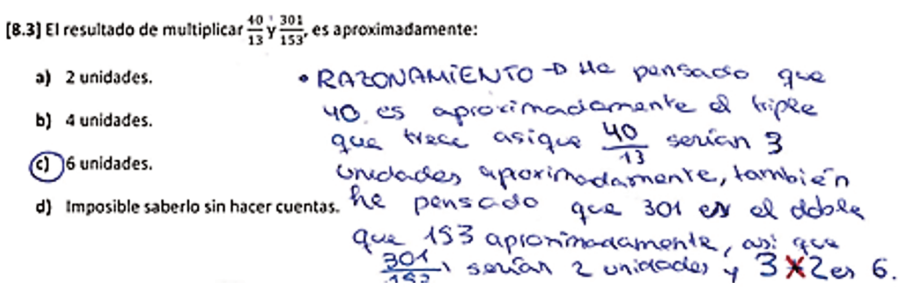



Figura 6. Multiplicación de fracciones, tarea de estimación

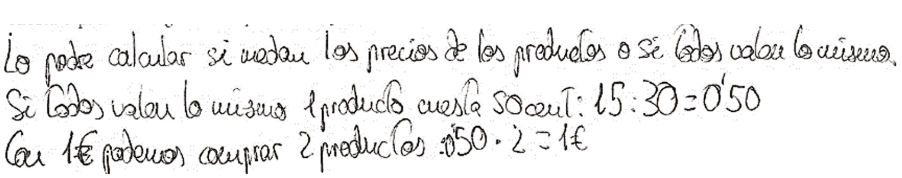



Figura 7. Condición de regularidad expresada por un grupo de alumnos

Tras responder a la primera pregunta, los grupos se enfrentan a otras como:

> ¿Cuántas cosas podrás comprar por cada euro que lleves al supermercado? Si los 30 € te los has gastado el día 15, ¿cuánto te habrías gastado el día 1?

Así, en el debate, se hablará de que, si se puede calcular la razón entre las magnitudes A y B, también se puede calcular la razón entre B y A, aunque tienen significados diferentes. Y de que no tiene sentido calcular razones entre magnitudes no relacionadas o si se usan números que no están expresando una cantidad.

Es importante que la situación haga emerger las ideas planificadas, pero igual de importante es dar cabida en la puesta en común a las respuestas erróneas. De hecho, el docente durante la fase de actividad de los alumnos debe detectar las respuestas incorrectas y los diferentes grados de profundidad en las respuestas correctas para organizar la puesta en común posterior. Por ejemplo, la respuesta incorrecta que vemos en la figura 8, puede utilizarse para profundizar en la interpretación de las razones y en los *impedimentos físicos* que puede suponer el uso de magnitudes discretas.

Aunque algunas de las actividades mostradas en este artículo pudieran identificarse con situaciones motivadoras para usar al principio de una unidad, el enfoque a través de la resolución de problemas, tal y como lo entendemos, implica utilizar estas situaciones introductorias para cada contenido (conceptual o procedimental) que quiera enseñarse. Podría el lector plantearse, por ejemplo, cómo abordar la enseñanza de contenidos más complejos relacionados con la proporcionalidad. La respuesta sigue siendo la misma, se mantiene el enfoque a través de la resolución de problemas.

Por ejemplo, proponemos como ejercicio a los lectores reflexionar sobre qué tipo de actividad sería adecuada para introducir los repartos inversamente proporcionales a estudiantes de 2.º de ESO sin experiencia en este tipo de problemas. Se trata de encontrar un problema que haga emerger ideas que sirvan para encaminarse hacia procedimientos de resolución generales. No vale, por tanto, que el problema contenga una frase similar a «reparte de forma inversamente proporcional a». Y si los lectores quieren conocer nuestra opinión en este tema les invitamos a leer el trabajo de Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2019).

## Geometría de emergencia

En el momento de escribir este artículo, el curso 2019/20 tocaba a su fin. Debido a la pandemia de la COVID-19, los autores, como miles de docentes, nos vimos obligados a plantear alternativas a distancia de la noche a la mañana. Nuestra preocupación principal era mantenernos coherentes con el enfoque seguido en presencial. Es decir, el alumnado, con el andamiaje adecuado, debería seguir con la responsabilidad inicial de enfrentarse a las tareas, habría que hacer puestas en común y progresar de esta manera en el aprendizaje. Además, éramos plenamente conscientes de las limitaciones que surgían en la interacción, así como que debíamos ser sensibles al alumnado con pocos recursos y considerar los elementos fundamentales de una enseñanza a distancia, aunque lo nuestro fuera una enseñanza de emergen-

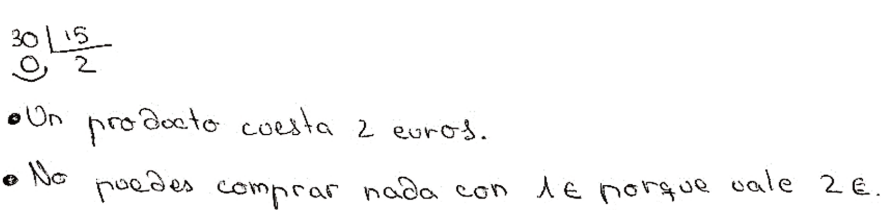



Figura 8. Respuesta incorrecta a la actividad introductoria del concepto de razón

cia: limitar actividades síncronas y plazos de entrega amplios.

Para ello, en el CPI Val de la Atalaya se reservaron los jueves como día para una videoconferencia de 30 - 40 minutos, que quedaba grabada para los que no podían asistir. En dichas videoconferencias, que jugaban el papel de las puestas en común, los profesores comentábamos las tareas que se habían mandado para la semana, a partir de las producciones enviadas por los alumnos.

Los profesores controlábamos, en los días previos a cada videoconferencia, que las entregas del alumnado estuviesen completas, sin dejar nada en blanco o con simples «es que no lo entiendo». Distinguíamos entre dudas legítimas e ilegítimas, de manera que solo contestábamos a aquellas que denotaban que lo habían leído e intentado hacer. Cuando se trataba de dudas ilegítimas, la tarea se devolvía al alumno. Al mismo tiempo, recogíamos aquellas producciones más representativas, y una selección de las observaciones de los alumnos, para preparar la videoconferencia. Mediante estas acciones cubríamos el papel del profesor durante la fase de acción que en modo presencial suponían las actuaciones con los grupos de alumnos.

En la puesta en común, se animaba a participar a los alumnos, quienes podían tomar la palabra en el chat o con el micrófono y siempre hacían alguna observación. Igualmente, en esas videoconferencias se compartían los resultados de las autoevaluaciones que completaban los alumnos, donde se les preguntaba cómo se habían ido resolviendo las tareas, qué dificultades habían tenido y qué habían aprendido. Normalmente, después de una videoconferencia se pedía reentrega final de la tarea que había protagonizado la sesión, completando lo ya realizado con nuevos razonamientos. Tras esta reentrega se daba paso a una nueva serie de actividades.

En una de esas secuencias se trabajaron las definiciones de los cuadriláteros. Se dividió el trabajo en dos partes. En primer lugar, el alumnado tenía que escribir la definición de cuadrado, rectángulo y rombo, con sus propias palabras. Una vez escrita, se le indicaba que no debía borrarla y que hiciese la construcción correspondiente en GeoGebra. Para ello se le proporcionaba un ejemplo en vídeo sobre una manera de hacer el cuadrado. Posteriormente, tenían que redactar otra vez la definición, teniendo en cuenta la construcción realizada. La entrega consistía en un documento con las definiciones y, por simplificar, una captura de la construcción. La captura estática de lo hecho en GeoGebra no es lo ideal, pero servía para identificar puntos libres y puntos ligados y se mostró suficiente para las puestas en común. En la figura 9 se observa la reentrega de un alumno, donde incorpora las propiedades de las diagonales de un cuadrado a su definición, apoyándose en una nueva construcción.

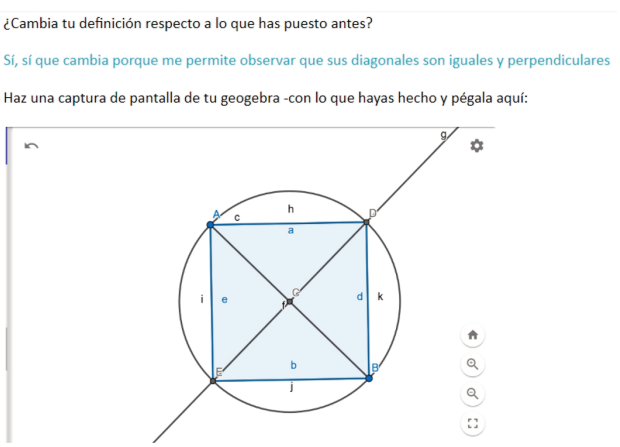



Figura 9. Fragmento de la reentrega final de un alumno sobre la definición de cuadrado

## Conclusiones

En este artículo hemos querido dar unas pinceladas de lo que significa para nosotros la enseñanza a través de la resolución de problemas, cuya idea principal es que los contenidos surjan de la propia actividad de los alumnos.

Pensamos que un gran obstáculo para conseguir este objetivo es el libro de texto. No solo por los diversos estudios que subrayan sus carencias (Ahl, 2016; Ruiz de Gauna, Dávila, Etxeberría, y Sarasua, 2013; Shield y Dole, 2013), sino por la pauta que marcan. La mayoría de los libros de texto ofrecen un único camino,

donde primero se ve la *teoría*, con sus ejemplos, después se trabajan unos ejercicios y, finalmente, con suerte, algunos problemas. De hecho, los libros de texto marcan tanto este camino que se erigen en el currículo de facto.

Desde aquí, aprovechamos para reivindicar un desarrollo profesional acorde con el papel que hemos de desempeñar los profesores. En lugar de libros de texto y métodos milagro deberíamos hablar de propuestas didácticas que ofrezcan al docente una justificación sobre el porqué de cada tarea y le permitan flexibilizar y adaptar la secuencia a cada grupo de alumnos. En este sentido nos alineamos claramente con Ferrando, Segura y Pla-Castells (2017) cuando citan a Lampert y otros (2013) para decir:

> Ningún producto acabado y con libro de instrucciones puede suplantar un programa riguroso que preste atención tanto a los conocimientos necesarios para enseñar como a las tareas y actividades que se llevan a cabo como parte del trabajo docente.

No queremos terminar sin mencionar la atención a la diversidad. Si nos tomamos en serio la O de la ESO y la normativa sobre inclusión, atender a la diversidad no significa dar unas fichas con operaciones sencillitas a ese alumnado que no puede seguir las matemáticas elevadas que están viendo el resto de sus compañeros. Y viceversa, dar unas fichas con matemáticas elevadas a algunos alumnos mientras los demás están con algo diferente, tampoco es atenderlos. No, al menos, de manera inclusiva.

Con el enfoque a través de la resolución de problemas se asume esa diversidad continuamente. Para comprender cómo se atiende esta diversidad es necesario tener en cuenta que, después de cada unidad, no todos los alumnos van a aprender lo mismo. Hagas lo que hagas como profesor. No nos referimos a que hay alumnos que suspenden y otros que sacan notable o sobresaliente, sino a que cada alumno crea sus propios significados personales sobre el contenido matemático.

Las secuencias didácticas, por tanto, deben facilitar el desarrollo de estos significados. Por eso, las actividades que hemos descrito tienen un suelo bajo y un techo alto (*low floor–high ceiling*). Es decir, tienen un punto de entrada asequible para todos, sin planos de abstracción formal innecesarios que impidan el acceso a las ideas matemáticas que hay detrás. Y permiten progresar y profundizar, enriqueciendo esos significados personales y facilitando el máximo desarrollo personal de cada alumno.

## Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00 y el grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo). Queremos dedicarlo a nuestros alumnos y compañeros, tanto de instituto, especialmente a Aurora Domenech y Ana Martínez; como del Área de Didáctica de las Matemáticas (Unizar).

## Referencias bibliográficas

Ahl, L. M. (2016), «Research findings' impact on the representation of proportional reasoning in Swedish mathematics textbooks», *Journal of Research in Mathematics Education - REDIMAT,* n.º 5 (2), 180-204.

Bingolbali, F., y E. Bingolbali (2019), «One curriculum and two textbooks: opportunity to learn in terms of mathematical problem solving», *Mathematics Education Research Journal,* n.º 31, 237-257.

Borrell, F., A. Pol y E. Saguer (1998), «Estadística y probabilidad», en C. Azcárate y J. Deulofeu (1998), *Matemáticas ESO, Guías Praxis para el profesorado*, Praxis Barcelona.

Cai, J. (2003), «What research tells us about teaching mathematics through problem solving», *Research and issues in teaching mathematics through problem solving*, 241-254.

English, L. D., y J. Gainsburg (2015), «Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum», en L. D. English y D. Kirshner (eds.), *Handbook of international research in mathematics education. Third edition*, Routledge, Nueva York, 313-335.

Escolano, R. (2007), *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los*

*modelos de medida y cociente*, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

Ferrando, I., C. Segura y M. Pla-Castells (2017), «Nuevas metodologías para la enseñanza de las matemáticas: análisis crítico», en *I Jornadas CTEM de la Comunitat Valenciana*.

Gairín, J. M., y R. Escolano (2009), «Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional», *Suma,* n.º 62, 35-48.

Gairín, J. M. y J. Sancho (2002), *Números y algoritmos*, Síntesis, Madrid.

Gaulin, C. (2001), «Tendencias actuales de la resolución de problemas», *Sigma,* n.º 19, 51-63.

Hmelo-Silver, C. E., R. G. Duncan y C. A. Chinn (2007), «Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: a response to Kirschner, Sweller, and Clark», *Educational psychologist,* n.º 42 (2), 99-107.

Lampert, M., M. L. Franke, E. Kazemi, H. Ghousseini, A. C. Turrou, H. Beasley,… y K. Crowe (2013), «Keeping it complex: Using rehearsals to support novice teacher learning of ambitious teaching», *Journal of Teacher Education,* n.º 64 (3), 226-243.

Lopes, J. B., y N. Costa (1996), «Modelo de enseñanza-aprendizaje centrado en la resolución de problemas: Fundamentación, presentación e implicaciones educativas», *Enseñanza de las ciencias,* n.º 14 (1), 45-61.

Martínez-Juste, S., J. M. Muñoz-Escolano y A. M. Oller-Marcén (2019), «Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de Investigación-Acción», en J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII*, SEIEM, Valladolid, 413-422.

Pierce, R., y H. Chick (2011), «Teachers' Beliefs About Statistics Education», en C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (eds), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*, Springer, Dordrecht.

Ruiz de Gauna, J., P. Dávila, J. Etxeberría y J. Sarasua (2013), «Los libros de texto de Matemáticas del Bachillerato en el periodo 1970-2005», *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* n.º 16 (2), 245-276.

Shield, M., y S. Dole (2013), «Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning», *Educational Studies in Mathematics,* n.º 82 (2), 183-199.

Swan, M. (1985), *The language of functions and graphs*, Shell Centre & Joint Matriculation Board, Nottingham.

Wright, P. (2017), «Critical relationships between teachers and learners of school mathematics», *Pedagogy, Culture & Society,* n.º 25 (4), 515-530.

**Pablo Beltrán-Pellicer**
CPI Val de la Atalaya, María de Huerva (Zaragoza)
Universidad de Zaragoza
<pbeltran@unizar.es>

**Sergio Martínez-Juste**
IES Pilar Lorengar, Zaragoza
Universidad de Zaragoza
<sergiomj@unizar.es>

# JAEM 20

Matemáticas para construir el mundo




Convoca: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Organiza: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al - Khwārizmī"

@20jaem @20jaem Veinte Jaem 20JAEM XX JAEM flickr 20jaemvalencia

https://20.jaem.es/

# Diseño de logicomios y sudokus para el taller de matemáticas

José de Francisco Estaire

SUMA+ núm. 98
pp. 23-34
Artículo recibido en *Suma* en abril de 2020 y aceptado en enero de 2021

En este articulo se pretende que actividades de lógica deductiva, del tipo *¿Quién es quién?* o *Sudokus*, puedan incorporarse al conjunto de los ejercicios que deban realizar los alumnos.
En el artículo se aportan procedimientos para la construcción de los ejercicios, de esta forma, el profesor interesado en el tema puede elaborar sus propias propuestas de trabajo, consiguiendo un control total sobre los ejercicios que el alumno debe realizar.

**Palabras clave:** Lógica deductiva, Sudoku.

**Design of logicomios and sudoku puzzles for Mathematics workshops** // This article aims at including deductive and logical reasoning games such as *Guess who?* or *Sudoku* puzzles as part of the activities, students have to carry out.
In this article there are some procedures focused on building exercises, so that a teacher who may be interested in this matter, can manage their own proposals that allow to monitor the students to-do tasks.

**Keywords:** Deductive reasoning logic, Sudoku.

Al ofertar en la ESO la asignatura optativa Taller de Matemáticas, en el departamento pensamos que el objetivo de esta nueva asignatura no era enseñar Matemáticas de la manera que se entiende popularmente, es decir, saber aplicar fórmulas y algoritmos, de forma que un alumno que entrara en el taller sin saber multiplicar polinomios saliera de él sin saber multiplicarlos. Por el contrario habría que proponer actividades en las que el alumno, para encontrar la solución, tuviera que elaborar procedimientos propios.

Teníamos muy claro que los ejercicios a realizar serían de tipo:

— Manipulativo (mosaicos, papiroflexia…)
— Geométrico (máximos, mínimos, volúmenes…)
— Lógicos (logicomios, sudokus…)
— Juegos de estrategia (Nim, ocas y zorra…)
— Investigación operativa (trasiego de líquidos, grafos…)
— Rompecabezas (cardos, clavos...), etc.

Se trataría de mantener un equilibrio entre las actividades de «reflexión e investigación» y las de «manipulación», valorando los métodos originales de solución, de forma que el taller no fuera una clase de profundización o de ampliación de contenidos del área troncal de matemáticas dirigida a los alumnos más avanzados, ni una clase de recuperación para aquellos alumnos que necesitaran una atención especial.

Posteriormente, la Administración cambió la filosofía del taller, enfocándolo a la atención de los alumnos con necesidades educativas.

La nueva orientación hizo que se transformara en una asignatura de refuerzo, en la que se insistiría en actividades curriculares básicas, de forma que el alumno pudiera alcanzar un nivel de conocimientos matemáticos mínimo.

Las actividades presentadas en este artículo proceden de la etapa inicial del taller. Posteriormente algunas de ellas fueron propuestas a todo el grupo, pero en contadas ocasiones (fin de trimestre, semana cultural…).

## Actividades para fomentar el razonamiento lógico

El objetivo de estas actividades era fomentar el razonamiento lógico deductivo, para conseguirlo preparamos diversas propuestas, seleccionando aquellas que fueran atractivas en su planteamiento y no muy difíciles de resolver. Indicaremos cómo el profesor puede diseñar y realizar dos tipos distintos de actividades de lógica deductiva: Logicomios y Sudokus.

### LOGICOMIOS

Un *logicomio* es un ejercicio de lógica deductiva, en el que nos proporcionan varias afirmaciones y negaciones, debiendo descubrir las relaciones que un sujeto tiene con cada categoría. Dicho así parece algo críptico, pero trataremos de aclararlo a lo largo del artículo.

#### *Desarrollo y diseño de la actividad*

Sin ninguna información previa en la primera sesión se propuso el problema n.º 25 del libro *Nuevos Problemas de Matemáticas* de J. Gallego-Díaz. Este es un ejercicio de lógica que no es fácil ni sencillo de solucionar:

> **Las tres varillas metálicas**
> En una caja hay tres varillas de oro, plata y plomo, siendo cada una de ellas de distinta longitud, distinto peso y distinto metal. Se sabe que:
> 1. La más pesada no es la más larga.
> 2. La de plata no es la más corta.
> 3. La de plata pesa más que la de plomo.
> 4. La más liviana no es la más corta.
> 5. La de plomo es más ligera que la más larga.
> 6. La más corta no es la de peso medio.
>
> Averiguar la longitud y el peso relativo de cada varilla.

Terminada la clase sin llegar a ninguna solución, el problema quedó propuesto para la siguiente sesión.

En la segunda clase se comprobó que ningún alumno había resuelto el ejercicio de las varillas metálicas. Los alumnos, después de dedicar unos 15 minutos a la búsqueda de la solución, y al no encontrarla perdían el interés por el ejercicio, comentando que era un «trabalenguas». Entonces, se hizo hincapié en que era fundamental la organización de la información, planteando la necesidad de disponer de algún procedimiento que permitiera su organización y facilitara la búsqueda de la solución del ejercicio.

#### *Organización de la información*

Con objeto de que los alumnos conocieran una técnica para procesarla, se les entregó una hoja con un ejemplo en el que se indicaba la forma de abordar estos ejercicios. La hoja (figura 1) era similar a: *Quién es quién: cómo resolverlos*, publicada en la revista de pasatiempos: *Juegos de lógica LOGIC* de editorial Zugarto.

Después de esta introducción, pasamos a organizar la información proporcionada por el ejercicio propuesto. Tenemos tres categorías: metal, peso, longitud y en cada una de ellas tres sujetos. Para relacionar las categorías dos a dos necesitamos 3 tablas de doble entrada ($C_{3,2}$). Con el fin de agilizar la sesión se les entregó una hoja con las tablas de doble entrada, en las que únicamente figuraban las categorías. Después de leer y releer las pistas se puso el nombre de los sujetos en las tablas. Bajo la dirección del profesor y de forma colectiva se procedió a la resolución del ejercicio.

# Quién es quién: cómo resolverlos

Los juegos de lógica son todos aquellos que se pueden resolver por pura deducción.
En los enigmas de *Quien es Quién*, donde se trata de correlacionar ciertas características (nombre, apellido, profesión, edad, etc.), le proponemos el uso de diagramas de múltiple entrada. Aquí le indicamos cómo se puede ir resolviendo un caso sencillo.

TÉ PARA TRES

*Tres amigas se reúnen a tomar el té. De ellas sabemos que:*

1. *Beatriz no es García.*
2. *López es secretaria en una oficina.*
3. *La actriz se llama Claudia.*
4. *La maestra no es Méndez.*

*Deduzca los datos de cada una de ellas.*

En estos juegos no hay dos variables con una misma cualidad. Es decir, que aquí tenemos tres mujeres con nombres y apellidos distintos y con trabajos también distintos.

SOLUCIÓN

En el esquema vamos a indicar con la marca de no verificación ✘ las relaciones que no valen y con la marca de verificación ✔ las relaciones correctas.
Por la pista 1 colocamos el símbolo ✘ en el cruce de Beatriz con García:

| | | Apellido | | | Actividad | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *García* | *López* | *Méndez* | *Actriz* | *Maestra* | *Secretaria* |
| Nombre | *Alicia* | | | | | | |
| | *Beatriz* | ✘ | | | | | |
| | *Claudia* | | | | | | |
| Apellido | *Actriz* | | | | | | |
| | *Maestra* | | | | | | |
| | *Secretaria* | | | | | | |

La pista 2 nos da una relación correcta: López es secretaria. Colocamos un símbolo ✔ en el cruce de Secretaria con López.
Al marcar con ✔ un sector, todas las casillas de su horizontal y su vertical deben llenarse con el símbolo ✘,pues quedan eliminadas.
En este caso, el sector Actividad–Apellido, colocamos el símbolo en las casillas Secretaria–García, Secretaria–Méndez, Actriz—López y Maestra–López.

El esquema quedaría así:

| | | Apellido | | | Actividad | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *García* | *López* | *Méndez* | *Actriz* | *Maestra* | *Secretaria* |
| Nombre | *Alicia* | | | | | | |
| | *Beatriz* | ✘ | | | | | |
| | *Claudia* | | | | | | |
| Apellido | *Actriz* | | ✘ | | | | |
| | *Maestra* | | ✘ | | | | |
| | *Secretaria* | ✘ | ✔ | ✘ | | | |

Incorpore usted en el esquema los datos correspondientes a las pistas 3 y 4. Si siguió nuestras indicaciones deberá verse así:

| | | Apellido | | | Actividad | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *García* | *López* | *Méndez* | *Actriz* | *Maestra* | *Secretaria* |
| Nombre | *Alicia* | | | | ✘ | | |
| | *Beatriz* | ✘ | | | ✘ | | |
| | *Claudia* | | | | ✔ | ✘ | ✘ |
| Apellido | *Actriz* | | ✘ | | | | |
| | *Maestra* | | ✘ | ✘ | | | |
| | *Secretaria* | ✘ | ✔ | ✘ | | | |

En el sector Actividad-Apellido quedan ahora determinadas dos relaciones correctas: Maestra–García y Actriz– Méndez. incorpore usted los símbolos ✔ correspondientes. Observe que Claudia es la actriz y que la actriz es Méndez, por lo tanto Claudia es Méndez. Así obtiene otra relación correcta. Usted está en condiciones de completar la solución. Compare su respuesta con la nuestra:

| Nombre | Apellido | Actividad |
|---|---|---|
| Alicia | García | Maestra |
| Beatriz | López | Secretaria |
| Claudia | Méndez | Actriz |

Figura 1

## *Solución paso a paso*

En las tablas que relacionan dos categorías marcamos las pistas que proporciona el enunciado, utilizando la marca de no verificación ✘ cuando son incompatibles y la marca de verificación ✔ cuando son compatibles.

Al trasladar las seis pistas se obtiene:

| | | Longitud | | | Peso | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Más larga* | *Longitud media* | *Más corta* | *Más pesada* | *Peso medio* | *Más ligera* |
| Metal | *Oro* | | | | | | |
| | *Plata* | | | 2✘ | | | 3✘ |
| | *Plomo* | 5✘ | | | | | |
| Peso | *Más pesada* | 1✘ | | | | | |
| | *Peso medio* | | | 6✘ | | | |
| | *Más ligera* | | | 4✘ | | | |

7. Se deduce que la más pesada es la más corta.
8. La de plata no es la más corta, por tanto no es la más pesada. Es la de peso medio.

| | | Longitud | | | Peso | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Más larga* | *Longitud media* | *Más corta* | *Más pesada* | *Peso medio* | *Más ligera* |
| Metal | *Oro* | | | | | ✘ | |
| | *Plata* | | | 2✘ | 8✘ | 8✔ | 3✘ |
| | *Plomo* | 5✘ | | | | ✘ | |
| Peso | *Más pesada* | 1✘ | ✘ | 7✔ | | | |
| | *Peso medio* | | | 6✘ | | | |
| | *Más ligera* | | | 4✘ | | | |

9. Por (5) la de plomo es más ligera que la más larga, luego la de plomo no puede ser la más pesada y al no poder ser la de peso medio: es la más ligera.

| | | Longitud | | | Peso | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Más larga* | *Longitud media* | *Más corta* | *Más pesada* | *Peso medio* | *Más ligera* |
| Metal | *Oro* | | | | ✔ | ✘ | ✘ |
| | *Plata* | | | 2✘ | 8✘ | 8✔ | 3✘ |
| | *Plomo* | 5✘ | | | ✘ | ✘ | 9✔ |
| Peso | *Más pesada* | 1✘ | ✘ | 7✔ | | | |
| | *Peso medio* | | | 6✘ | | | |
| | *Más ligera* | | | 4✘ | | | |

10. De la tabla Metal–Peso se deduce que la más pesada es la de oro, la de plata tiene peso medio y la de plomo es la más ligera.
11. Por (1) se deduce que la de oro no es la más larga, luego la más larga es la de plata.
12. Como la más pesada es la de oro, por (7) deducimos que es la más corta.
13. Finalmente se obtiene que la de plomo tiene la longitud media.

| | | Longitud | | | Peso | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Más larga* | *Longitud media* | *Más corta* | *Más pesada* | *Peso medio* | *Más ligera* |
| Metal | *Oro* | ✘ | ✘ | 12✔ | ✔ | ✘ | ✘ |
| | *Plata* | 11✔ | ✘ | 2✘ | 8✘ | 8✔ | 3✘ |
| | *Plomo* | 5✘ | ✔ | ✘ | ✘ | ✘ | 9✔ |
| Peso | *Más pesada* | 1✘ | ✘ | 7✔ | | | |
| | *Peso medio* | | | 6✘ | | | |
| | *Más ligera* | | | 4✘ | | | |

Ahora se puede presentar la solución en forma de tabla simple:

| Metal | Longitud | Peso |
|---|---|---|
| Oro | Es la más corta | Es la más pesada |
| Plata | Es la más larga | Tiene peso medio |
| Plomo | Longitud media | Es la más ligera |

## *Construcción de un logicomio*

Inicialmente nos limitábamos a reproducir los ejercicios propuestos en alguna revista de pasatiempos, como por ejemplo *Cacumen* o *Logic*. El problema que se planteaba era que, para ver su dificultad e interés, previamente se debían resolver los logicomios. Generalmente había casos difíciles que podían desalentar a los alumnos. Debido a esta situación, decidimos tratar de generar nuetro propios logicomios. De esta forma tendríamos un mayor control del ejercicio, ya que se podía elegir el tema, el grado de dificultad y las pistas a proporcionar.

Decidimos crear un problema estándar formado por cuatro categorías (*A, B, C, D)* y cuatro sujetos (1, 2, 3, 4) por categoría, por tanto necesitábamos 6 ($C_{4,2}$) tablas de doble entrada de $4 \times 4$. Estas tablas se las proporcionábamos al alumno, agrupadas como bloques de una matriz triangular.

Una tabla de orden $n \times n$, queda determinada si se conocen $(n-2)$ afirmaciones y una negación, o sus equivalentes. Las afirmaciones y negaciones, en su conjunto, deben nombrar a todas las categorías y sujetos.

En la propuesta estándar una tabla está determinada si se conocen dos afirmaciones y una negación. La información que nos da una afirmación es igual que la que nos proporcionan tres negaciones. El ejercicio estará resuelto cuando conozcamos los elementos de tres tablas, por tanto hay que proporcionar, como mínimo, seis afirmaciones y tres negaciones.

Para el diseño, se partió del ejercicio resuelto y en las tablas distribuímos las afirmaciones y negaciones a voluntad, procurando que las afirmaciones estuvieran situadas en las tablas como torres de ajedrez, es decir no compartiendo la misma fila o columna. Las negaciones de una tabla deberán estar fuera de la influencia de las afirmaciones de esa tabla, ya que en caso contrario no aportan ninguna información suplementaria. Según sea la distribución y su número, el ejercicio puede ser más o menos complicado.

De forma general, se proporcionan cinco afirmaciones y siete negaciones distribuidas en seis pistas. En particular si las pistas están en las tablas de la primera fila, el ejercicio se soluciona muy fácilmente.

Veamos un ejemplo en el que partimos del ejercicio a proponer ya solucionado (figura 2).

| Nombre | Año de nacimiento | Lugar de nacimiento | Año y lugar fallecimiento |
|---|---|---|---|
| Anaxágoras | 500 a. C. | Clazómenas | 428 a. C. - Lámpsaco |
| Aristarco | 320 a. C. | Samos | 230 a. C. - Alejandría |
| Eratóstenes | 276 a. C. | Cirene | 194 a. C. - Alejandría |
| Anaximandro | 611 a. C. | Mileto | 545 a. C. - Mileto |

Figura 2. Solución del ejercicio

A continuación seleccionamos las pistas a proporcionar. Para ello, colocamos cinco afirmaciones y siete negaciones en las celdas que queramos (figura 3).

| | | Año de nacimiento | | | | Lugar de nacimiento | | | | Año y lugar de muerte | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *500 a. C.* | *320 a. C.* | *276 a. C.* | *611 a. C.* | *Clazómenas* | *Samos* | *Cirene* | *Mileto* | *428 a. C. - Lámpsaco* | *230 a. C. - Alejandría* | *194 a. C. - Alejandría* | *545 a. C. - Mileto* |
| Nombre | *Anaxágoras* | ✔ | | | | | | ✘ | | | | | |
| | *Aristarco* | | | ✘ | | | | | | ✘ | | | |
| | *Eratóstenes* | | | | | ✘ | | | | | | ✔ | |
| | *Anaximandro* | | ✘ | | | | | | ✔ | | | | |
| Año y lugar de muerte | *428 a. C. - Lámpsaco* | | | | | | | | | | | | |
| | *230 a. C. - Alejandría* | | | | | | ✔ | | | | | | |
| | *194 a. C. - Alejandría* | | | | | | | | | | | | |
| | *545 a. C. - Mileto* | | | | | | | ✘ | | | | | |
| Lugar de nacimiento | *Clazómenas* | | | | | | | | | | | | |
| | *Samos* | | ✔ | | | | | | | | | | |
| | *Cirene* | | | | ✘ | | | | | | | | |
| | *Mileto* | | | | | | | | | | | | |

Figura 3. Distribución de las pistas

Por último, las presentamos formulando seis pistas:

1. Anaxágoras nació el 500 a. C. pero no en Cirene.
2. Eratóstenes murió el 194 a. C. en Alejandría, pero no nació en Clazómenas.
3. Anaximandro nació en Mileto, pero no el 320 a. C.
4. Aristarco no nació el 276 a. C. ni murió el 428 a. C. en Lámpsaco.
5. El que murió el 230 a. C. en Alejandría, nació en Samos el 320 a. C.
6. El que nació en Cirene, no lo hizo el 611 a. C. ni murió el 545 a. C. en Mileto.

Ya estamos en condiciones de preparar el ejercicio que entregaremos a los alumnos (figura 4).

Para normalizar la resolución y ahorrarles tiempo preparando las tablas de doble entrada, estas se entregarán con el enunciado.

Si queremos que se esfuercen un poco más, podemos hacer que en las tablas solo figuren las categorías, omitiendo el nombre de los sujetos, o incluso entregarlas en blanco.

## SUDOKUS

Un sudoku se compone de una matriz o tabla $A$ de orden $9 \times 9$, dividida en 9 submatrices $A_{ij}$ de orden $3 \times 3$. En cada fila y columna de la matriz $A$ figurarán los números del 1 al 9, sin repetirse, y en cada submatriz $A_{ij}$ también deben figurar los números del 1 al 9.

Al alumno se le presenta la matriz $A$ con un cierto número de dígitos eliminados, el ejercicio consiste en encontrar estos números ocultos. Las herramientas que suelen usarse para aceptar o rechazar un número son la agudeza visual y el razonamiento.

Si queremos generar un sudoku disponemos de generadores gratuitos, que de una forma en principio

**IES ANDRÉS LAGUNA – TALLER DE MATEMÁTICAS - FECHA _____**

**ALUMNO _____ GRUPO _____**

LOS SABIOS GRIEGOS

Con las pistas que se dan y la ayuda de las tablas que se proporcionan para cada sabio determina el lugar y el año de nacimiento así como el año y el lugar de su muerte. Finalmente, busca informacion sobre cada sabio y elabora un informe en el que figuren los hechos más relevantes de la vida de cada uno de ellos, (citando las fuentes y cuidando con el «corta y pega»).

1. Anaxágoras nació el 500 a. C., pero no en Cirene.
2. Eratóstenes murió el 194 a. C. en Alejandría pero no nació en Clazómenas.
3. Anaximandro nació en Mileto pero no el 320 a. C.
4. Aristarco no nació el 276 a. C. ni murió el 428 a. C. en Lámpsaco.
5. El que murió el 230 a. C. en Alejandría nació en Samos el 320 a. C.
6. El que nació en Cirene no lo hizo el 611 a. C. ni murió el 545 a. C. en Mileto.

| | | Año de nacimiento | | | | Lugar de nacimiento | | | | Año y lugar de muerte | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *500 a.C.* | *320 a.C.* | *276 a.C.* | *611 a.C.* | *Clazómenas* | *Samos* | *Cirene* | *Mileto* | *428 a.C. - Lámpsaco* | *230 a.C. - Alejandría* | *194 a.C. - Alejandría* | *545 a.C. - Mileto* |
| Nombre | *Anaxágoras* | | | | | | | | | | | | |
| | *Aristarco* | | | | | | | | | | | | |
| | *Eratóstenes* | | | | | | | | | | | | |
| | *Anaximandro* | | | | | | | | | | | | |
| Año y lugar de muerte | *428 a.C. - Lámpsaco* | | | | | | | | | | | | |
| | *230 a.C. - Alejandría* | | | | | | | | | | | | |
| | *194 a.C. - Alejandría* | | | | | | | | | | | | |
| | *545 a.C. - Mileto* | | | | | | | | | | | | |
| Lugar de nacimiento | *Clazómenas* | | | | | | | | | | | | |
| | *Samos* | | | | | | | | | | | | |
| | *Cirene* | | | | | | | | | | | | |
| | *Mileto* | | | | | | | | | | | | |

| | Año de nacimiento | Lugar de nacimiento | Año y lugar fallecimiento |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | . | | |
| | | | |
| | | | |

Figura 4

desconocida por nosotros, nos proporcionan un ejercicio del cual no tenemos ningún control. Si generamos un sudoku mediante un programa o lo copiamos de una revista, debemos resolverlo y valorar su dificultad, decidiendo si proponemos este ejercicio a los alumnos.

## *Construcción de un sudoku*

Podemos generar sudokus de forma automática siguiendo los pasos que se detallan a continuación.

Partimos de la submatriz $A_{11}$ a la que llamaremos *matriz básica* o *matriz generadora*. En esta matriz sus nueve elementos pueden distribuirse de cualquier forma. En particular, una manera de hacerlo consiste en colocar en la posición central un número y el siguiente en la posición $a_{11}$. Los restantes los ponemos a salto de caballo de ajedrez siguiendo las agujas del reloj.

*Fácil*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

*Salto4*

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 8 | 2 |
| 1 | 4 | 6 |
| 7 | 3 | 9 |

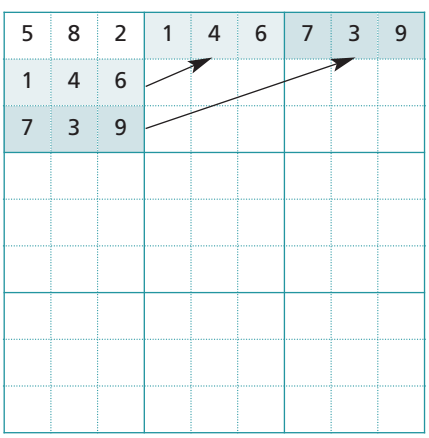
*Salto1*

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 5 | 8 |
| 7 | 1 | 3 |
| 4 | 9 | 6 |

*Salto9*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 |
| 6 | 9 | 2 |
| 3 | 8 | 5 |

Partiendo de *salto4*, los números de la segunda y tercera filas de la matriz generadora, deberán aparecer en la primera fila de las submatrices $A_{12}$ y $A_{13}$.




De esta forma podemos completar las dos primeras submatrices

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 2 | 1 | 4 | 6 | 7 | 3 | 9 |
| 1 | 4 | 6 | 7 | 3 | 9 | 5 | 8 | 2 |
| 7 | 3 | 9 | 5 | 8 | 2 | 1 | 4 | 6 |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

Este procedimiento es bastante elemental, por lo que sofisticaremos un poco más la forma de rellenar las filas de las submatrices $A_{12}$ y $A_{13}$.

Para rellenar las filas usaremos las transformaciones $\wedge$ «y» y $\vee$ «o» (figura 5):

- *Transformación* $\wedge$: de los elementos situados en dos filas paralelas, tomaremos los que están situados en forma de $\wedge$.
- *Transformación* $\vee$:de los elementos situados en dos filas paralelas, tomaremos los que están situados en forma de $\vee$.

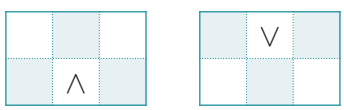



Figura 5. Transformaciones $\wedge$ y $\vee$ en filas

Para las columnas de las submatrices $A_{21}$ y $A_{31}$, también usaremos las transformaciones $\wedge$ y $\vee$, pero en columna (figura 6).

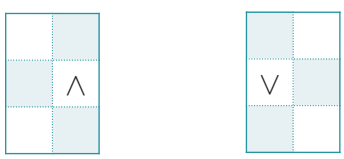



Figura 6. Transformaciones $\wedge$ y $\vee$ en columnas

Al aplicar las transformaciones $\wedge$ y $\vee$ a las filas y columnas de la matriz generadora *salto4*, procuraremos que en cada fila el orden de la aplicación de las transformaciones sea el de la anterior pero alternado. Es decir, si en la primera fila se aplican las transformaciones $\wedge$ y $\vee$, en la segunda se aplicarán las transformaciones $\vee$ y $\wedge$ y finalmente en la tercera se aplicaran las transformaciones $\wedge$ y $\vee$, de esta forma se evita la coincidencia de dos números iguales en una columna, obteniendo:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 2 | 7 | 4 | 9 | 1 | 3 | 6 |
| 1 | 4 | 6 | 5 | 3 | 2 | 7 | 8 | 9 |
| 7 | 3 | 9 | 1 | 8 | 6 | 5 | 4 | 2 |
| 8 | 2 | 5 | | | | | | |
| 6 | 1 | 4 | | | | | | |
| 3 | 9 | 7 | | | | | | |
| 9 | 5 | 8 | | | | | | |
| 4 | 6 | 1 | | | | | | |
| 2 | 7 | 3 | | | | | | |

Finalmente aplicando las transformaciones $\wedge$ y $\vee$ a las filas de las submatrices $A_{21}$ y $A_{31}$ (alternando su aplicación), obtenemos:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 2 | 7 | 4 | 9 | 1 | 3 | 6 |
| 1 | 4 | 6 | 5 | 3 | 2 | 7 | 8 | 9 |
| 7 | 3 | 9 | 1 | 8 | 6 | 5 | 4 | 2 |
| 8 | 2 | 5 | 3 | 1 | 7 | 6 | 9 | 4 |
| 6 | 1 | 4 | 8 | 9 | 5 | 3 | 2 | 7 |
| 3 | 9 | 7 | 6 | 2 | 4 | 8 | 1 | 5 |
| 9 | 5 | 8 | 4 | 7 | 1 | 2 | 6 | 3 |
| 4 | 6 | 1 | 2 | 5 | 3 | 9 | 7 | 8 |
| 2 | 7 | 3 | 9 | 6 | 8 | 4 | 5 | 1 |

Es evidente que posteriormente pueden realizarse otras transformaciones, por ejemplo permutar filas o columnas.

La dificultad del sudoku estará en función del número de cifras ocultas.

Solo queda eliminar unos 45 números de forma aleatoria (5 por submatriz, fila y columna). Para seleccionar los números a ocultar, generaremos unos ocho o nueve números aleatorios. En una celda de una hoja de cálculo escribiremos:

= ALEATORIO.ENTRE(1;9).

Al rellenar arrastrando unas nueve veces obtendremos nueve números aleatorios, alguno repetido, de forma que el número obtenido será la celda o el número a borrar en la submatriz.

En lugar de borrar el número podemos escribirlo en tinta blanca o en un color tenue, de esta forma cuando escribamos la matriz con tinta negra podemos volver a visualizar los valores que habíamos ocultado.

Con la solución anterior y después de ocultar 46 números, el ejercicio a resolver será:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 2 | 7 | | | | | |
| 1 | | | | | 2 | | 8 | |
| | | 9 | | 8 | 6 | 5 | 4 | 2 |
| | 2 | | 3 | | 7 | 6 | 9 | 4 |
| | | 4 | | | 5 | | | |
| | 9 | 7 | | 2 | | | | 5 |
| | 5 | | 4 | | | | | |
| | 6 | 1 | 2 | | | 9 | | 8 |
| 2 | | | | 6 | 8 | | | 1 |

Este ejercicio fue propuesto a un programa de resolución de sudokus que lo resolvió bien pero con un ligero titubeo al final. Resuelto a mano hay que arriesgarse a colocar un número en una casilla en la que pueden ir dos números, continuar resolviendo y esperar a que la elección haya sido correcta.

El siguiente ejercicio, en el que se desvela el número de la casilla $a_{51}$, es más fácil.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 2 | 7 | | | | | |
| 1 | | | | | 2 | | 8 | |
| | | 9 | | 8 | 6 | 5 | 4 | 2 |
| | 2 | | 3 | | 7 | 6 | 9 | 4 |
| 6 | | 4 | | | 5 | | | |
| | 9 | 7 | | 2 | | | | 5 |
| | 5 | | 4 | | | | | |
| | 6 | 1 | 2 | | | 9 | | 8 |
| 2 | | | | 6 | 8 | | | 1 |

Para camuflar el sudoku anterior lo giramos 90º.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | 6 | | | 1 | |
| | 6 | 5 | 9 | | 2 | | | 8 |
| | 1 | | 7 | 4 | | 9 | | 2 |
| | 2 | 4 | | | 3 | | | 7 |
| 6 | | | 2 | | | 8 | | |
| 8 | | | | 5 | 7 | 6 | 2 | |
| | 9 | | | | 6 | 5 | | |
| | | | | | 9 | 4 | 8 | |
| 1 | 8 | | 5 | | 4 | 2 | | |

De esta forma podemos proponer a los alumnos la resolución de este último sudoku más fácil y el primero que hemos generado, más complicado (figura 7).

## *Adenda*

Si queremos generar automáticamente los sudokus, podemos escribir una matriz generadora y con ayuda de una hoja de cálculo obtener el resto de los números, para ello el número que figura en una celda de la matriz generadora aparecerá, en las restantes submatrices, en diversas posiciones. Por ejemplo, si en la celda $a_{11}$ de la matriz generadora figura un 5, en las celdas $a_{24}$, $a_{37}$, $a_{43}$, $a_{56}$, $a_{69}$, $a_{72}$, $a_{85}$, $a_{98}$, deberá figurar un 5, por tanto en esas celdas no pondremos un 5, sino que debemos poner el contenido de la celda $a_{11}$. Si la referencia de $a_{11}$, en la hoja de cálculo es `B3`, en cada una de las celdas anteriores pondremos `<=B3>`, de esta forma cada vez que variemos el contenido de la celda $a_{11}$ (celda `B3` de la hoja de cálculo), automáticamente se actualizará el valor que contiene cada una de las celdas asociadas a ella con el nuevo contenido de $a_{11}$. Veamos varios sudokus generados de esta forma en los que están marcadas las celdas relacionadas.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 8 | 2 | 7 | 4 | 9 | 1 | 3 | 6 |
| 1 | 4 | 6 | 5 | 3 | 2 | 7 | 8 | 9 |
| 7 | 3 | 9 | 1 | 8 | 6 | 5 | 4 | 2 |
| 8 | 2 | 5 | 3 | 1 | 7 | 6 | 9 | 4 |
| 6 | 1 | 4 | 8 | 9 | 5 | 3 | 2 | 7 |
| 1 | 9 | 7 | 6 | 2 | 4 | 8 | 1 | 5 |
| 9 | 5 | 8 | 4 | 7 | 1 | 2 | 6 | 3 |
| 4 | 6 | 1 | 2 | 5 | 3 | 9 | 7 | 8 |
| 2 | 7 | 3 | 9 | 6 | 8 | 4 | 5 | 1 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 5 | 1 | 2 | 9 | 7 | 3 | 6 |
| 7 | 2 | 6 | 4 | 3 | 5 | 1 | 8 | 9 |
| 1 | 3 | 9 | 7 | 8 | 6 | 4 | 2 | 5 |
| 8 | 5 | 4 | 3 | 7 | 1 | 6 | 9 | 2 |
| 6 | 7 | 2 | 8 | 9 | 4 | 3 | 5 | 1 |
| 3 | 9 | 1 | 6 | 5 | 2 | 8 | 7 | 4 |
| 9 | 4 | 8 | 2 | 1 | 7 | 5 | 6 | 3 |
| 2 | 6 | 7 | 5 | 4 | 3 | 9 | 1 | 8 |
| 5 | 1 | 3 | 9 | 6 | 8 | 2 | 4 | 7 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 7 | 5 | 9 | 4 | 8 | 6 |
| 4 | 5 | 6 | 1 | 8 | 3 | 7 | 2 | 9 |
| 7 | 8 | 9 | 4 | 2 | 6 | 1 | 5 | 3 |
| 2 | 3 | 1 | 8 | 4 | 7 | 6 | 9 | 5 |
| 6 | 4 | 5 | 2 | 9 | 1 | 8 | 3 | 7 |
| 8 | 9 | 7 | 6 | 3 | 5 | 2 | 4 | 1 |
| 9 | 1 | 2 | 5 | 7 | 4 | 3 | 6 | 8 |
| 5 | 6 | 4 | 3 | 1 | 8 | 9 | 7 | 2 |
| 3 | 7 | 8 | 9 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |

**IES ANDRÉS LAGUNA – TALLER DE MATEMÁTICAS - FECHA _____**

**ALUMNO _____ GRUPO _____**

EJERCICIOS DE SUDOKUS

Resolver los siguientes ejercicios:

**Sudoku-1**

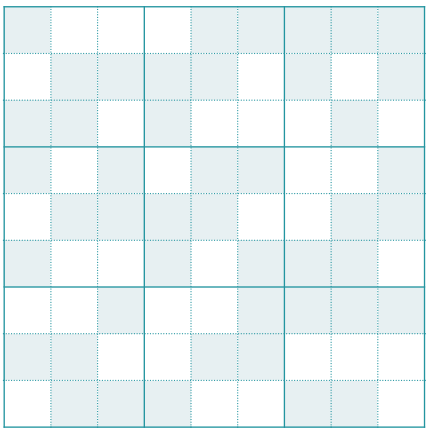
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | 6 | | | 1 | |
| | 6 | 5 | 9 | | 2 | | | 8 |
| | 1 | | 7 | 4 | | 9 | | 2 |
| | 2 | 4 | | | 3 | | | 7 |
| 6 | | | 2 | | | 8 | | |
| 8 | | | | 5 | 7 | 6 | 2 | |
| | 9 | | | | 6 | 5 | | |
| | | | | | 9 | 4 | 8 | |
| 1 | 8 | | 5 | | 4 | 2 | | |

**Sudoku-2**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 2 | 7 | | | | | |
| 1 | | | | | 2 | | 8 | |
| | | 9 | | 8 | 6 | 5 | 4 | 2 |
| | 2 | | 3 | | 7 | 6 | 9 | 4 |
| | | 4 | | | 5 | | | |
| | 9 | 7 | | 2 | | | | 5 |
| | 5 | | 4 | | | | | |
| | 6 | 1 | 2 | | | 9 | | 8 |
| 2 | | | | 6 | 8 | | | 1 |

Figura 7

Con objeto de automatizar el ejercicio, podemos realizar una plantilla en la que figuren las celdas a ocultar. Estas celdas las seleccionaremos mediante un sorteo aleatorio.



Superponiendo la plantilla al primero de los sudokus anteriores resuelto obtenemos un ejercicio que podemos proponer para resolver por los alumnos.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 2 | 7 | | | | | |
| 1 | | | | | 2 | | 8 | |
| | | 9 | | 8 | 6 | 5 | | 2 |
| | 2 | | 3 | | | 6 | 9 | |
| 6 | | | | | 5 | 3 | | |
| | 9 | 7 | | 2 | | | | 5 |
| 9 | 5 | | 4 | 7 | | | | |
| | | 1 | 2 | | | 9 | 7 | 8 |
| 2 | | | | 6 | 8 | | | 1 |

Si disponemos de una colección de plantillas con distinto número de celdas ocultas, al aplicarlas a cada sudoku nos permitirá tener una colección de ejercicios con diferente nivel de dificultad.

## Conclusión

Estas actividades tuvieron una aceptación favorable por parte de los alumnos, sobre todo el método de resolución de los logicomios. En la encuesta de «satisfacción del cliente» presentada a final de curso, los alumnos no las valoraron con la máxima calificación, pero tampoco consideraron que debieran suprimirse. Les parecieron interesantes y que podían mantenerse. De las actividades realizadas en el taller, las que más les gustaron fueron las manipulativas (construcción de poliedros…) y las tareas de trabajo en equipo (medida del centro…). Lo que menos les gustaba era que no se pusiera nota a los ejercicios, hasta el punto de que si una actividad no se iba a puntuar, su interés por ella era menor.

En general cuando resolvían un ejercicio, aumentaba su autoestima. Hubo un alumno que en Matemáticas no iba bien, pero en cambio en Taller estaba muy contento e integrado siendo un buen resolutor de problemas, por el contrario otro alumno destacado en Matemáticas, no se adaptó a la forma de trabajar en Taller, fundamentalmente porque no teníamos un libro de texto.

Para mí como profesor, el incluir estas actividades fue positivo ya que me permitió ser el diseñador de ellas y no un mero amanuense.

## Referencias bibliográficas

GALLEGO-DÍAZ, J. (1965), *Nuevos problemas de matemáticas*, Editorial Norte Sur, Madrid.

VORDERMAN, C. (2005), *Sudoku*, Ebury Press, London.

<http://zugarto.com/lRevistas.php?IdFamilia=7&IdRevista=29>.

<http://espejo-ludico.blogspot.com/2020/03/todas-las-revistas-cacumen.html>.

José de Francisco Estaire
IES Andrés Laguna
<j_d_francisco@yahoo.es>

# El Buscaminas, aplicación lúdica de las matemáticas

Diego Alonso Santamaría

SUMA+ núm. 98
pp. 35-44
Artículo recibido en *Suma* en abril de 2020 y aceptado en marzo de 2021

El Buscaminas, el juego de moda en los 90, una herramienta perfecta para trabajar el razonamiento matemático. Muchos desconocen las matemáticas que hay detrás del juego (no solo las estrategias sino en el propio diseño del tablero). ¿Sabías cuál era la finalidad oculta de estos juegos de Windows?
Se propone una experiencia en el aula basada en la metodología de aprendizaje basado en juegos (*Game-Based Learning*) donde abordar el Buscaminas a través de tres diferentes perspectivas: descubrimiento del juego, diseño del juego en papel, y reflexión a través de las preguntas de dificultad variada.

**Palabras clave:** Buscaminas, Razonamiento matemático, Aprendizaje Basado en Juegos, Experiencia en el aula, Secundaria.

**Minesweeper: fun application of mathematics** // The Minesweeper —one of the most popular games during the 90's—, the perfect tool to work on our mathematical reasoning.
Many are unaware of the math behind the game, not only strategy-wise but behind the board design itself. Did you know the hidden purpose of these Windows games? We are putting forward a *Game-Based Learning* experience in the classroom where the Minesweeper could be addressed from three different perspectives: unveiling the game, designing the game on paper and reflecting through questions of various difficulty levels.

**Keywords:** Minesweeper, Mathematical reasoning, Game-Based Learning, Learning experience, Secondary education.

Este artículo pretende mostrar una visión lúdica de las matemáticas y educar en la toma de decisiones basada en razonamientos matemáticos.

El aprendizaje basado en juegos (*Game-Based Learning*) es el uso de juegos como herramienta de apoyo al aprendizaje. Se propone el fomento del razonamiento matemático de la mano del interés que despiertan los videojuegos y, en concreto, uno de los clásicos de la juventud de cualquier docente: el Buscaminas.

El Buscaminas fue creado en 1989, hace más de tres décadas. Cualquier persona mayor de edad ha crecido con este juego.

Sin embargo, con la llegada de nuevas plataformas al mercado (Game Boy, Play Station…) y la evolución en la jugabilidad de los teléfonos móviles, este clásico de ordenador fue quedando relegado a un segundo plano. Tanto es así que, si uno entra a una clase de primaria o primeros cursos de la ESO y proyecta este

juego en la pantalla, solo unos pocos alumnos sabrán cómo se llama y casi ninguno sabrá jugarlo.

Es hora de redescubrir este juego ya que proporciona una gran oportunidad para desarrollar la competencia matemática desde un punto de vista lúdico, fomentar la convivencia con alumnos que enseñan a alumnos, y una situación perfecta para introducir el móvil en el aula (elemento motivador en las nuevas generaciones).

El Buscaminas (figura 1) es un juego de lógica matemática. El objetivo es marcar todas las casillas que no contienen minas o, dicho de otra forma, deducir aquellas que contienen minas a partir de razonamientos matemáticos. Para ello, el jugador debe servirse de la información aportada por las casillas clicadas, las cuales muestran el número de bombas que se sitúan en sus casillas circundantes.

Se creó como parte del paquete de entretenimiento de Windows como una estrategia para que el usuario se familiarizase con el movimiento del ratón y el uso de sus teclas:

— Botón izquierdo para seleccionar una casilla.
— Botón derecho para señalar una casilla con una bandera como recordatorio de que ahí puede esconderse una bomba.



Figura 1. El Buscaminas original

Junto a este juego, hubo otros igual de populares que lo acompañaban, cada uno con su propio objetivo educativo dirigido al público de la época, usuarios completamente vírgenes en cuanto al manejo del ratón y el teclado:

— El Solitario consistía en arrastrar cartas de un lado para otro hasta completar el mazo. Sin saberlo, estábamos aprendiendo a arrastrar y soltar utilizando el ratón, igual que en el sistema operativo deberíamos arrastrar y soltar ventanas y elementos para situarlas en el lugar deseado.
— El Corazones permitía utilizar una tecnología de conexión de red que pretendía enseñar al jugador que ya no trabajaba aislado, sino que estaba conectado a toda una red de usuarios.
— El Carta Blanca (o *FreeCell*) llegó de la mano de un *pack* de Windows a través del cual ejecutar aplicaciones de 32 bits aunque el sistema fuese de 16 bits. Si el juego funcionaba entonces significaba que el paquete funcionaba correctamente… ¡Era una especie de test interno de Microsoft!

## Matemáticas escondidas

El juego del Buscaminas posee cuatro niveles.

| Nivel | Tamaño del tablero | Número de minas |
|---|---|---|
| Principiante | $8 \times 8$ casillas | 10 minas |
| Intermedio | $16 \times 16$ casillas | 40 minas |
| Experto | $16 \times 30$ casillas | 99 minas |
| Personalizado | A elegir | A elegir |

El número de minas y el tamaño del tablero no es baladí, sino que responde a un razonamiento matemático.

Nivel principiante:

$$\frac{10 \text{ minas}}{8 \cdot 8 \text{ casillas}} = \frac{10 \text{ minas}}{64 \text{ casillas}} = 0{,}15625.$$

Nivel intermedio:

$$\frac{40 \text{ minas}}{16 \cdot 16 \text{ casillas}} = \frac{40 \text{ minas}}{256 \text{ casillas}} = 0{,}15625.$$

Es decir, la probabilidad de clicar una casilla al azar y sea una mina es del 15,625 %. Sin embargo, en el nivel experto esta probabilidad aumenta.

Nivel experto:

$$\frac{99 \text{ minas}}{16 \cdot 30 \text{ casillas}} = \frac{99 \text{ minas}}{480 \text{ casillas}} = 0{,}20625.$$

Puede plantearse la siguiente actividad de ampliación:

> ¿Cuántas minas debería haber en el modo experto para que la dificultad fuera la misma que en los modos principiante e intermedio?

La respuesta es 75 minas.

## Primera sesión: descubriendo el juego

### COMIENZO DE LA ACTIVIDAD

Se dedican 10 minutos a esta parte de la sesión.

Abrimos el juego delante de los alumnos, haciendo uso del ordenador del aula y el proyector. Daremos las indicaciones mínimas ayudándonos de los alumnos que ya conocen el juego. Por último, jugaremos un par de partidas delante de los alumnos razonando en voz alta las selecciones de casillas que realice. Subrayaremos los razonamientos matemáticos que se utilizan.

### LOS ALUMNOS DESCUBREN EL JUEGO

Dejaremos jugar a los alumnos durante unos 10 minutos. Se recomienda la web <http://buscaminas-pro.com> aunque, tecleando «buscaminas» en Google, el mismo buscador posee su propia versión con una interfaz más infantil (figura 2).

La actividad puede desarrollarse en dos posibles lugares:

- Aula de informática: los alumnos se sitúan en parejas en cada ordenador para aprender los unos de los otros. Para la siguiente fase, deberemos formar simbólicamente grupos de 4 personas aunque permanezcan cada uno en su ordenador.
- La propia aula: se recomienda situar a los alumnos en grupos de 4. Es una ocasión perfecta para introducir el uso del móvil en el aula, gran elemento motivador para el alumnado.

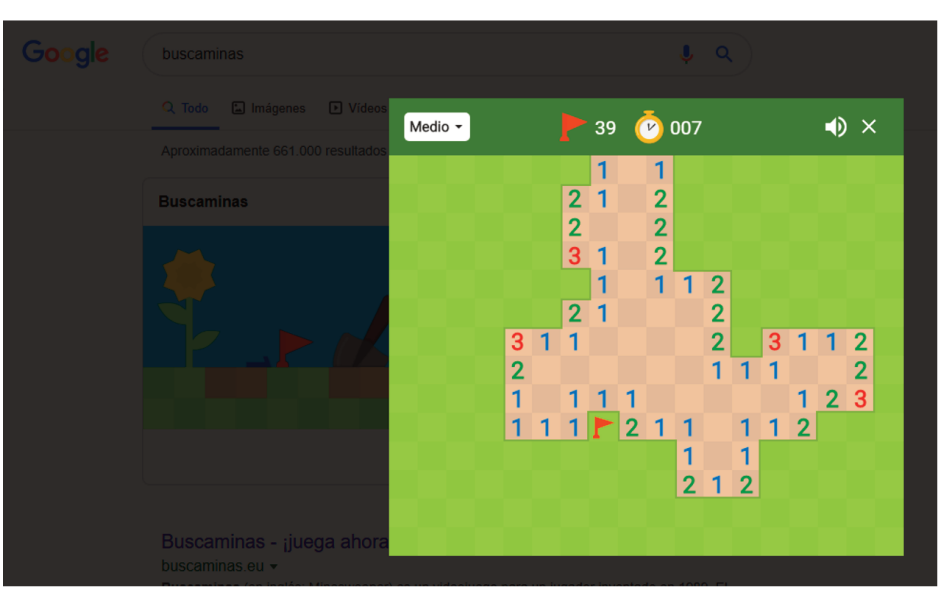



Figura 2. El Buscaminas de Google

### FASE COMPETITIVA: COMPETICIÓN GRUPAL

Su duración será de 15 minutos.

Los alumnos dispodrán de 10 minutos para lograr su mejor récord en el juego. Cuando logren su mejor marca deben hacer un pantallazo a su ordenador o móvil. El equipo ganador será el de menor tiempo realizado, siendo este la media de tiempos de cada uno de sus integrantes.

La ayuda que se prestan los alumnos, al tener que enseñarse mutuamente y descubrir entre todos las mejores técnicas de resolución por el bien del grupo, es uno de los principales objetivos de esta actividad, pues con ella estamos desarrollando la «competencia social y cívica».

Durante el desarrollo de la competición, el docente tendrá abierta una hoja de cálculo que irá actualizando en tiempo real con los mejores tiempos de cada grupo que podrá ser visionada en todo momento por los alumnos gracias al proyector.

Con esta medida se pretende ilustrar al alumnado, de manera indirecta, de los beneficios de esta herramienta informática al alcance de su mano. Se recomienda que el docente dedique los minutos previos a la competición a explicar cómo programa dicha hoja de cálculo, fomentando así el uso de las TIC y el desarrollo de la «competencia digital».

### FASE COMPETITIVA: COMPETICIÓN INDIVIDUAL

El tiempo restante de la sesión, unos 15 minutos, se dedica a que los alumnos intenten batir su propio récord, siendo los ganadores aquellos que marquen los 3 mejores tiempos.

El factor competitivo es un elemento motivador muy útil en determinados alumnos. No obstante, puede ser contraproducente para otros, aunque el aspecto lúdico del propio juego minimiza este aspecto negativo.

Al igual que en la fase anterior, los mejores tiempos de cada alumno se irán mostrando en el proyector gracias a la hoja de cálculo.

## Segunda sesión: diseñando nuestro Buscaminas

En la primera sesión, dedicada al descubrimiento de las reglas del juego y su iniciación en él, los alumnos intentaron adivinar dónde estaban las minas en función de la información aportada por el juego.

En esta sesión, el punto de vista desde el que abordamos el problema es totalmente distinto, y serán los propios alumnos quienes diseñen el juego, distribuyan las minas en las casillas y piensen la información que se mostrará, en función de que el usuario elija clicar en un sitio u otro. La sesión se distribuirá de la siguiente forma:



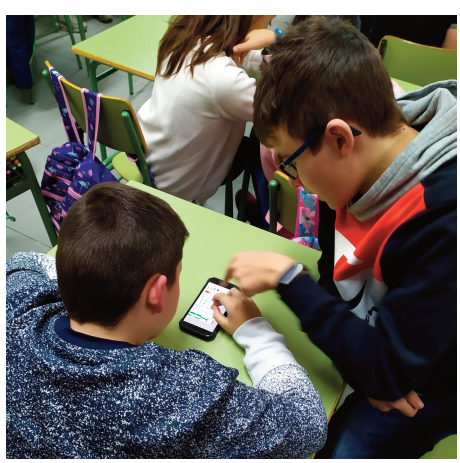


Figura 3. Fase competitiva

## REPARTIR TABLEROS ENTRE LOS ALUMNOS

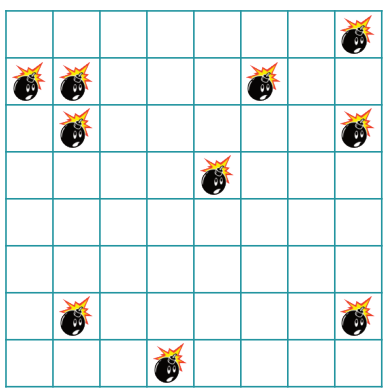
Situaremos a los alumnos en parejas.

Se reparte a cada alumno una hoja con cuadrículas de $8 \times 8$ en blanco (se recomienda al menos que la hoja contenga dos o más cuadrículas), la cual servirá de tablero para los alumnos (si se prefiere, cualquier hoja cuadriculada puede servir si se quiere evitar el gasto de papel).

En este momento se recuerda a los alumnos que no deben mostrar su trabajo a los demás, manteniéndolo en secreto, pues haremos una competición a partir de sus diseños.

## SITUAR LAS MINAS

Los alumnos deben repartir 10 minas (  ) en las casillas que deseen:

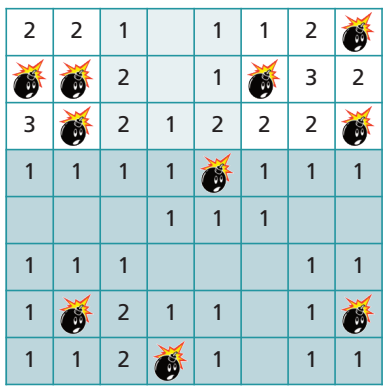


## RELLENAR LOS NÚMEROS

El alumnado debe completar su tablero con los números que se mostrarían si el usuario pulsase una casilla determinada:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 1 | | 1 | 1 | 2 | 💣 |
| 💣 | 💣 | 2 | | 1 | 💣 | 3 | 2 |
| 3 | 💣 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 💣 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 💣 | 1 | 1 | 1 |
| | | | 1 | 1 | 1 | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | 1 | 1 |
| 1 | 💣 | 2 | 1 | 1 | | 1 | 💣 |
| 1 | 1 | 2 | 💣 | 1 | | 1 | 1 |

Hay casillas que no tocan ninguna mina. Si el usuario selecciona dicha casilla, el juego debe mostrarla inmediatamente. Por tanto, coloreamos aquellos grupos de casillas que se mostrarían de forma inmediata si el usuario clicase una casilla vacía (en caso de que una casilla se muestre en varios casos, la pintaremos de esos colores):



## COMIENZA LA COMPETICIÓN

Los alumnos se disponen en parejas. Uno tomará el rol de jugador y otro el de *máster* o máquina:

— El jugador posee un tablero en blanco que irá rellenando con sus selecciones (clics) y la información que le vaya aportando el máster.
— El máster tendrá su tablero creado y, mirándolo sin que nadie lo vea, dará la información al jugador en función de sus selecciones.

El jugador dispondrá de dos intentos:

— Si lo resuelve a la primera, recibe 3 puntos.
— Si lo resuelve habiendo explotado una bomba, recibe 1 punto.
— Si no consigue resolverlo, el máster recibe 3 puntos. En tal caso, el jugador debe pedir al máster la solución y, si esta está mal, el máster no recibirá ningún punto y el jugador recibirá 5 puntos.

La duración para cada resolución será de 90 segundos. Pasado el tiempo, los roles se invierten y se juegan otros 90 segundos.

Por último, se comunican los resultados al docente, quien los apuntará en una hoja de cálculo que será visible a través del proyector. (Aquel máster con el tablero mal debe rehacerlo rápidamente.)

A continuación, se cambian las parejas y continúa la competición.

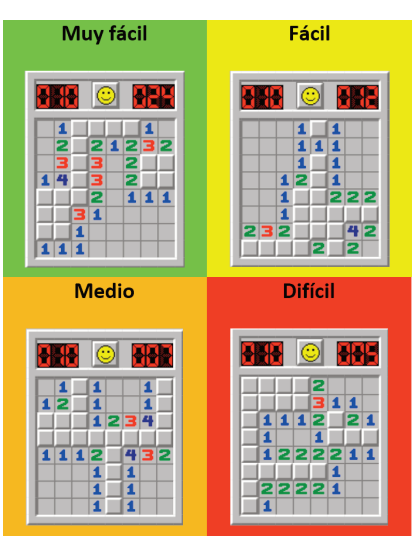
Esta sesión posee gran importancia educativa, ya que es un ejemplo de cómo abordar un problema desde diversos enfoques para obtener una visión completa de la situación. En este caso, el trabajo realizado en esta segunda sesión nos servirá de ayuda de cara a la siguiente sesión, en la cual programaremos el juego en la hoja de cálculo.

## Tercera sesión: reflexiones de un buen TEDAX

### AMPLIACIÓN DE LA ACTIVIDAD

Se propone que los alumnos entren a formar parte de los TEDAX (Técnico Especialista en Desactivación de Artefactos Explosivos), una de las unidades de especialistas más peligrosas del cuerpo de la policía. Para ello, se presenta la siguiente batería de preguntas para casa, fomentando así su reflexión en el juego, la búsqueda de estrategias ganadoras y una iniciación a la programación:

Con los datos dados, ¿eres capaz de resolver este Buscaminas? (Cuidado, alguno no se puede resolver).



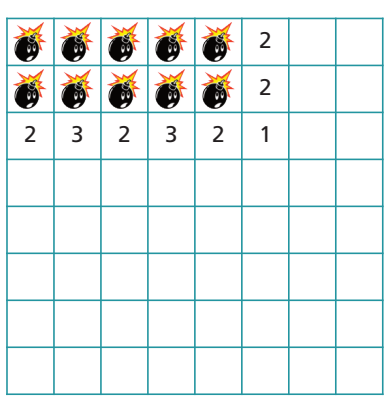

La solución sería:

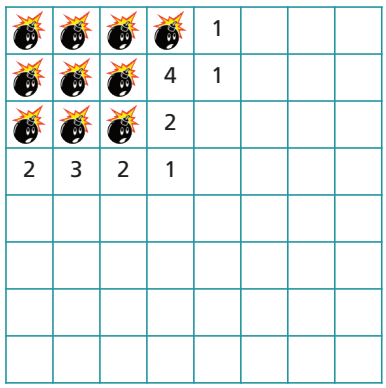


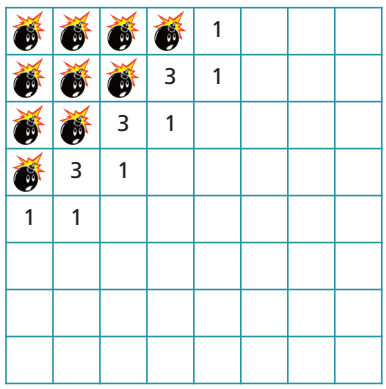

Si descubrieses todas las casillas del tablero y sumases todos los números que aparecen en él, ¿cómo deberían situarse las bombas para que la suma fuese lo más pequeña posible?, ¿cuál sería dicha suma?

Cada mina afecta, como mucho, a 8 marcadores, por lo que cada mina aumentará esa suma un máximo de 8 puntos. No obstante, hay que tener en cuenta que aquellas minas que se encuentran en los laterales del tablero afectan a menos casillas. De entre ellas, las esquinas son las que menos casillas adyacentes poseen. Además, si dos minas son adyacentes, dichas minas no suman a las casillas en las que está la otra.

Con todo ello, las soluciones son las que aparecen a continuación. Las demás soluciones posibles son situaciones simétricas a estas:

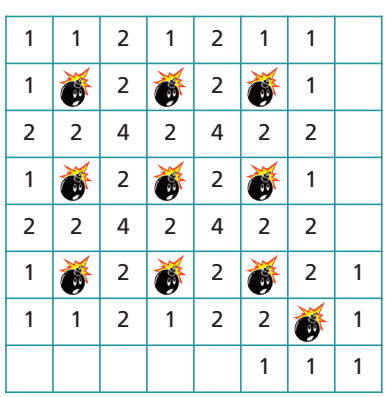





Si descubrieses todas las casillas del tablero y sumases todos los números que aparecen en él, ¿cómo deberían situarse las bombas para que la suma fuese lo más grande posible?, ¿cuál sería dicha suma?

Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que hemos hecho en la cuestión anterior, la solución es la que vemos a continuación. Las demás soluciones posibles son situaciones simétricas a esta:




Si observas a una persona adulta jugar al Buscaminas te darás cuenta que siempre comienza seleccionando una de las esquinas. ¿Por qué crees que sigue esta estrategia? Utiliza términos probabilísticos para dar tu explicación. (Tal vez sea recomendable que pruebes esta estrategia varias veces a ver qué sucede).

El tablero del Buscaminas posee tres tipos de casillas:

— Centrales: rodeadas por otras 8 casillas.
— Laterales: rodeadas por otras 5 casillas.
— En la esquina: rodeadas por otras 3 casillas.

Por tanto, la probabilidad de que al comenzar el juego seleccionemos una casilla que no es una mina y que tampoco tiene minas a su alrededor (con lo que parte del tablero se mostrará de forma automática) será mayor si comenzamos por una casilla de la esquina. Calculemos la probabilidad de que no haya ninguna mina en sus casillas adyacentes.

Clicando primero en una casilla central:

$$\frac{53}{63}\cdot\frac{52}{62}\cdot\frac{51}{61}\cdot\frac{50}{60}\cdot\frac{49}{59}\cdot\frac{48}{58}\cdot\frac{47}{57}\cdot\frac{46}{56}=0{,}229.$$

Clicando primero en una casilla lateral:

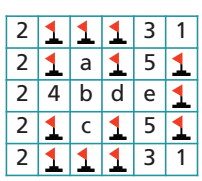
$$\frac{53}{63}\cdot\frac{52}{62}\cdot\frac{51}{61}\cdot\frac{50}{60}\cdot\frac{49}{59}=0{,}408.$$

Clicando primero en una casilla en la esquina:

$$\frac{53}{63}\cdot\frac{52}{62}\cdot\frac{51}{61}=0{,}590.$$

Es decir, eligiendo nuestra primera selección una esquina, ¡en más de la mitad de las partidas se descubrirá parte del tablero!

En la figura adjunta, ¿qué probabilidad posee cada una de las casillas *a, b, c, d* y e de contener una mina?




La probabilidad de *a, b* y *c* es 2/3, mientras que la de *d* y *e* es 1/2.

El ejemplo sobre el que hemos preguntado en la cuestión anterior fue tomado de la Wikipedia (figura 4). En él, no solo se expone la solución, sino que además se añade el razonamiento matemático mediante el que decidir cuál es la casilla más conveniente de seleccionar para resolver el juego. (¡Razonamiento matemático aplicado a la toma de decisiones!) ¿Entiendes el razonamiento? Explícalo con tus palabras utilizando un lenguaje probabilístico.

El razonamiento sería:

— Si seleccionamos *a* (igual caso para *c*), la probabilidad de que no haya una mina es 1/3. Si no hay mina, entonces sabemos que *b* y *c* contienen mina (respectivamente *a* y *b*). Además, en la casilla solo pueden aparecer dos valores: si aparece el número 6 significa que en *d* no hay mina y en *e* sí, mientras que si aparece el 7 será el caso contrario. En conclusión, la posibilidad de resolverlo es de 1/3.

— Si seleccionamos *b*, la probabilidad de que no haya una mina es 1/3. Si no hay mina, entonces sabemos que *a* y *c* contienen mina. Además, en la casilla solo pueden aparecer dos valores: si aparece el número 6 significa que en *d* no hay mina y en *e* sí, mientras que si aparece el 7 será el caso contrario. En conclusión, la posibilidad de resolverlo es de 1/3.

— Si elegimos *d,* la probabilidad de que no haya una mina es 1/2. Si no hay mina, entonces sabemos que *e* contiene una mina. Además, en la casilla solo puede aparecer el valor 5, lo cual no nos da información sobre dos bombas que faltan por descubrir en las casillas *a*, *b* o *c*. Por tanto, en un segundo paso habrá que elegir una de dichas casillas, las cuales tienen 1/3 de posibilidades de no ocultar una mina, como ya dijimos.
En conclusión, la posibilidad de resolverlo es $(1/3) \cdot (1/2) = 1/6$.

— Si elegimos *e*, la probabilidad de que no haya una mina es 1/2. Si no hay mina, entonces sabemos que *d* contiene una mina. Además, en la casilla solo puede aparecer el valor 6, lo cual no nos da información sobre dos bombas que faltan por descubrir en las casillas *a*, *b* o *c*. Por tanto, en un segundo paso habrá que elegir una de dichas casillas, las cuales tienen 1/3 de posibilidades de no ocultar una mina, como ya dijimos. En conclusión, la posibilidad de resolverlo es $(1/3) \cdot (1/2) = 1/6$.

**Las probabilidades de descubrir una mina no son suficientes**

Si por "juego perfecto" se entiende encontrar una estrategia que asegure la mejor probabilidad de resolver una partida cualquiera, entonces se requieren más cosas que limitarse a elegir los cuadrados que ofrezcan la menor probabilidad de mina. Examinemos la siguiente situación:




(Como en el ejemplo anterior, representa una mina, y los números son los números estándar del Buscaminas; a, b, c, d y e son las posiciones desconocidas.)

La probabilidad de descubrir una mina en a, b o c es de 2/3, y la de descubrir una mina en d o e es de 1/2; esto se puede comprobar computando las 6 posibilidades de colocar minas en a+b+c+d+e. Sin embargo, destapar d o e no proporciona ninguna información útil: si no se descubre una mina aparecerá un 6 en e o un 5 en d. En el juego conjunto, d o e permite ganar la partida en sólo 1 de los 6 casos posibles. Sin embargo, al destapar a, b o c, si no se descubre una mina la información permitirá saber si hay una mina en d o no, y en el juego conjunto se puede ganar la partida en 2 de los 6 casos posibles. Así que jugar a, b o c, aunque a corto plazo sea más arriesgado, acaba siendo la mejor jugada.

Figura 4. Wikipedia, <https://es.wikipedia.org/wiki/Buscaminas>

En los cálculos no se ha tenido en cuenta que en la primera selección que hagamos explote una mina. La razón es que los propios desarrolladores del juego eliminaron esta posibilidad por un motivo principal: evitar al usuario la desesperación que produce esta situación. Con ello, y prácticamente por casualidad, lo que consiguieron fue aumentar la dependencia de un juego ya de por sí adictivo.

Por último:

> Diseña un tablero de Buscaminas en una hoja de cálculo, en el que el *máster* seleccione las casillas donde quiera situar las minas y el propio programa indique directamente el número del resto de casillas. ¿Qué fórmulas de la hoja de cálculo has utilizado?

## Reflexiones finales tras la experiencia

Durante esta experiencia, el trabajo grupal resultó vital, ya que inicialmente algunos estudiantes no comprendían el juego o rechazaban el aspecto competitivo inherente a todo juego.

En cuanto al desarrollo del razonamiento matemático, resultó muy valioso el planteamiento del juego desde diversos frentes (descubrimiento del juego *online*, diseño del juego en papel y reflexión del funcionamiento a través de las preguntas de dificultad y variada (las cuales podríamos categorizar en actividades iniciales, ejercicios de ensayo-error y ejercicios de aplicación de la probabilidad).

Como culmen de la actividad, el profesor de Informática iba a enseñarles a programar un Buscaminas en la hoja de cálculo, en lo que iba a ser su inicio a los lenguajes de programación. Además, dada la buena aceptación de los alumnos a este juego, se iba a desarrollar un torneo de Buscaminas en la Semana Cultural del centro abierta a todos los estudiantes. Lamentablemente, ambas iniciativas no pudieron llevarse a cabo debido a la cuarentena impuesta a causa del coronavirus…, el próximo año tenemos una cita pendiente.

| | |
|---|---|
| *Situación en el temario* | Unidad de «Números enteros» o de «Probabilidad», aunque se recomienda utilizar en una tutoría como una actividad grupal o como competición interna en el instituto. |
| *Destinatarios* | Desde 3.º ESO a 2.º Bachillerato. |
| *Duración* | 2 sesiones o como competición en varios recreos. |
| *Objetivos* | Aplicar el razonamiento matemático a la toma de decisiones.<br>Conocer los conceptos básicos de la probabilidad.<br>Conocer el aspecto lúdico de las matemáticas.<br>Trabajar la convivencia dentro del aula. |
| *Contenidos didácticos* | Aplicación del razonamiento matemático a la toma de decisiones.<br>Dominio de la regla de Laplace.<br>Manejo de la hoja de cálculo. |
| *Competencias* | Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).<br>Competencia digital (CD).<br>Aprender a aprender (AA).<br>Competencia social y cívica (CSC). |
| *Metodología* | Actividad de descubrimiento. |
| *Recursos* | Ordenadores con internet, hoja de cálculo, proyector y teléfonos móviles. |
| *Relación con otras materias* | Informática y Tecnología. |

Tabla 1. Resumen de la actividad lúdica y de descubrimiento

## Referencias bibliográficas

HUNT, J. (2015), «The True Purpose of Microsoft Solitaire, Minesweeper, and FreeCell», *Mental Floss*, recuperado el 14 de agosto de 2015, de: <https://web.archive.org/web/20151223192210/>, <http://mentalfloss.com/uk/technology/32106/the-true-purpose-of-solitaire-minesweeper-hearts-and-freecell>.

PASTOR, J. (2018), «El solitario y el buscaminas tenían una misión secreta en Windows», *Xakata,* recuperado el 12 de diciembre de 2018, de: <https://www.xataka.com/videojuegos/el-solitario-y-el-buscaminas-tenian-una-mision-secreta-en-windows>.

Diego Alonso Santamaría
IES Virgen de la Calle (Palencia)
<diego.alosan@educa.jcyl.es>

seccione S

MUJERES MATEMÁTICAS:
ROMPIENDO MOLDES

# Las hermanas Bowman: Julia Robinson y Constance Reid

Marta Macho Stadler

SUMA+ núm. 98
pp. 47-53
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

Constance y Julia Bowman nacieron en San Louis (Misuri, EE. UU.) con casi dos años de diferencia. Eran hijas de Ralph Bowman y Helen (Hall) Bowman. En 1921 falleció su madre y su padre se casó al poco tiempo, trasladándose la familia a San Diego (California). En 1924 nació su hermana Billie; Julia enfermó de escarlatina y tuvo que guardar una larga cuarentena lejos de su familia. Este problema temprano de salud —que se complicó además con unas fiebres reumáticas— le impidió compartir más tiempo con sus hermanas y le provocó problemas cardíacos durante toda su vida. Pero Constance y Julia permanecieron siempre unidas, en particular, gracias a las matemáticas.



Figura 1. Julia y Constance Bowman
Fuente: Alexanderson (2011)

## Julia Robinson (1919-1985), la matemática cautivada por el décimo problema de Hilbert

> What I really am is a mathematician. Rather than being remembered as the first woman this or that, I would prefer to be remembered, as a mathematician should, simply for the theorems I have proved and the problems I have solved.[1]
>
> Julia Robinson (O'Connor y Robertson)

Julia ingresó en 1936 en la Universidad Estatal de San Diego; era la única mujer siguiendo algunas materias impartidas, como las matemáticas o la física. En 1939, animada por algunos de sus profesores, se trasladó a la Universidad de California en Berkeley donde empezó a disfrutar realmente de las matemáticas.

En 1941 se casó con Raphael Robinson[2], su profesor de teoría de los números durante su primer año de carrera. En el momento de su matrimonio Julia era profesora asistente en Berkeley y tuvo que abandonar su puesto al prohibir la institución que dos cónyuges trabajaran en el mismo departamento. No le quedó más remedio que quedarse en su casa, lo que se esperaba de ella y de tantas mujeres en aquella época; aunque consiguió contratos esporádicos en algún otro departamento de Berkeley y en diferentes instituciones. Al quedarse embarazada, sus problemas de corazón empeoraron, perdió el niño que esperaba y le diagnosticaron poco tiempo de vida. El desánimo la llevó a refugiarse en las matemáticas.

A finales de 1942, Julia asistió a un seminario impartido por Alfred Tarski[3] en el que el matemático planteó un problema que ella le llevó resuelto dos días más tarde. Tarski quedó impresionado y le propuso realizar la tesis doctoral bajo su dirección. Así, en 1948, Julia presentó la memoria titulada *Definability and Decision Problems in Arithmetic*[4]. En ella demostraba que los números enteros podían definirse aritméticamente en términos de números racionales mediante cierto tipo de operaciones. Deducía de este modo que la aritmética de los racionales es adecuada para la formulación de todos los problemas de la teoría elemental de números.

Julia se interesó después por el décimo problema de Hilbert[5]:

> ¿Existe un método que permita determinar, en un número finito de pasos, si una ecuación diofántica es resoluble en números enteros?

Es decir, David Hilbert[6] se preguntaba si había algún procedimiento universal para, dada una ecuación diofántica[7] arbitraria, responder a la existencia de soluciones. Algunas de estas ecuaciones tienen solución y otras no. El décimo problema de Hilbert preguntaba si había algún procedimiento universal para, dada una ecuación diofántica cualquiera, responder simplemente con un sí o un no a la existencia de soluciones.

En 1961, Julia Robinson publicó un artículo junto a Martin Davis[8] y Hilary Putnam[9] —«The decision problem for exponential diophantine equations»[10]— en el que introducían la que denominaban *hipótesis de Robinson*. Consistía en encontrar un cierto tipo de relación diofántica que implicaba necesariamente la no existencia del método aludido por Hilbert.

Julia siguió buscando una solución al décimo problema de Hilbert hasta que, en 1970, el matemático Yuri Matiyasevich[11] encontró una relación del tipo indicado en la hipótesis de Robinson usando los términos de la sucesión de Fibonacci[12]. El teorema de Matiyasevich[13] confirmaba la irresolubilidad[14] del décimo problema de Hilbert. Con los mismos intereses científicos, Julia y Yuri colaboraron posteriormente y llegaron a publicar algunos artículos.

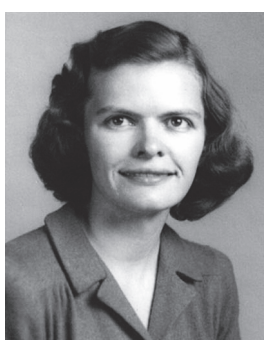
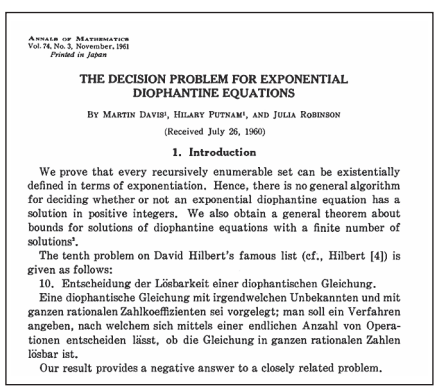


Figura 2. Julia Robinson
Fuente: Feferman (1994)



ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 74, No. 3, November, 1961
*Printed in Japan*

**THE DECISION PROBLEM FOR EXPONENTIAL DIOPHANTINE EQUATIONS**

BY MARTIN DAVIS[1], HILARY PUTNAM[1], AND JULIA ROBINSON

(Received July 26, 1960)

**1. Introduction**

We prove that every recursively enumerable set can be existentially defined in terms of exponentiation. Hence, there is no general algorithm for deciding whether or not an exponential diophantine equation has a solution in positive integers. We also obtain a general theorem about bounds for solutions of diophantine equations with a finite number of solutions[2].

The tenth problem on David Hilbert's famous list (cf., Hilbert [4]) is given as follows:

10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung.

Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten sei vorgelegt; man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden lässt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.

Our result provides a negative answer to a closely related problem.

Figura 3. Introducción al artículo de Davis, Putnam y Robinson
<https://www.jstor.org/stable/1970289>

Robinson realizó también una importante aportación a la teoría de juegos[15], demostrando que la dinámica de un jugador ficticio converge hacia un equilibrio de Nash[16] en una estrategia mixta en el marco de un juego de suma cero[17] con dos jugadores.

En 1976 Julia fue elegida miembro de la división de matemáticas de la National Academy of Science[18]: fue la primera mujer en obtener este cargo. También fue la primera presidenta de la American Mathematical Society[19] entre 1982 y 1984.

A pesar de la cita de Julia Robinson que abre este artículo, creo que es importante destacar estos logros de Julia —y de todas las mujeres dedicadas a la ciencia gracias a ella— que, por supuesto, no restan ningún valor a la gran investigadora que fue.

Julia Robinson murió de leucemia a los 65 años, el 30 de julio de 1985. Su frágil salud no le impidió seguir adelante:

> Por ser tan cabezota, he conseguido lo que he hecho en las matemáticas.
>
> Julia Robinson (Alonso y otros, 1999)

## Constance Reid (1918-2010), la escritora que «retrató» a Hilbert y a su hermana Julia… entre otros matemáticos

> No one today has written about mathematics with more grace, knowledge, skill and clarity than Constance Reid.
>
> Martin Gardner[20]

Constance se licenció en 1938 en la Universidad Estatal de San Diego —obtuvo un *Bachelor of Arts*— y conoció a su futuro marido, Neil D. Reid, mientras estudiaba un máster en educación en la Universidad de California en Berkeley. Se casaron en 1950 y tuvieron dos hijos.



Figura 4. Constance Reid (2001)
Fuente: George Csicsery (Slotnik, 2010)

Trabajó como profesora de inglés y periodismo entre 1939 y 1950 y, tras su matrimonio, como escritora independiente.

En 1952 escribió su primer texto relacionado con las matemáticas; fue en la revista *Scientific American*: «Perfect Numbers». El artículo comienza de una manera realmente sugerente: «Six is such a number: it is the sum of all numbers that divide it except itself. In 2,000 years, 12 perfect[21] numbers were found; now a computer has discovered five more»[22].

¿Por qué un artículo sobre este tipo de números? Julia había hablado a su hermana de uno de los primeros usos exitosos de la computadora electrónica digital SWAC[23]: era un problema de teoría de los números en el que estaba trabajando su marido Raphael. El matemático había programado el test de primalidad de Lucas-Lehmer[24] para determinar cuándo $2^n-1$ es primo para todos los primos $n$ menores que 2 304. Así, descubrió cinco números primos de Mersenne[25], los números primos más grandes conocidos en ese momento: tenían 157, 183, 386, 664 y 687 dígitos respectivamente. Recordemos que si el número de Mersenne $2^n-1$ es primo, entonces $2^{n-1}(2^n-1)$ es un número perfecto par. Con esta información elaboró Constance su artículo.

Aunque la publicación de «Perfect Numbers» recibió alguna queja por parte de alguna persona que opi-

naba que este tipo de textos debía estar escrito por un matemático profesional, uno de los editores de *Scientific American* invitó a Constance a escribir un libro sobre números. Y lo hizo; fue *From Zero to Infinity: What Makes Numbers Interesting* (1955). Este texto fue editado en español por la editorial mexicana Libraria en 2008: *Del Cero al infinito. Por qué son interesantes los números*.

Para escribir su primera biografía, Constance se inspiró en un libro con breves reseñas de matemáticos relevantes —una treintena de hombres y solo una mujer: Sofia Kovalevskaya[26]—*: Men of Mathematics* (1937)[27] de Eric Temple Bell[28], que incluía anécdotas y detalles sobre la personalidad y el trabajo de sus protagonistas. Constance deseaba escribir un ensayo similar sobre matemáticos contemporáneos, pero quedó fascinada por David Hilbert y escribió su biografía: *Hilbert*[29] (1970). En la contraportada del libro aparece esta reseña de Freeman Dyson[30]:

> [Hilbert] is woven out of three distinct themes. It presents a sensitive portrait of a great human being. It describes accurately and intelligibly on a nontechnical level the world of mathematical ideas in which Hilbert created his masterpieces. And it illuminates the background of German social history against which the drama of Hilbert's life played... Beyond this, it is a poem in praise of mathematics.[31]

Posteriormente, Reid escribió sobre otros matemáticos como Richard Courant[32] —*Courant in Göttingen and New York: The Story of an Improbable Mathematician* (1976)—, Jerzy Neyman[33] —*Neyman From Life* (1982)— o Eric Temple Bell —*The Search for E.T. Bell, Also Known as John Taine* (1993)—.

Aunque, sin duda, su biografía más personal fue la última, la dedicada a su hermana Julia y que escribió en primera persona: *Julia, a Life in Mathematics*[34] (1996).

En 1987, Reid recibió el George Polya Award —otorgado a artículos sobre la historia de las matemáticas— de la Mathematical Association of America (MAA)[35] por The Autobiography of Julia Robinson[36]. En 1996 recibió el Beckenbach Book Prize —otorgado a libros innovadores— de la MAA por su biografía de Bell. Y en 1998 le concedieron el JPBM Communications

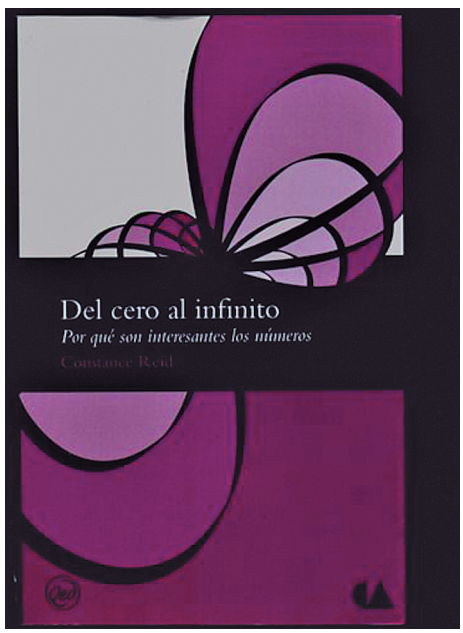



Figura 5

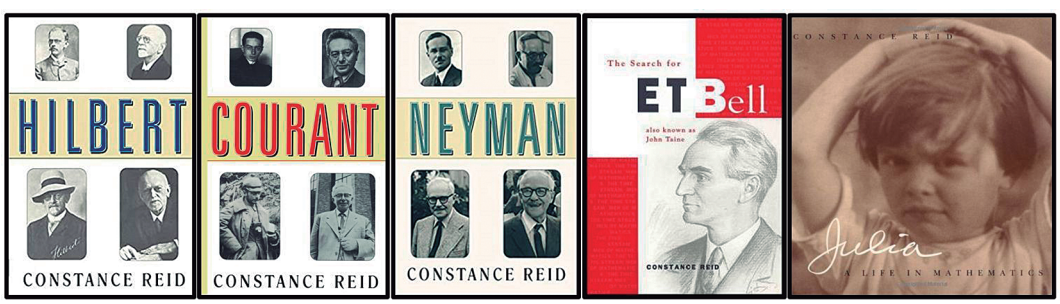



Figura 6: Algunas de las portadas de las biografías escritas por Constance Reid

Award de la American Mathematical Society por el conjunto de su trabajo dedicado a llevar información matemática precisa a un público no experto.

> She has a special talent for understanding mathematicians and their culture. She understands us. She is the Boswell for mathematics—a biographer who has made the mathematical life understandable both to the general public and to mathematicians themselves. Her work has enriched our entire profession
>
> John Ewing[37]

Constance Reid falleció el 14 de octubre de 2010, tras una larga enfermedad.

El matemático Arthur T. Benjamin[38] dedicaba a Constance Reid este poema[39], jugando con el nombre de la escritora, tan parecido al de «constante»… Esta vez no me atrevo a traducirlo, ya que hay algún juego de palabras que no soy capaz de transportar del inglés al castellano.

> *Mathematical Constance*
> (A Poem Dedicated to Constance Reid)
>
> I think that I shall never see
> A constant lovelier than e,
> Whose digits are too great too state,
> They're 2.71828…
> And e has such amazing features
> It's loved by all (but mostly teachers).
> With all of e's great properties
> Most integrals are done with… ease.
> Theorems are proved by fools like me
> But only Euler could make an e.
> I suppose, though, if I had to try
> To choose another constant, I
> Might offer i or phi or pi.
> But none of those would satisfy.
> Of all the constants I know well,
> There's only one that rings the Bell[40].
> Not pi, not i, nor even e.
> In fact, my Constance is a she.
> It's Constance Reid, I would not fool ya'
> With Books like *Hilbert*, *Courant*, and *Julia*.
> Of all the constants you will need,
> There's only one that you should Reid.

Como decíamos al principio, Constance y Julia permanecieron siempre unidas. Lo estuvieron como hermanas y como contribuidoras, cada una desde su formación, a la historia de las matemáticas.

## Referencias bibliográficas


Alexanderson, G. L. (1980), «An Interview with Constance Reid», *The Two-Year College Mathematics Journal,* n.º 11 (4), 226-238, <https://www.jstor.org/stable/3027201?seq=1#metadata_info_tab_contents>.

— (2011), «Remembering Constance Reid (1918–2010)», *Notices of the AMS*, n.º 58 (10), 1458-1459, <https://www.ams.org/notices/201110/rtx111001458p.pdf>.

Alonso, A., T. Bermúdez y A. Martinón (1999), «Julia Robinson: gran matemática, gran desconocida», *Números,* n.º 40, 29-36, <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/40/Articulo02.pdf>.

Bricker, J. (2000), «Julia Bowman Robinson», *Biographies of Women Mathematicians,* Agnes Scott College, <https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/robinson.htm>.

*Constance Reid*, Wikipedia [consultado el 20 de agosto de 2021], <https://en.wikipedia.org/wiki/Constance_Reid>.

Documental *Julia Robinson and Hilbert's Tenth Problem* (2020), <http://zalafilms.com/films/juliarobinson.html>.

Feferman, S. (1994), «Julia Bowman Robinson 1919–1985», *Bibliographical Memoir, National Academy of Sciences,* <http://www.nasonline.org/publications/biographical-memoirs/memoir-pdfs/robinson-julia.pdf>.

Macho, M. (2018), «Constance Reid, la escritora con "un talento especial para comprender a los matemáticos y su cultura"», *Mujeres con ciencia,* Vidas científicas, <https://mujeresconciencia.com/2018/08/16/julia-bowman-robinson-y-el-decimo-problema-de-hilbert/>.

— (2021), «Julia Bowman Robinson y el décimo problema de Hilbert», *Mujeres con ciencia,* Vidas científicas, <https://mujeresconciencia.com/2021/08/26/constance-reid-la-escritora-con-un-talento-especial-para-comprender-a-los-matematicos-y-su-cultura/>.

O'Connor, J. J., y E. F. Robertson (2002), «Julia Hall Bowman Robinson», *The MacTutor History of Mathematics archive,* <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Robinson_Julia/>.

PAREJA, D., «Constance Reid (1924-2010)», *Matemáticas y filosofía en el aula,* <http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/articulos/ConstanceReid.pdf>.

REID, C. (1996), «Being Julia Robinson's Sister», *Notices of the AMS,* n.º 43 (12), 1486-1492, <http://www.ams.org/notices/199612/reid.pdf>.

SLOTNIK, D. E. (2010), «Constance Reid, Biographer of Mathematicians, Dies at 92», *The New York Times,* 25 de octubre 2010, <https://www.nytimes.com/2010/10/26/books/26reid.html>.

WOOD, C. (2008), «Review of the film Julia Robinson and Hilbert's Tenth Problem», *Notices of the AMS*, n.º 55 (5), 573-575, <http://www.ams.org/notices/200805/tx080500573p.pdf>.

Marta Macho Stadler
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
<marta.macho@ehu.eus>

1 *Lo que realmente soy es una matemática. Más que ser recordada como la primera mujer en esto o en aquello, preferiría ser recordada como matemática, simplemente por los teoremas que he probado y los problemas que he resuelto.*

2 Raphael Mitchel Robinson (1911-1995) fue un matemático estadounidense que trabajó en lógica matemática, teoría de conjuntos, geometría, teoría de los números y combinatoria. Utilizó ordenadores tempranos para verificar algunos resultados sobre números primos. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Robinson_Raphael/>.

3 Alfred Tarski (1901-1983) fue un lógico, matemático y filósofo polaco. Hizo aportaciones relevantes en teoría de conjuntos, lógica polivalente, niveles de lenguaje y metalenguaje y conceptos semánticos. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tarski/>.

4 Se publicó posteriormente en: *The Journal of Symbolic Logic* (1949), n.º 14 (2) ,98-114.

5 Es uno de los conocidos como «23 problemas de Hilbert» publicados en 1900 por David Hilbert. El matemático presentó diez de ellos (1, 2, 6, 7, 8, 13, 16, 19, 21 y 22) durante la conferencia que dictó en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900 en París. La lista completa se publicó más adelante. Los problemas 3, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19 y 20 tienen una solución aceptada por consenso. Para los problemas 1, 2, 5, 9, 15, 18, 21 y 22 existe cierto debate sobre si la solución propuesta los resuelve realmente. Quedan sin resolver las cuestiones 8, 12, 16 y 23. Puede verse el listado completo en este enlace:<https://es.wikipedia.org/wiki/Problemas_de_Hilbert#Lista_de_Problemas>.

6 David Hilbert (1862-1943) fue un matemático alemán que desarrolló una gran variedad de ideas, como la teoría de invariantes, la axiomatización de la geometría y la noción de espacio de Hilbert, uno de los fundamentos del análisis funcional. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/>.

7 Una ecuación diofántica es una ecuación algebraica (del tipo $P(x)=0$ donde $P(x)$ es un polinomio no nulo ni constante, con coeficientes enteros) de la que se buscan soluciones enteras.

8 Martin Davis (1928) es un matemático estadounidense conocido por su trabajo relacionado con el décimo problema de Hilbert. Es coinventor del algoritmo de Davis-Putnam —para comprobar la satisfacibilidad (SAT, un problema de complejidad computacional) de las fórmulas de la lógica proposicional en forma normal conjuntiva (FNC, consiste en una conjunción de cláusulas)— y del algoritmo DPLL —algoritmo completo basado en la vuelta atrás que sirve para resolver el problema FNC-SAT—. También es conocido por diseñar las máquinas Post-Turing.

9 Hilary Putnam (1926-2016) fue un filósofo, matemático e informático teórico estadounidense. Realizó importantes aportaciones a la filosofía de la mente, la filosofía del lenguaje, la filosofía de la ciencia y el pragmatismo. Verificaba a conciencia sus propias teorías filosóficas, sometiéndolas a un severo análisis hasta encontrar sus puntos débiles. Por este motivo tenía fama de cambiar con frecuencia la postura que defendía.

10 «The decision problem for exponential diophantine equations», *Annals of Maths* (1961), n.º 74, 425-443. Puede verse una infografía sobre este resultado en la página *Theorem of the day* mantenida por el científico y escritor Robin Whitty, que publica cada día un teorema matemático —lema, ley, fórmula, identidad, etc.— que pretende ser asequible a un público variado: <https://www.theoremoftheday.org/LogicAndComputerScience/DPRM/TotDDPRM.pdf>.

11 Yuri Matiyasevich (1947) es un matemático ruso, muy conocido por su solución negativa del décimo problema de Hilbert presentada en su tesis doctoral.

12 La sucesión de Fibonacci comienza con los números 0 y 1 y, a partir de ellos, cada término se define de forma recurrente como la suma de los dos anteriores.

13 Este teorema dice que: «Todo conjunto computablemente enumerable es diofantino y viceversa». <https://en.wikipedia.org/wiki/Diophantine_set#Matiyasevich's_theorem>. Recordemos que un conjunto $S$ es computablemente enumerable si existe un algoritmo que enumera los elementos de $S$, es decir, el *output* es una lista de todos los elementos de $S$. Y un conjunto

es diofantino si existe un polinomio con coeficientes enteros que lo define.

14 En el artículo de Martin Davis, Hilary Putnam y Julia Robinson demostraban que bastaba con comprobar que todo conjunto computablemente enumerable era diofantino para probar la irresolubilidad del décimo problema de Hilbert.

15 La teoría de juegos usa modelos matemáticos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos. Se ha transformado en una herramienta esencial en teoría económica, ayudando a comprender mejor la conducta humana frente a la toma de decisiones.

16 El equilibrio de Nash es un concepto de solución para juegos con dos o más jugadores que asume que: 1) cada jugador conoce y adopta su mejor estrategia, y 2) todos los jugadores conocen las estrategias de los demás. De este modo, ningún jugador tiene ningún incentivo para modificar su estrategia.

17 En un juego de suma cero la ganancia o pérdida de un participante se equilibra exactamente con las pérdidas o ganancias de los otros jugadores.

18 Es una corporación estadounidense cuyos miembros aconsejan a la nación en ciencia, ingeniería y medicina.

19 Es una sociedad estadounidense dedicada a los intereses de la investigación y patrocinio de las matemáticas.

20 «Hasta ahora nadie ha escrito sobre matemáticas con más elegancia, conocimiento, habilidad y claridad que Constance Reid». Son palabras de Martin Gardner con motivo de la entrega del *JPBM Communications Award* a Constance Reid en 1998. <https://www.ams.org/notices/199805/comm-jpbm.pdf>.

21 Un número perfecto es un número entero positivo que es igual a la suma de sus divisores propios positivos.

22 «Seis es uno de esos números: es la suma de todos los números que lo dividen excepto él mismo. En 2000 años se han encontrado doce números perfectos; ahora un ordenador ha descubierto cinco más», en *Scientific American* (1953), n.º 188 (3), 84-87.

23 El SWAC (*Standards Western Automatic Computer*) fue una de las primeras computadoras electrónicas digitales, construida en 1950 por el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología de Estados Unidos, <https://es.wikipedia.org/wiki/SWAC>.

24 El test de Lucas-Lehmer sirve para determinar si un determinado número de Mersenne es primo. Fue desarrollado por el matemático Edouard Lucas (1842-1891) en 1878 y posteriormente mejorado por el matemático Derrick Henry Lehmer (1905-1991) en la década de 1930. <https://es.wikipedia.org/wiki/Test_de_Lucas-Lehmer>.

25 El $n$-ésimo número de Mersenne es un $2^n - 1$. Y se llama primo de Mersenne si, además, es primo.

26 Sofía Kovalévskaya (1850-1891) fue una matemática y escritora rusa. Realizó importantes contribuciones en análisis matemático, ecuaciones diferenciales parciales y mecánica. <https://mujeresconciencia.com/2017/12/06/sonia-kovalevskaya-1850-1891-2/>.

27 <https://es.wikipedia.org/wiki/Los_grandes_matemáticos>.

28 Eric Temple Bell (1883-1960) fue un matemático y escritor de ciencia ficción escocés-estadounidense. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bell/>.

29 <https://www.springer.com/gp/book/9780387946740>.

30 Freeman Dyson (1923-2020) fue un físico teórico y matemático británico-estadounidense. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dyson/>.

31 [Hilbert] entrelaza tres temas distintos. Presenta un emotivo retrato de un gran ser humano. Describe de forma precisa e inteligible, sin tecnicismos, el mundo de las ideas matemáticas en el que Hilbert creó sus obras maestras. E ilustra el trasfondo de la historia social alemana en el que se desarrolló el drama de la vida de Hilbert… Pero el libro es mucho más que una pieza de investigación histórica convencional. Más aún, es un poema en elogio a las matemáticas.

32 Richard Courant (1888-1972) fue un matemático alemán, discípulo de David Hilbert. Es muy conocido por su libro divulgativo (junto a Herbert Robbins) *¿Qué es la Matemática?* (publicado originalmente en inglés en 1941) que aún se sigue reimprimiendo. <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Courant/>.

33 Jerzy Neyman (1894-1981) fue un matemático y estadístico polaco. Introdujo el concepto moderno de intervalo de confianza y concibió el testeo de hipótesis nula (junto a Egon Pearson). <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Neyman/>.

34 <https://bookstore.ams.org/cdn-1607421470593/spec-18/>.

35 Es una sociedad profesional dedicada a los intereses de la investigación y patrocinio de las matemáticas.

36 Se publicó en *The College Mathematics Journal* (1986), n.º 17 (1), 3-21. Puede leerse completo en el siguiente enlace: <https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Polya/07468342.di020720.02p00912.pdf>.

37 «Tiene un talento especial para comprender a los matemáticos y su cultura. Ella nos comprende. Ella es la Boswell de las matemáticas, una biógrafa que ha conseguido que la vida matemática sea comprensible tanto para el público en general como para los mismos matemáticos. Su trabajo ha enriquecido nuestra profesión». Palabras de John Ewing con motivo de la entrega del JPBM Communications Award a Constance Reid en 1998. <https://www.ams.org/notices/199805/comm-jpbm.pdf>.

38 Arthur T. Benjamin (1961) es un matemático estadounidense especialista en combinatoria. Es conocido por su actividad divulgativa en *Matemagia*. <https://math.hmc.edu/benjamin/>.

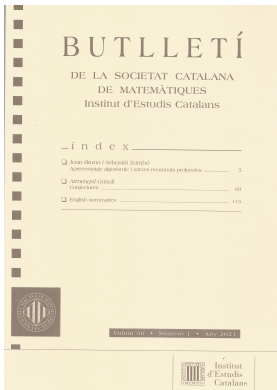
39 *The American Mathematical Monthly* (2001), n.º 108 (5), 423. <https://scholarship.claremont.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1129&context=hmc_fac_pub>.

40 Se refiere a Eric Temple Bell, juega con «bell» que significa campana en inglés.

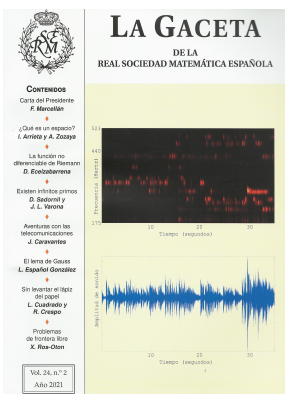
# Publicaciones recibidas




Problemes Olímpics
*SEMCV*
*«Al-Kharizmi»*
N.º 111, octubre 2021
València
ISSN: 1578-1771



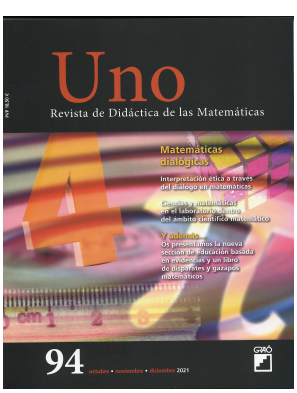

butlletí de la societat catalana de matemàtiques
*Institut d'Estudis Catalans*
Vol. 36, n.º 1, 2021
Barcelona
ISSN: 0214-316-X



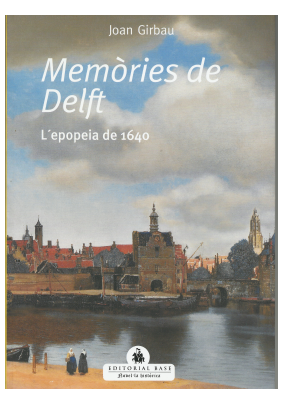

La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española
*RSME*
Vol. 24, n.º 2, 2021
Madrid
ISSN: 1138-8927




Investigación y Ciencia
*Prensa científica, S.A.*
N.º 543, diciembre 2021
Barcelona
ISSN: 022110136X




Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas
*Graó Editorial*
N.º 94, octubre, noviembre, diciembre, 2021
Barcelona
ISSN: 1133-9853




Memòries de Delft. L'epopeia de 1640
*Joan Girbau*
Editorial Base
2021
Barcelona
ISBN: 978-84-18434-49-5

# Lo importante es participar

MMACA

SUMA+ núm. 98
pp. 55-58
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

¿Os habéis planteado alguna vez que determinar la persona ganadora puede ser un verdadero problema matemático?

Nuestro compañero Toni Serrallonga sí y, en este año de olimpiadas, nos ha propuesto la siguiente situación para reflexionar y calcular un buen rato, puesto que lo realmente importante es participar.

Un grupo de diez chicas y chicos, amantes del deporte, han realizado durante 4 días una prueba diaria. Han medido el tiempo que ha necesitado cada persona para terminarla. El quinto día, el de descanso, se plantean quién podría ser la ganadora del total de las cuatro pruebas.

—Albert: Entonces, ¿qué hacemos ahora? Hemos hecho cuatro pruebas. Tenemos los tiempos que cada uno de nosotros hemos empleado en cada una de ellas, pero ¿cómo decidir quién gana?

—Blanca: Empecemos por lo más simple: ¿Quién tiene los resultados?

Dídac, muy cuidadoso en conservar todos los datos, les muestra los resultados (tabla 1):

| Nombre | 1.ª prueba (mm:ss) | 2.ª prueba (h:mm:ss) | 3.ª prueba (mm:ss) | 4.ª prueba (h:mm:ss) |
|---|---|---|---|---|
| Albert | 26:00 | 1:16:00 | 38:00 | 1:33:00 |
| Blanca | 27:00 | 1:02:00 | 34:00 | 1:28:00 |
| Carla | 15:00 | 1:12:00 | 37:00 | 1:22:00 |
| Dídac | 10:00 | 1:14:00 | 40:00 | 1:30:00 |
| Ester | 14:00 | 1:13:00 | 33:00 | 1:27:00 |
| Frederic | 16:00 | 1:01:00 | 41:00 | 1:36:00 |
| Gina | 29:00 | 1:06:00 | 30:00 | 1:24:00 |
| Hug | 32:00 | 1:19:00 | 43:00 | 1:29:00 |
| Ignasi | 30:00 | 1:03:00 | 42:00 | 1:34:00 |
| Joana | 17:00 | 1:04:00 | 35:00 | 1:28:00 |

Tabla 1

—Ester: El caso no es sencillo. Cada día ha ganado una persona distinta. El primer día ganó Dídac, el segundo Frederic, el tercero Gina y el último Carla.

Albert, que es un gran ciclista:

—Albert: Pues yo propongo el sistema que utilizan en las carreras ciclistas, como el Tour o La Vuelta. Sumar todos los tiempos de cada etapa, y gana el que invierte menos tiempo

Carla, que siempre tiene consigo su tablet, la enciende y hace los cálculos.

—Carla: Vamos a ver, si no estoy equivocada la clasificación quedaría así (tabla 2):

Blanca, que entrena atletismo, propone utilizar el siguiente criterio: Clasificar cada carrera, asignando a cada persona tantos puntos como la posición en la que haya quedado y al final sumar todas las puntuaciones, y gana el que tiene menos puntos.

—Blanca: Así es como se hizo, de forma inversa, en los campeonatos de atletismo por naciones del verano del 2021.

Ignasi, entusiasta de la vela:

—Ignasi: También se ha utilizado en las pruebas de vela en los Juegos Olímpicos de Tokio.

Carla rehace los cálculos y el resultado es (tabla 3).

| Nombre | Tiempo | Posición |
|---|---|---|
| Albert | 3:53:00 | 9 |
| Blanca | 3:31:00 | 5 |
| Carla | 3:26:00 | 2 |
| Dídac | 3:34:00 | 6 |
| Ester | 3:27:00 | 3 |
| Frederic | 3:34:00 | 6 |
| Gina | 3:29:00 | 4 |
| Hug | 4:03:00 | 10 |
| Ignasi | 3:49:00 | 8 |
| Joana | 3:24:00 | 1 |

Tabla 2

—Ester, risueña: ¡Pues ahora gano yo!.

Hug, amante de las carreras de coches Fórmula 1, propone seguir su sistema de puntuación.

El ganador obtiene 25 puntos, el segundo 18, el tercero 15, y los siguientes 12, 10, 8, 6, 4, 2, y 1 el último. Se suman los puntos de las 4 pruebas y gana el que obtiene la puntuación más alta. Carla vuelve al trabajo y saca los nuevos resultados (tabla 4).

—Carla: Me encanta este sistema, ahora gano yo.

| Nombre | 1.ª prueba | 2.ª prueba | 3.ª prueba | 4.ª prueba | Puntos totales | Clasificación final |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Albert | 6 | 9 | 6 | 8 | 29 | 8 |
| Blanca | 7 | 2 | 3 | 4 | 16 | 3 |
| Carla | 3 | 6 | 5 | 1 | 15 | 2 |
| Dídac | 1 | 8 | 7 | 7 | 23 | 6 |
| Ester | 2 | 7 | 2 | 3 | 14 | 1 |
| Frederic | 4 | 1 | 8 | 10 | 23 | 6 |
| Gina | 8 | 5 | 1 | 2 | 16 | 3 |
| Hug | 10 | 10 | 10 | 6 | 36 | 10 |
| Ignasi | 9 | 3 | 9 | 9 | 30 | 9 |
| Joana | 5 | 4 | 4 | 4 | 17 | 5 |

Tabla 3

| Nombre | 1.ª prueba | 2.ª prueba | 3.ª prueba | 4.ª prueba | Puntos totales | Clasificación final |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Albert | 8 | 2 | 8 | 4 | 22 | 8 |
| Blanca | 6 | 18 | 15 | 12 | 51 | 4 |
| Carla | 15 | 8 | 10 | 25 | 58 | 1 |
| Dídac | 25 | 4 | 6 | 6 | 41 | 7 |
| Ester | 18 | 6 | 18 | 15 | 57 | 2 |
| Frederic | 12 | 25 | 4 | 1 | 42 | 6 |
| Gina | 4 | 10 | 25 | 18 | 57 | 2 |
| Hug | 1 | 1 | 1 | 8 | 11 | 10 |
| Ignasi | 2 | 15 | 2 | 2 | 21 | 9 |
| Joana | 10 | 12 | 12 | 12 | 46 | 5 |

Tabla 4

Gina, que corre carreras de orientación, propone aplicar el sistema que se usa en este deporte. Explica que al primero se le asignan 100 puntos y al resto una proporción inversa respecto al primero. Es decir, un participante en concreto tendría: Puntos participante = Tiempo ganador × 100 / Tiempo participante. Finalmente, se suman los puntos de cada prueba y la ganadora sería la persona que tiene más puntos.

—Carla: Siempre me estáis dando trabajo.Aquí tenéis los resultados (tabla 5).
—Dídac: Me apunto a este deporte, ahora gano yo.
—Albert razona: Me parece que empieza a complicarse, cuatro sistemas de puntuación y cuatro ganadores distintos.
—Joana, una auténtica fanática de la escalada deportiva: Pues yo propongo un nuevo sistema. En los últimos Juegos Olímpicos de Tokio, el sistema de puntuación en este deporte era el siguiente: puntuaban cada prueba dando tantos puntos como la posición que ocupa el participante, es decir, 1 para el primero, 2 al segundo y así hasta el último. Una vez puntuadas las pruebas se hace el producto de todas las puntuaciones y gana el que tiene menos puntos - A ver qué pasa ahora, ¡No paramos de darte faena!

Después de jugar con la tablet, Carla les da los nuevos resultados (tabla 6).

—Gina, riendo: Pues ahora ganaría yo ¿Y ahora qué hacemos?

| Nombre | 1.ª prueba | 2.ª prueba | 3.ª prueba | 4.ª prueba | Puntos totales | Clasificación final |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Albert | 38,46 | 80,26 | 78,95 | 88,17 | 285,84 | 9 |
| Blanca | 37,04 | 98,39 | 88,24 | 93,18 | 316,85 | 7 |
| Carla | 66,67 | 84,72 | 81,08 | 100,00 | 33,47 | 4 |
| Dídac | 100,00 | 82,43 | 75,00 | 91,11 | 348,54 | 1 |
| Ester | 71,43 | 83,56 | 90,91 | 94,25 | 340,15 | 2 |
| Frederic | 62,50 | 100,00 | 73,17 | 85,42 | 321,09 | 6 |
| Gina | 34,48 | 92,42 | 100,00 | 97,62 | 324,53 | 5 |
| Hug | 31,25 | 77,22 | 69,77 | 92,13 | 270,37 | 10 |
| Ignasi | 33,33 | 96,83 | 71,43 | 87,23 | 288,82 | 8 |
| Joana | 58,82 | 95,31 | 85,71 | 93,18 | 333,03 | 3 |

Tabla 5

Ester, la más ordenada del grupo, concluye:

—Vamos a ver, tenemos 5 sistemas de puntuación y cinco ganadores distintos. En color amarillo los ganadores, en argénteo los segundos y en color bronce los terceros (tabla 7).
—Albert, concluye: Antes de empezar las pruebas tendríamos que haber pactado el sistema de puntuación. —Ignasi recuerda, sonriendo, el lema del espíritu olímpico: «Lo importante es participar».

Durante un buen rato las chicas y chicos reflexionan sobre los resultados haciendo sus propios cálculos. De repente Frederic recuerda:

| Nombre | 1.ª prueba | 2.ª prueba | 3.ª prueba | 4.ª prueba | Puntos totales | Clasificación final |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Albert | 6 | 9 | 6 | 8 | 2592 | 9 |
| Blanca | 7 | 2 | 3 | 4 | 168 | 4 |
| Carla | 3 | 6 | 5 | 1 | 90 | 3 |
| Dídac | 1 | 8 | 7 | 7 | 392 | 7 |
| Ester | 2 | 7 | 2 | 3 | 84 | 2 |
| Frederic | 4 | 1 | 8 | 10 | 320 | 5 |
| Gina | 8 | 5 | 1 | 2 | 80 | 1 |
| Hug | 10 | 10 | 10 | 6 | 6000 | 10 |
| Ignasi | 9 | 3 | 9 | 9 | 2187 | 8 |
| Joana | 5 | 4 | 4 | 4 | 320 | 5 |

Tabla 6

| Nombre | Ciclismo | Atletismo | Fórmula 1 | Orientación | Escalada |
|---|---|---|---|---|---|
| Albert | 3:53:00 | 29 | 22 | 285,84 | 2592 |
| Blanca | 3:31:00 | 16 | 51 | 316,85 | 168 |
| Carla | 3:26:00 | 15 | 58 | 33,47 | 90 |
| Dídac | 3:34:00 | 23 | 41 | 348,54 | 392 |
| Ester | 3:27:00 | 14 | 57 | 340,15 | 84 |
| Frederic | 3:34:00 | 23 | 42 | 321,09 | 320 |
| Gina | 3:29:00 | 16 | 57 | 324,53 | 80 |
| Hug | 4:03:00 | 36 | 11 | 270,37 | 6000 |
| Ignasi | 3:49:00 | 30 | 21 | 288,82 | 2187 |
| Joana | 3:24:00 | 17 | 46 | 333,03 | 320 |

Tabla 7

—Yo no quisiera complicarlo aún más, pero yo llegué 7 minutos tarde a la salida de la tercera prueba y 10 minutos de la cuarta, y no fue culpa mía. Lo recordáis, ¿no?
—Es verdad, claro que nos acordamos. Recalculemos de nuevo.
—Gina chilla sorprendida: No os lo podréis creer pero ahora, ¡siempre gana Frederic! (tabla 8).

Ahora os proponemos dos retos a vosotros, lectores:

1. ¿Cuántos minutos habría que restar al tiempo de Carla en la primera prueba para ganar en todos los sistemas de puntuación?
2. ¿Cuántos minutos habría que restar al tiempo de Ester en la segunda prueba para ganar en todos los sistemas de puntuación?

## Soluciones a los dos retos

Carla necesitaría realizar la primera prueba en 12 minutos en lugar de los 15 minutos, es decir 3 minutos menos. La tabla 9 muestra los resultados.

Ester necesitaría 7 minutos menos para ganar en todos los sistemas de puntuación. Realizaría la segunda prueba en 1 hora y 6 minutos en lugar del 1 hora y 13 minutos. Curiosamente no ganaría ninguna de las cuatro pruebas (tabla 10).

Como decíamos al principio, lo importante es participar, especialmente si determinar el ganador se transforma en un problema de difícil solución.

| Nombre | Ciclismo | Atletismo | Fórmula 1 | Orientación | Escalada |
|---|---|---|---|---|---|
| Albert | 3:53:00 | 31 | 18 | 285,84 | 3402 |
| Blanca | 3:31:00 | 18 | 46 | 316,85 | 280 |
| Carla | 3:26:00 | 16 | 56 | 332,47 | 108 |
| Dídac | 3:34:00 | 25 | 37 | 348,54 | 512 |
| Ester | 3:27:00 | 15 | 54 | 340,15 | 112 |
| Frederic | 3:16:00 | 10 | 70 | 348,76 | 24 |
| Gina | 3:29:00 | 16 | 57 | 324,53 | 80 |
| Hug | 4:03:00 | 37 | 9 | 270,37 | 7000 |
| Ignasi | 3:49:00 | 31 | 20 | 288,82 | 2430 |
| Joana | 3:24:00 | 19 | 42 | 333,03 | 500 |

Tabla 8

| Nombre | Ciclismo | Atletismo | Fórmula 1 | Orientación | Escalada |
|---|---|---|---|---|---|
| Albert | 3:53:00 | 29 | 22 | 285,84 | 2592 |
| Blanca | 3:31:00 | 16 | 51 | 316,85 | 168 |
| Carla | 3:23:00 | 14 | 61 | 349,14 | 60 |
| Dídac | 3:34:00 | 23 | 41 | 348,54 | 392 |
| Ester | 3:27:00 | 15 | 54 | 340,15 | 126 |
| Frederic | 3:34:00 | 23 | 42 | 321,09 | 320 |
| Gina | 3:29:00 | 16 | 57 | 324,53 | 80 |
| Hug | 4:03:00 | 36 | 11 | 270,37 | 6000 |
| Ignasi | 3:49:00 | 30 | 21 | 288,82 | 2187 |
| Joana | 3:24:00 | 17 | 46 | 333,03 | 320 |

Tabla 9

| Nombre | Ciclismo | Atletismo | Fórmula 1 | Orientación | Escalada |
|---|---|---|---|---|---|
| Albert | 3:53:00 | 29 | 22 | 285,84 | 2592 |
| Blanca | 3:31:00 | 16 | 51 | 316,85 | 168 |
| Carla | 3:23:00 | 14 | 61 | 349,14 | 60 |
| Dídac | 3:34:00 | 23 | 41 | 348,54 | 392 |
| Ester | 3:27:00 | 15 | 54 | 340,15 | 126 |
| Frederic | 3:34:00 | 23 | 42 | 321,09 | 320 |
| Gina | 3:29:00 | 16 | 57 | 324,53 | 80 |
| Hug | 4:03:00 | 36 | 11 | 270,37 | 6000 |
| Ignasi | 3:49:00 | 30 | 21 | 288,82 | 2187 |
| Joana | 3:24:00 | 17 | 46 | 333,03 | 320 |

Tabla 10

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya,
Cornellà de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

# ¿A qué quieres que te gane?

Daniel Sadornil Renedo

SUMA+ núm. 98
pp. 59-67
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

> La matemática tiene una rama que se llama Teoría de Juegos. ¿No debería ser suficientemente atractiva una ciencia que ofrece juegos en su menú? ¿No sería interesante considerarla como alternativa para estimular a los niños/jóvenes cuando están en el colegio?
> A. Paenza (2007)

Hace algunos años, tras los éxitos de algunos deportistas y equipos españoles en diversas competiciones, se puso de moda en los «mentideros» de las redes sociales y en los medios de comunicación la expresión: «Soy español, ¿a qué quieres que te gane?» Parecía que siempre un compatriota ganaba y que éramos lo mejor del mundo. Los futboleros recordamos también a Luis Aragonés en rueda de prensa diciendo repetidamente: «…ganar, ganar, ganar y volver a ganar…» repitiéndolo en bucle explicando el fútbol. No obstante, por muy deportistas y competitivos que seamos no siempre podemos asegurar los éxitos. Pero, se puede modificar un poco la expresión: «Sé matemáticas, ¿a qué quieres que te gane?». En diversos juegos de estrategia, las matemáticas permiten conocer y diseñar la forma de jugar para ganar a estos juegos (o al menos no perder). En esta sesión del proyecto ESTALMAT se presenta la relación entre juegos de estrategia y resolución de problemas matemáticos, así como diversos juegos y sus estrategias ganadoras.

El juego constituye una parte intrínseca de la naturaleza del hombre. Desde bien pequeños, jugamos con todo tipo de cosas: piedras, cartas, canicas… Empleamos los juegos para aprender y desarrollar nuestro conocimiento acerca del mundo que nos rodea. Por otra parte, no solo el juego forma parte de la vida del ser humano, ya que las matemáticas también aparecen en muchos aspectos de nuestra vida cotidiana. Las matemáticas se manifiestan en diferentes campos: ciencia, tecnología, economía, arte…, y de esta forma, diversas actividades requieren, en mayor o

menor medida, del conocimiento matemático. Como afirma de Guzmán (1993):

> Al igual que las matemáticas, un juego comienza con la introducción de una serie de reglas, un cierto número de objetos o piezas, cuya función en el juego viene definida por tales reglas, exactamente de la misma forma en que se puede proceder en el establecimiento de una teoría matemática por definición implícita. Quien se introduce en la práctica de un juego debe adquirir una cierta familiarización con sus reglas, relacionando unas piezas con otras al modo como el novicio en matemáticas compara y hace interactuar los primeros elementos de la teoría unos con otros. Estos son los ejercicios elementales de un juego o de una teoría matemática.

Igualmente, muchos juegos utilizan la matemática en su desarrollo e incluso características, haciendo uso de los números o las relaciones geométricas, lo que les hace muy interesantes para su inclusión en el aula pues generan situaciones en las que son necesarios conceptos y técnicas presentes en el currículo y, al mismo tiempo, su práctica promueve el descubrimiento y aplicación de estrategias (Deulofeu y Edo, 2001).

Es por ello, que podemos asimilar la búsqueda de una estrategia ganadora a un juego con las mismas fases definidas por Polya (1989) para la resolución de problemas:

— comprender el problema,
— concebir un plan,
— ejecutar el plan,
— examinar la solución obtenida,

y emplear en el mismo contexto para los juegos matemáticos, tal y como hizo De Guzmán (1984):

— antes de hacer, tratar de entender,
— tramar una estrategia,
— mirar si la estrategia ideada lleva al final,
— sacarle jugo al juego.

Las similitudes entre la resolución de problemas matemáticos y su aplicación para la resolución de los juegos se pueden resumir según la tabla 1.

| Problemas | Juegos |
|---|---|
| 1. Comprender qué se pide. | 1. Comprender los requisitos |
| 2. Comprender qué quiero encontrar. | 2. Comprender los movimientos. |
| 3. Comprender qué datos tengo. | 3.Comprender cómo se gana. |
| 4. Existe un problema parecido. | 4. ¿He jugado algún juego similar? |
| 5. Formular conjeturas. | 5. ¿Qué puedo hacer? |
| 6. Seleccionar posibles estrategias. | 6. Seleccionar posibles estrategias. |
| 7. Ejecutar un plan y examinar la validez de la conjetura. | 7. ¿Qué movimientos de ataque/defensa (oposición) hacen que el jugador progrese. |
| 8. Se ha resuelto un problema. | 8. He ganado (o perdido) |
| 9. ¿Cuál es la estrategia general? | 9. ¿Por qué? |
| 10. ¿Se puede usar otra forma? | 10. ¿Hay otra forma de ganar? ¿Es la mejor estrategia? |
| 11. ¿Funciona siempre? Modificar el problema. | 11. ¿Y si cambian las reglas? |

Tabla 1. Estrategias de resolución de problemas y búsqueda de estrategias ganadoras (Salvador, 2012)

Por todo esto, la sesión «¿A qué quieres que te gane?» no solo trata de jugar, que también, sino de realizar los pasos señalados anteriormente, al estilo de los diferentes heurísticos involucrados en la resolución de problemas.

## Desarrollo de la sesión

Las sesiones de ESTALMAT se desarrollan durante tres horas con un descanso de aproximadamente 20 minutos, es por ello que se dispone de algo más de dos horas y media para tratar el tema de los juegos de estrategia. La sesión no está diseñada para un nivel especial, se ha impartido en los distintos cursos de ESTALMAT, para alumnos desde 1.º a 3.º de la ESO. Este hecho no interviene en el modelo del desarrollo de la sesión.

Existen diferentes formas de aproximarse a los juegos de estrategia y motivar a los alumnos para mantener su atención y lograr los objetivos que se pretende. La elección de la presentación no es del todo propia, pero conjuga la relación entre los juegos y los problemas de matemáticas junto con la competición propia y el deseo de ganar siempre.

La sesión comienza intentando explicar (no siempre esto es fácil) que para poder resolver algunos problemas matemáticos no es posible siempre aplicar una fórmula conocida, de hecho, existen cuestiones en la que esto no es posible. Dependiendo del curso de los alumnos se pone como ejemplo la resolución de ecuaciones de grados dos, tres, cuatro o cinco y se aprovecha para contarles un poco la historia de este problema (Sabariego, 2020). Otro problema que se puede presentar es la conjetura de Collatz: tomemos un número natural cualquiera, si dicho número es par, lo dividimos entre dos, y si es impar lo multiplicamos por 3 y le sumamos 1; y repetimos el proceso con cada nuevo número que se obtenga. Tras varios ejemplos, vemos que llegamos siempre al número 1. ¿Es eso siempre cierto?, ¿cuántos pasos son necesarios? (Manero y Población, 2021). Es claro que esta introducción al tema no reproduce los diferentes pasos o heurísticos de la resolución de problemas, pero existen otras sesiones de ESTALMAT, que se realizan con anterioridad a esta, que tratan este tópico con lo que no es necesario ahondar en ello. A continuación, se expone la tabla anterior, que estará presente y disponible en todo momento de la sesión y se explica paso a paso las similitudes entre resolución de problemas y juego. Para ello, se pone como ejemplo de juego (aunque no existe una estrategia ganadora) el parchís (y algunas de sus variantes) que es de sobra conocido por todos los alumnos.

En la sesión se muestran diferentes juegos y algún pseudojuego, un juego en el que los jugadores no pueden hacer nada por cambiar el devenir de las partidas. Es decir, sean cuales sean las jugadas realizadas por cada uno de los jugadores, al final siempre ganará (o perderá) el mismo jugador, el que empieza la partida o el otro. En este sentido, independientemente de su tipología, todos se presentan de la misma forma y no se comenta de cuál de los dos tipos es. De esta forma, la sorpresa de los alumnos cuando descubren que se trata de un pseudojuego, y no hay nada que hacer para ganar o perder, se mezcla con la decepción. No obstante, encuentran también divertidos los pseudojuegos.

Es importante señalar, y así se les muestra a los alumnos, que los juegos que se van a presentar pueden clasificarse como juegos de información completa, en los que el azar no forma parte del desarrollo del juego y cada jugador sabe en todo momento qué jugadas puede hacer y qué consecuencias tiene cada uno.

A partir de este momento es cuando se empieza realmente a jugar y todos los juegos se presentan de la misma forma. Recordando el título de la sesión (y del artículo) «¿A qué quieres que te gane?» cada juego se explica de la siguiente forma:

— Útiles necesarios.
— Reglas de juego.
— ¿Quién se atreve a jugar conmigo?
— ...

Siempre, o salvo en un pequeño número de ocasiones que se pueden contar con los dedos de una mano, en todos los años que he impartido esta sesión, el siguiente punto es el mismo:

— Oh, ¡has perdido!

De ahí proviene el título del artículo. Cada uno de los juegos tiene una estrategia ganadora para el primer o segundo jugador (salvo que sea un pseudojuego).

Lógicamente, yo conozco quién de los dos jugadores posee una estrategia ganadora, pero en algunos de ellos invito al voluntario de turno a que decida si quiere empezar a jugar o no. Usualmente, aunque el juego tenga estrategia para el primer jugador y sea el voluntario el que comience, al no conocer la estrategia, puedo recuperar «ese poder de la estrategia» fácilmente. En aquellos juegos en los que este hecho

es difícil o imposible o en los pseudojuegos, no realizo esta invitación.

Tras ganarles varias partidas, pues los alumnos se empeñan en no querer perder, les invito a que jueguen por parejas. Para cada juego, se les proporciona una ficha donde van escribiendo los movimientos de cada jugador y el resultado final. Tras unos intensos minutos de competición algunos valientes se atreven a conjeturar (como si fuera un problema matemático) cuál es el proceso para ganar. Es importante, para que todas las parejas lleguen a descubrir correctamente la estrategia o acercarse al menos a ella, que no digan en voz alta sus conclusiones. Si la estrategia es correcta, les comunico que esperen a sus compañeros (pues siempre hay unos más rápidos que otros); en caso contrario, les invito a jugar conmigo otra vez, y como era de esperar y tras sorpresa, ellos vuelven a perder, lo que les motiva aún más para poder seguir buscando la estrategia correcta. Cuando ya casi todos los grupos encuentran la estrategia correctamente, se abre un turno de debate y preguntas para conocer cómo han llegado a ella. Curiosamente, los razonamientos mostrados, en ocasiones son totalmente disparatados y sin sentido aun llegando a la estrategia correcta. Para algunos de los juegos se pueden proponer variantes que se exponen y enseguida los alumnos, sin jugar siquiera, saben cómo ganar.

A continuación, se muestran algunos de los juegos realizados en esta sesión junto con las estrategias ganadoras y algunas de sus variantes.

## Juego 1: Quitando fichas

Se dispone de un número determinado de fichas sobre la mesa, digamos por ejemplo 14. Por turnos, cada uno de los dos jugadores puede retirar una o dos fichas. El que retira la última ficha gana.

Este quizás es uno de los juegos más simples que se pueden presentar, el número de fichas inicial no es del todo importante, aunque de él depende quién tiene la estrategia ganadora como veremos a continuación.

La práctica reiterada del juego permite descubrir que, si hay tres fichas en la mesa, el siguiente jugador perderá de forma inexorable el juego. En efecto, si ahora quita una ficha, el otro jugador quitará las dos para ganar; si en cambio quita solo una, el segundo jugador retira la ficha que queda sobre la mesa también para ganar. Pero claro, ¿cómo se llega a dejar tres fichas cuando en principio había 14? Aquí es donde entra en juego la tabla de partidas que han rellenado para buscar patrones. Un ejemplo podría ser el de la tabla 2.

En la segunda partida de ejemplo no se ha llegado a la situación de dejar tres fichas, pero sí en los otros dos casos (que curiosamente ganaron jugadores distintos). No es difícil darse cuenta de que si queremos dejar tres fichas al adversario (para que pierda), en la jugada anterior este último nos tiene que haber dejado cuatro o cinco fichas, para que al quitar una o dos respectivamente tengamos el resultado adecuado. Claramente, la forma de hacer esto, es dejarle antes 6 fichas. Repitiendo este razonamiento hacia atrás con el número de fichas en la mesa, se observa que si se deja un número de fichas que sea múltiplo de tres se gana siempre la partida. Esto permite obtener, en este

| Jugador | Partida 1 | | Partida 2 | | Partida 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Quita | Queda | Quita | Queda | Quita | Queda |
| A | 1 | 13 | 2 | 12 | 1 | 13 |
| B | 2 | 11 | 2 | 10 | 1 | 12 |
| A | 2 | 9 | 2 | 8 | 2 | 10 |
| B | 1 | 8 | 2 | 6 | 1 | 9 |
| A | 1 | 7 | 1 | 5 | 2 | 7 |
| B | 2 | 5 | 1 | 4 | 1 | 6 |
| A | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 4 |
| B | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 3 |
| A | 2 | 0 | | | 2 | 1 |
| A | | | | | 1 | 0 |
| | Gana A | | Gana B | | Gana B | |

Tabla 2. Ejemplos de partidas del juego «Quitando fichas»

caso, una estrategia ganadora para el primer jugador, quitando primero 2 fichas para dejar 12 (obsérvese la partida 3 del ejemplo).

Cambiar el número de fichas no cambia la estrategia ganadora, pero sí puede que cambie el jugador que tiene ventaja. Si en la mesa hay 15 fichas (o cualquier múltiplo de 3), la misma estrategia de dejar un número de fichas múltiplo de 3, da la ventaja al primer jugador.

Este primer juego tiene varias variantes cuya estrategia es similar y no es difícil de obtener.

Variante 1: En lugar de quitar una o dos fichas se pueden quitar 1 a n, el número que hay que dejar son siempre los múltiplos de n+1. Por ejemplo, si n=4, hay que dejar siempre múltiplos de 5.

Variante 2: En cada turno se pueden quitar 1, 3, 5 fichas y hay por ejemplo 20 fichas. En este caso siempre hay una estrategia ganadora para el segundo jugador. 20 es un número par, quitando 1,3 o 5 (impares) se convierte en impar el número de fichas que quedan. Quite las que quite el segundo jugador, será par. Y así sucesivamente, sobre la mesa hay un número par, impar, par, impar, par… y de eta forma para quitar la última ficha debe haber un número impar de fichas antes (1,3 o 5) y eso solo lo puede encontrar el jugador 2. Si hubiera de inicio un número impar de fichas, ganaría siempre el primer jugador.

Variante 3: En este caso lo que cambia es la elección del ganador. En lugar de ganar el jugador que retira la última ficha, pierde el que quita la última ficha. Para poner un ejemplo supongamos como al principio que tenemos 14 fichas y que se pueden retirar una o dos. Al principio, los alumnos intentan buscar una estrategia similar a la del primer juego trabajando con los múltiplos de 3, pero enseguida se dan cuenta de que esto no sirve. En este caso, para ganar, habrá que dejar al otro jugador 1,4,7,10... fichas, es decir, una más que un múltiplo de 3.

En el desarrollo de la sesión, algunos intentos de alcanzar la estrategia por parte de los alumnos son:

— «… tiene que haber 3 fichas para ganar seguro».
— «Pues que cuando quite uno, que quite 2 y si no al revés».
— «Que intente quedarse con 3 fichas».
— «Que empiece cogiendo 2, y al final que queden 3».

## Juego 2: Chocolate y Piedra

Este juego es de carácter geométrico. Se dispone de una tableta de chocolate en el que la onza de la esquina inferior izquierda ha sido sustituida por una piedrita tal como se recoge en la figura 1.

Cada jugador por turnos, parte la tableta horizontal o verticalmente (en onzas enteras) y se queda (o come) con la parte de chocolate que no contiene la piedra, porque digamos que esta es algo indigesta. Gana el jugador que se come el último trozo de chocolate y deja al otro solamente la piedra.

Para aclarar mejor cuáles son las posibles acciones, se muestra en la figura 2 dos posibles cortes de la tableta para el primer jugador al empezar el juego.

A la izquierda, el primer jugador ha cortado la tableta de chocolate verticalmente y se ha quedado/comido un trozo de chocolate de 3 onzas de ancho por 5 de

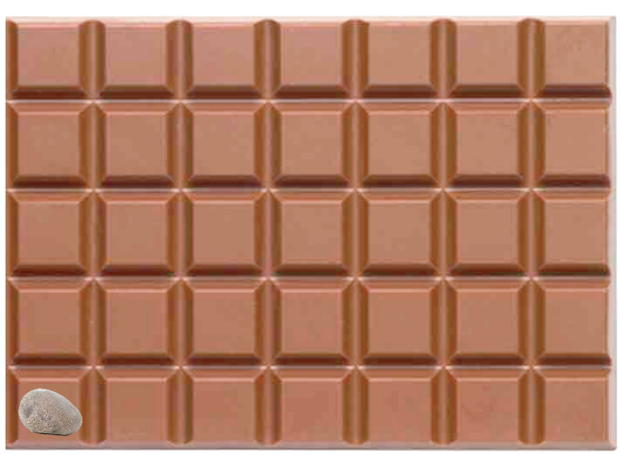


Figura 1. Tableta de chocolate con piedra

alto y le ha ofrecido al segundo jugador el trozo de tableta que tiene la piedra. A la derecha, el corte se ha realizado en horizontal.

Lógicamente, en el mercado no existen tabletas con estas características, con lo que la actividad se realiza con las tabletas impresas y con unas tijeras. Es recomendable disponer de tabletas de diferentes tamaños para que la estrategia sea general y no particular de la tableta escogida.

Como en el juego anterior, y en la mayoría de los juegos de estrategia, a medida que los alumnos juegan, van dándose cuenta de que la búsqueda de la estrategia ganadora es más fácil si se hace desde los últimos pasos, es decir, empezar por los casos fáciles. En este caso, si la tableta fuese solo una fila o una columna, es claro que es posible cortarla de una vez para dejar la piedra al otro jugador.

Cualquiera de estas dos formas son posiciones ganadoras. Pero, ¿y si tenemos más filas o columnas? ¿es más fácil o más difícil? Abordar el problema de esta forma no es sencillo y llevaría a estudiar muchos casos posibles y no es factible.

No obstante, los estudiantes, tras jugar varias veces con tabletas diferentes, seguro que han descubierto que si un jugador deja al otro una tableta que sea un cuadrado pequeño ($2 \times 2$ o $3 \times 3$) gana la partida. En el caso $2 \times 2$, el siguiente jugador solo puede dejar una fila o columna y en el caso $3 \times 3$, aun habiendo más posibilidades, todas se reducen a obtener un cuadrado $2 \times 2$ o una fila o columna. En este momento, los alumnos no siempre ven la estrategia ganadora y es necesario jugar más veces con otros tamaños.

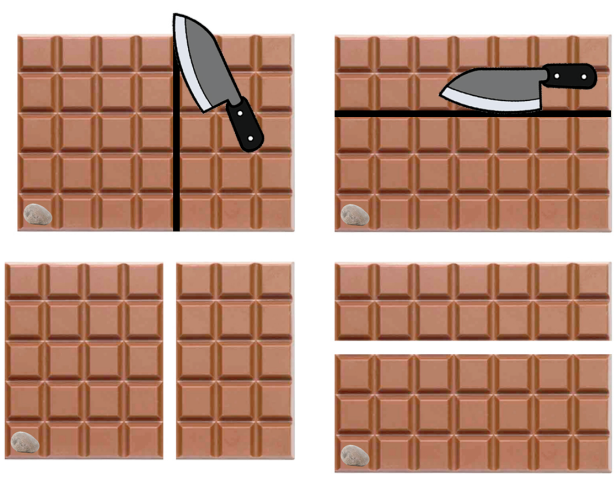


Figura 2. Dos posibles jugadas iniciales

A veces es necesario darles alguna indicación para que piensen qué figuras geométricas resultan tras los cortes. Solo hay dos opciones: rectángulos y cuadrados (aunque recordemos que todos los cuadrados son rectángulos y no al revés).

Si se parte de un cuadrado, cualquier corte deja un rectángulo y a partir de un rectángulo siempre es posible cortar para obtener un cuadrado. El jugador que se queda solo con la piedra pierde, que es justamente un cuadrado $1 \times 1$.

Por tanto, la estrategia ganadora para este juego es ir dejando al otro jugador una tableta cuadrada y, salvo que solo sea la piedra, este devolverá de nuevo un rectángulo que puede convertirse de nuevo en cuadrado y así sucesivamente.

Dependiendo si la tableta original es un cuadrado o no, la estrategia ganadora es para el segundo jugador o para el primero.

Una variante de este juego es considerar otro lugar de la tableta para colocar la piedra. Recomendamos en este caso, empezar a colocarla en el borde y así reducir el juego al anterior, pues colocarlo en el medio puede confundir un poco en la búsqueda de la estrategia (que la hay).

Algunos de los comentarios de los alumnos para alcanzar la estrategia ganadora son muy acertados:

— «Dejar al contrincante con un cuadrado de $2 \times 2$».
— «Que intente hacer cuadrados iguales».
— «Siempre coger líneas para formar un cuadrado».
— «Dejar siempre lado × altura igual (cuadrado)».

## Juego 3: Uniendo puntos

En una circunferencia se tiene un número de puntos dado. Por turnos, cada uno de los jugadores une dos puntos cualesquiera por un segmento (por dentro del círculo, es decir, una cuerda). Pueden unirse puntos si no están ya unidos y el segmento resultante no corta a uno hecho. El que no pueda trazar más segmentos pierde. La figura 3 muestra un ejemplo con 8 puntos antes de empezar y tras algunas jugadas (exactamente siete).

A cada pareja de alumnos se les puede dar distintas configuraciones de los puntos en la circunferencia e incluso distinto número de puntos. Estos dos aspectos, aunque a priori puedan parecer importantes son totalmente superfluos pues no alteran en absoluto el resultado. Tras varias partidas en parejas, a pesar del entusiasmo y concentración que puedan tener los jugadores, en todos los casos siempre, aunque no sepas jugar, gana el primer jugador. Es lo que antes hemos denominado pseudojuego.

El máximo número de cuerdas que se pueden trazar no depende de la posición de los puntos y depende en exclusiva del número de ellos. Esto podría hacer pensar que, quizás, el segundo jugador tenga una oportunidad, si el número es adecuado, pero no es así. En una circunferencia con $n$ puntos, se pueden trazar exactamente $2n-3$ cuerdas. Como este número es impar, la última cuerda posible la dibujará el primer jugador y gana la partida.

Este número resulta de cuál es la figura final, que no es más que una triangulación del $n$-ágono formado por los puntos iniciales. Una triangulación de un polígono siempre usa $n-3$ diagonales.

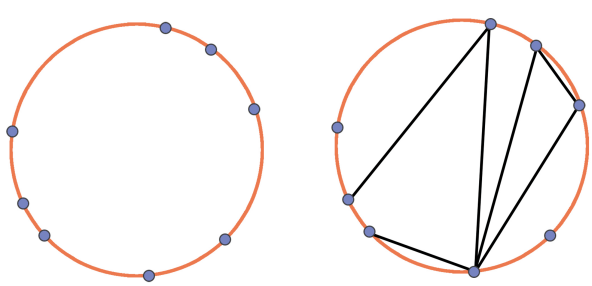


Figura 3. Figura inicial y tras siete jugadas

Hay que hacer notar también que dependiendo del número de puntos existen diversas configuraciones finales de la partida. Para tres puntos siempre queda el mismo dibujo (un triángulo), para cuatro hay dos (un cuadrado y una de sus diagonales), para cinco tres, pero para seis hay 12, 42 para siete…, y para ocho, que es el ejemplo que hemos tomado, hay 132. En general, con $n$ puntos se obtiene el número de Catalan $Cn-2$ partidas distintas (número de triangulaciones de un polígono de $n$ lados). Por eso conviene no poner menos de siete puntos con un grupo numeroso de alumnos para disimular que las partidas sean distintas.

Una generalización curiosa y menos conocida es permitir también puntos interiores en el círculo y añadir la regla de que el segmento que una dos puntos no puede pasar por otro punto. Sigue siendo un pseudojuego, pero esta vez, da la oportunidad también al segundo jugador pues si hay $n$ puntos en la circunferencia y $m$ en el interior, el número de segmentos que se pueden trazar es $2n+3m-3$. Por tanto, si $m$ par, gana el primer jugador y si $m$ es impar gana el segundo. Puede resultar útil para que los alumnos descubran, que un pequeño cambio (un punto dentro) provoca el resultado contrario.

En esta ocasión, algunos alumnos son muy escépticos:

— «Este juego es muy aburrido».
— «Puedo jugar sin pensar».
— «Pues así no tiene gracia».

## Juego 4: Monedas en fila

Se tiene un número par de monedas (por ejemplo 6) de varios valores (pueden repetirse) de modo que la suma de todas no sea un número par, es decir, que el valor total no se pueda repartir en dos partes con el mismo valor. Por ejemplo, se pueden tomar las siguientes monedas de céntimo: 1 de un céntimo, 2 de dos céntimos, 2 de cinco céntimos y 1 de 10 céntimos; el

valor total es 25 céntimos. También es posible realizar este juego con cartas de valores numéricos con la condición mencionada sobre la suma de los valores.

Antes de comenzar, es necesario explicar la dinámica del juego. Una vez dispuestas en una fila las monedas, por ejemplo, como se indica en la figura 4, por turnos, alternativamente, los jugadores retiran una moneda de algún extremo de la fila. Ganará el jugador que haya conseguido que las monedas que ha retirado valgan más, en conjunto, que las del otro jugador.

Este juego puede realizarse en dos versiones. La primera versión, que es la que se suele utilizar en la sesión de ESTALMAT es pedir al primer jugador que coloque las monedas en fila como él desee y que sea el segundo jugador el que empiece retirando monedas. La segunda versión consiste en empezar con las monedas ya colocadas y dejar al primer jugador que retire una moneda. Aunque la primera impresión es que ambas versiones son iguales, pues la estrategia es la misma como se verá a continuación, en la primera la ventaja es del segundo jugador y en la otra esa ventaja corresponde al primero.

Independientemente de cómo se coloquen las monedas, el jugador que empieza a retirarlas puede elegir las monedas adecuadamente para ganar el juego. El importe total de las monedas es, en este caso, de 25 céntimos. Claramente, cada uno se lleva tres monedas y no puede haber empate pues no hay ninguna elección de tres monedas que sea 12 céntimos y medio.

Si las monedas están colocadas de alguna forma concreta, se suman los valores de las monedas colocadas en las posiciones 1, 3 o 5 (impares). Si este valor es más grande que 12,5 entonces elegirá esas monedas, en caso contrario, elegirá las monedas que ocupen las posiciones pares. Esto se puede hacer siempre pues en la primera elección uno de los extremos es par y el otro impar. Si tuviera que elegir las posiciones impares, al elegir la primera, al oponente solo le quedan monedas en posición par y le permitirá de nuevo al primer jugador una posición impar. Si tiene que elegir las posiciones pares, eligiendo la última moneda le quedan al otro jugador solo posiciones impares.




Figura 4. Monedas dispuestas en fila

De esta forma, con la primera versión del juego, el segundo jugador puede ganar siempre mientras que en la segunda es el primer jugador, si escoge adecuadamente, el que gana.

Es conveniente recordar cuáles son las monedas que ocupan las posiciones pares o impares, pues si el jugador con estrategia ganadora se equivoca al quitar la moneda correspondiente, ya no se puede asegurar la victoria. En el caso de que las monedas tengan otro valor, hay simplemente que contar cuanto suman las monedas en posición par y en posición impar.

Una variante de este juego, y que se puede utilizar para despistar un poco tras haber jugado en varias ocasiones, es tomar un número impar de monedas, por ejemplo 7 (y que haya tres monedas que sumen más que las otras cuatro). En este caso, la estrategia ganadora corresponde al que coloca las monedas. El jugador que comienza retirando las monedas solo puede escoger una que esté en posición impar y además tras retirar todas, el primer jugador se queda con cuatro monedas mientras que el segundo solo con tres monedas. Si se colocan en las posiciones pares las tres monedas cuya suma sea mayor que las otras cuatro, el segundo jugador tiene una estrategia ganadora.

Aunque a simple vista la estrategia parece sencilla, no es habitual que los alumnos lleguen a ella sin ayuda. En ocasiones, puede ser conveniente jugar simultáneamente con varias disposiciones distintas en el que solo dos monedas (distintas claro) han cambiado su posición, por una parte, cuando ambas ocupan posiciones pares (o impares) y por otra cuando una está en posición par y la otra en impar. Los alumnos han percibido cierta dificultad en el desarrollo del juego, aunque al final alguno acertó:

— «Coger la de más valor siempre».

— «Depende de la suerte».
— «El que coloca, pierde».

## Conclusiones

Jugar es divertido, las matemáticas son divertidas (aunque algunos piensen lo contrario). Por tanto, jugar con matemáticas o hacer matemáticas jugando tiene que ser doblemente divertido, ¿no? Además, durante los juegos mencionados se pueden trabajar de forma «algo entretenida» diversos conceptos matemáticos del currículo. Más concretamente, se tratan múltiplos y divisores en el primer juego, rectángulos y cuadrados en el segundo, cuerdas, polígonos y diagonales en el tercero (incluso triangulaciones) y finalmente, paridad en el cuarto. Pero no es solo importante el contenido matemático implícito en el juego lo que se trata en esta sesión, sino también la capacidad de razonamiento, abstracción, generalización y las diversas heurísticas utilizadas para llegar a la estrategia ganadora.

Finalmente, podemos señalar algunos de los comentarios realizados por los alumnos tras la sesión en respuesta a si les ha ayudado a entender mejor ciertos aspectos matemáticos, que muestran como el objetivo de potenciar el razonamiento matemático se ha conseguido:

—«Sí, a buscar estrategias con las ansias de ganar».
—«Sí, me ha ayudado a pensar siempre y también a aprender a perder».
—«Porque hace que pensar».
—«Porque me ha ayudado mucho a usar la cabeza».

Los tres primeros juegos se presentaron en las actividades organizadas por el Comité Español de Matemáticas en la celebración del Día Internacional de las Matemáticas de 2021, contando con el apoyo de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). Se puede visualizar su desarrollo en <https://www.youtube.com/watch?v=udM1HiLM2XM>.

## Referencias bibliográficas


Deulofeu, J. (2010), *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes. Teoría de Juegos*, Colección «El mundo es matemático», RBA.

Deulofeu, J., y M.Edo (2006), «Investigación sobre juegos, interación y construcción de conocimientos matemáticos», *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, Vol. 24, n.º 2, 257-268.

Guzmán, M. de (1984), «Juegos matemáticos en la enseñanza», *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas celebradas en Santa Cruz de Tenerife del 10 al 14 de septiembre de 1984*. También en *Números: Revista de didáctica de las matemáticas*, n.º 59, 2004, 5-38.

— (1993), *Tendencias Innovadoras en educación matemática,* Ediciones OEA.

Manero, V., y A. Población (2021), «La conjetura de Collatz: un problema sencillo que desafiará tu intuición» en *ABCdario de las matemáticas*, <https://www.abc.es/ciencia/abci-conjetura-collatz-problema-sencillo-desafiara-intuicion-202101180110_noticia.html>.

Paenza, A. (2007), *Matemática… ¿Estás ahí? Episodio 3,14,* Colección «Ciencia que Ladra...», Siglo xxi Editores, Buenos Aires.

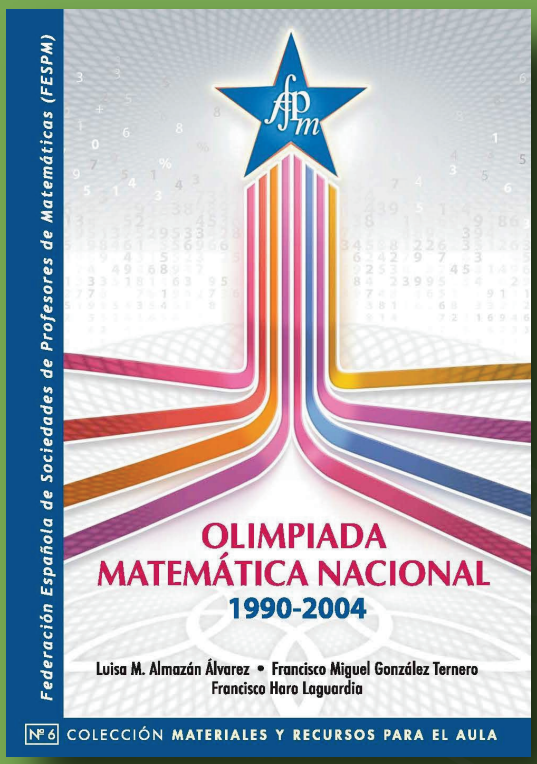
Polya, G. (1989), *Cómo plantear y resolver problemas* (2.ª ed.), Editorial Trillas, México.

Sabariego, P. (2020), «Duelos matemáticos del siglo XVI», Blog *MatemáticaMente* <https://bit.ly/33B4OTE>.

Salvador, A. (2012), «El juego como recurso didáctico en el aula de Matemáticas», Universidad Politécnica de Madrid, <https://bit.ly/3t141WF>.

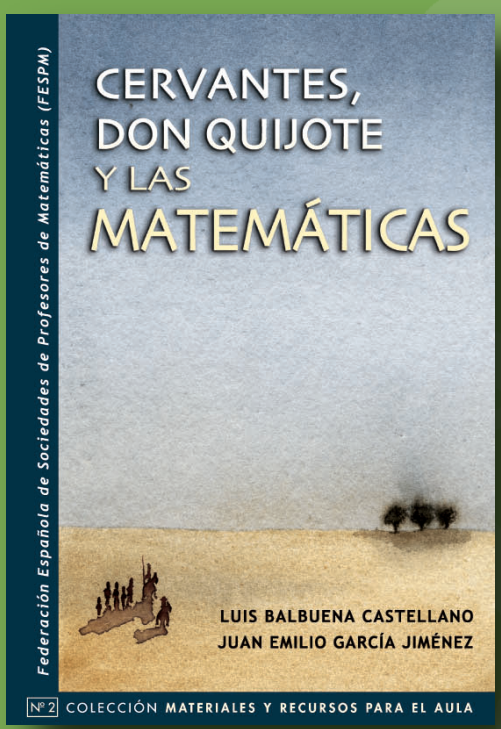


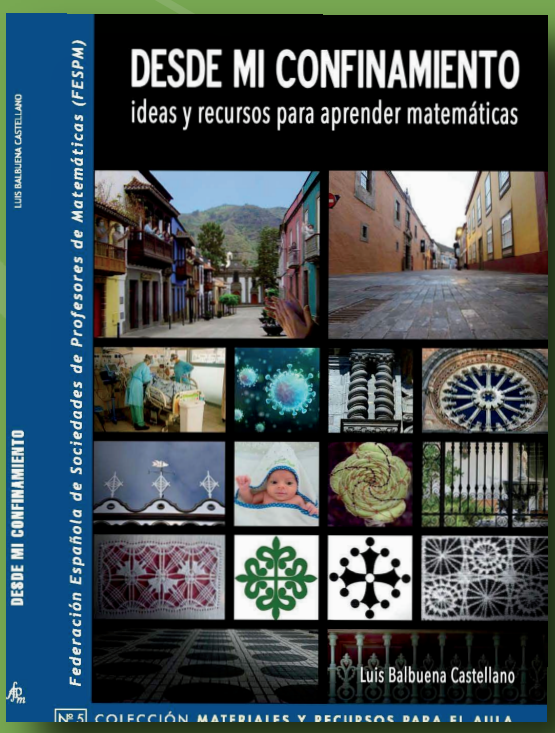
**Daniel Sadornil Renedo**
Universidad de Cantabria
<sadornild@unican.es>




# Servicio de Publicaciones de la FESPM

<publicaciones@fespm.es>



SÍ A LAS CALCULADORAS

# De la teoría a la práctica: una experiencia en la escuela de Guinardó

Tuti Comalat i Navarra

SUMA+ núm. 98
pp. 69-80
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

Este artículo recoge cómo se llevó a cabo la introducción de la calculadora en Educación Infantil y Primaria en la escuela Guinardó. Se recogen las actividades que se han realizado en cada curso, los objetivos que se pretenden conseguir y la respuesta que se obtuvo por parte del alumnado.

Durante los cuatro años que llevo participando en el grupo de trabajo del seminario de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas *La calculadora como recurso didáctico en Educación Primaria,* hemos dedicado mucho tiempo a recopilar, pensar y rediseñar actividades para los diferentes contenidos matemáticos que se imparten en la escuela, tanto de Educación Infantil como de Educación Primaria. Pero uno de nuestros principales objetivos, y de aquí el motivo de este artículo, siempre ha sido promocionar, promover y fomentar el uso didáctico de la calculadora en el aula. Por ello, la intención de este artículo es mostrar y hacer visible cómo se ha introducido el uso de esta herramienta en un centro educativo y ver cómo su uso hace que el alumnado realice aprendizajes y descubrimientos que mejoran su capacidad de cálculo.

La autora espera y desea que la experiencia en su escuela anime a otros maestros y maestras a intentarlo en la suya.

## Justificación

Siempre que empiezo un curso o una jornada sobre la calculadora no puedo dejar de recordar las palabras de Maria Antònia Canals (Canals, 1986):

> Estoy convencida que muchos maestros querrían usar la calculadora como instrumento de trabajo en la clase, pero delante de la máquina se encuentran perdidos y no saben cómo utilizarla. No saben qué tipo de ejercicios tendrían que proponer que fuesen úti-

> les para los niños y las niñas. Entonces optan por rechazarla, por miedo a que solo sirva para impedirles pensar.

35 años después de esta reflexión, la actitud de una parte del profesorado es la misma. Y después de haber comentado con muchos maestros y maestras por qué no se utiliza más la calculadora en el aula, confirmo las razones que María Antònia (Canals, 1986) daba en la introducción de su libro: *miedo y desconocimiento*.

Considerando uno de los propósitos que persigue el currículum de Educación Infantil en Cataluña (recogido en Currículum i orientacions: educació infantil: segon cicle. Elaboració: Servei d'Ordenació Curricular d'Educació Infantil i Primària. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. Servei de Comunicació i Publicacions, 2016), el o la docente debe conseguir formar a un alumnado competente. Pero, ¿qué se debe entender por alumnado competente? Como menciona Pikler (1984), es aquel al que se le identifica con unas cuantas características, entre ellas, destacamos la capacidad de experimentación: son curiosos, observan, exploran, prueban, comprueban, se interrogan, investigan e inventan. Por ello, el profesorado, además de la propia observación y reflexión, tiene que proponer y ofrecer instrumentos y materiales que posibiliten experiencias ricas y estimuladoras del aprendizaje.

Así, revisando el currículum catalán de Educación Infantil, no se encuentra ninguna referencia explícita al uso de la calculadora, pero sí un montón de referencias a la utilización de instrumentos de la vida cotidiana en el aula.

Además, se debe tener en cuenta que cuando se nombran aprendizajes valiosos para el alumnado, se hace referencia a aprendizajes que le permitan hacer suyo el conjunto de saberes que la humanidad ha ido formulando y que tienen que ir entendiendo y asimilando, como aquellos que antes se consideraban básicos y que ahora dejan de serlo gracias a unos instrumentos o programas que se encargan de hacer estas tareas repetitivas que necesitan estrategias de bajo nivel cognitivo. Cuando se menciona materiales en Educación Infantil, implica hablar de todo aquello que las niñas y los niños tienen a su alcance y que les sirva para alguna cosa, y por lo tanto podemos considerar que la calculadora forma parte de estos materiales llamados educativos y didácticos.

También, cuando se recogen los criterios de evaluación, concretamente el número diez especifica:

> Manifestar las habilidades necesarias para poder escuchar, observar, interpretar y crear en los diferentes lenguajes: verbal, corporal, plástico, musical, matemático y audiovisual, e incorporar la iniciación a los instrumentos tecnológicos (TIC).

Por ello, está más que justificado el uso de esta herramienta en la etapa de Educación Infantil.

Por otra parte, en el currículum de Educación Primaria (recogido en Currículum: educació primària. Elaboració: Servei d'Ordenació Curricular d'Educació Infantil i Primària. Barcelona: Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, 2017), dentro de las competencias básicas que debe adquirir el alumnado al acabar la educación obligatoria, hay dos competencias que recogen suficientemente las razones que justifican el uso de la calculadora en esta etapa educativa, concretamente son las competencias 2 y 5 que hacen referencia a:

> 2. Competencia matemática. Es la capacidad para formular, utilizar e interpretar las matemáticas en diferentes contextos. Incluye el razonamiento matemático, la resolución de problemas y *la utilización* de conceptos, procedimientos, datos y *herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos.* Permite reconocer el papel de las matemáticas en el mundo actual y hacer juicios y tomar decisiones bien fundamentadas propias de ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.
> 5. Competencia digital: Es la *adquisición de habilidades imprescindibles para interactuar con normalidad en la sociedad digital en que vivimos.* Incluye *destrezas referidas a instrumentos y aplicaciones digitales;* al tratamiento de la información y a la organización de los entornos digitales de trabajo y de aprendizaje; a la comunicación interpersonal y a la colaboración en entornos digitales; y a los hábitos, civismo e identidad digital.

Cuestiones que se refuerzan en lo expuesto para el área de Matemáticas sobre las competencias básicas (Burgués y Sarramona, 2013) de la Educación Primaria, concretamente lo que se recoge en la competencia diez:

> […] el alumnado ha de ser capaz de utilizar las herramientas tecnológicas con criterio, de forma ajustada a la situación e interpretar las representaciones matemáticas que ofrecen.

También se destaca que dentro de las orientaciones metodológicas se caracteriza a la calculadora como

> un instrumento que favorece la realización de algoritmos no estándares, que agiliza el proceso de cálculo y que permite experimentar relaciones numéricas y que actualmente la encontramos como instrumento tecnológico propio o incorporada a otros: navegadores de internet, buscadores, miniaplicaciones *(applets)*, etc.

Y dentro de la evaluación se destaca como indicadores: «el alumno utiliza la calculadora para realizar cálculos en situaciones adecuadas» y que «el alumno conoce las limitaciones de la calculadora».

Además, si tenemos en cuenta los contenidos de los diferentes ciclos de Educación Primaria, en el currículum catalán se recoge:

En ciclo inicial (1.er y 2.º curso):

> Uso de juegos de mesa, de las TAC y de calculadoras para desarrollar y para explorar los números y las operaciones.

En ciclo medio (3.er y 4.º curso):

> Uso de las calculadoras y otros recursos digitales para desarrollar el cálculo y para explorar los números y las operaciones.

En ciclo superior (5.º y 6.º curso):

> Uso de las TAC y calculadoras para el cálculo. Selección adecuada del tipo de cálculo según la situación: cálculo mental, cálculo escrito, calculadora y otros dispositivos digitales.

A modo de conclusión de este apartado, aún nos podríamos preguntar ¿por qué tenemos que utilizar la calculadora en clase?

Debiendo obtenerse alguna de las siguientes respuestas:

- Porque forma parte de nuestra cultura, ya que siempre hemos necesitado contar.
- Para realizar cálculos complicados que surgen cuando trabajamos con datos reales en la resolución de problemas.
- Para concentrarnos en el proceso de resolución de problemas en lugar de hacerlo en los cálculos que llevan asociados.
- Para explorar, desarrollar y consolidar conceptos, incluyendo la estimación, el cálculo, la conjetura, la aproximación y las propiedades de los números y las operaciones.
- Para experimentar con ideas matemáticas y descubrir regularidades.
- Para tener la oportunidad de acceder a las matemáticas que están más allá del nivel de destrezas de cálculo del alumnado.
- Para atender la diversidad.

## Cómo empezó todo

En un claustro de principio de curso expuse a todo el profesorado de Educación Infantil y de Educación Primaria mi intención respecto a la introducción de la calculadora en todos los cursos del centro educativo.

Después de esgrimir todas las razones antes expuestas, todas las maestras y los maestros estuvieron de acuerdo y la mayoría mostraron su aprobación a la propuesta ya que tenían claro que los niños y las niñas tenían que tener un dominio de la calculadora de la misma manera que ellos y ellas utilizaban la calculadora en su vida diaria. El primer obstáculo estaba salvado.

Para no dar trabajo adicional a los docentes, durante el segundo trimestre les hice llegar las copias de las fichas con las consignas para su aplicación y con la petición de que hiciesen fotos y grabasen algunas respuestas del alumnado. Se les facilitó también calculadoras básicas para que cada estudiante pudiese manejar su propia calculadora, en concreto el modelo CASIO MS 20 UC (se puede consultar en la figura 1). Las respuestas no se hicieron rogar y poco a poco fui recibiendo fotos y grabaciones con las que he podido elaborar este artículo.

Cabe destacar también que la colaboración e implicación de mis compañeros y compañeras de centro fue muy importante para realizar esta experiencia.




Figura 1. Modelos de calculadora básica

## Propuestas por cursos

A continuación, se presenta la serie de actividades que se realizaron en cada curso. En todas las aulas se realizaron dos tipos de actividades: una sobre el conocimiento de la calculadora, como máquina en sí, y otra relacionada con algunos aprendizajes del nivel educativo al que hacen referencia.

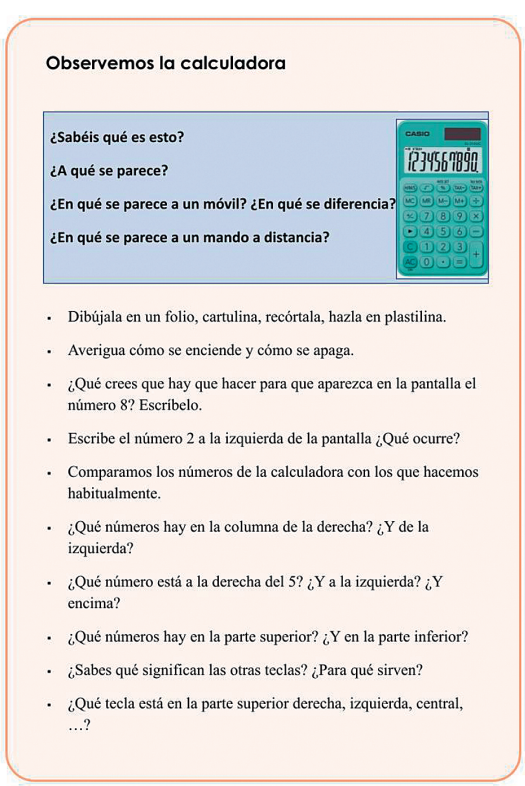
### EDUCACIÓN INFANTIL

Teniendo en cuenta que era la primera vez que tomaban contacto con la calculadora, con este alumnado solo se pretende que alcancen un conocimiento general de la máquina y que tomen consciencia de las diferencias con otros aparatos similares (mandos a distancia, teléfonos móviles…).

Así, en este caso la actividad que mostramos (ver figura *2*) es más un punto de referencia para las maestras que para ser utilizada con el alumnado.

A continuación se recogen algunas de las respuestas dadas por el alumnado ya que se mantuvo un diálogo bastante enriquecedor.

—Docente: ¿Sabéis qué es esto?
—Alumnado: son calculadoras (7 no lo saben).
—Estudiante 1 y Estudiante 2: son unas cosas para poner números.
—Estudiante 3: cuando no recuerdas un número, lo apuntas y así lo recuerdas.
—Estudiante 4: es como un móvil.
—Estudiante 5: si no sabes sumar, esto te puede ayudar.
—Estudiante 6: ¿qué es sumar?
—Estudiante 5: si en una mano hay un dedo y en la otra mano también hay un dedo, los dos juntos hacen dos dedos.
—Estudiante 7: también sirve para si no sabes restar…
—Estudiante 1: ¿qué es restar?
—Estudiante 8: es sumar, pero al revés, por ejemplo 2–2 hacen 0.
—Estudiante 5: si quieres restar con un número muy alto, lo pones en la calculadora.



**Observemos la calculadora**

**¿Sabéis qué es esto?**

**¿A qué se parece?**

**¿En qué se parece a un móvil? ¿En qué se diferencia?**

**¿En qué se parece a un mando a distancia?**

- Dibújala en un folio, cartulina, recórtala, hazla en plastilina.
- Averigua cómo se enciende y cómo se apaga.
- ¿Qué crees que hay que hacer para que aparezca en la pantalla el número 8? Escríbelo.
- Escribe el número 2 a la izquierda de la pantalla ¿Qué ocurre?
- Comparamos los números de la calculadora con los que hacemos habitualmente.
- ¿Qué números hay en la columna de la derecha? ¿Y de la izquierda?
- ¿Qué número está a la derecha del 5? ¿Y a la izquierda? ¿Y encima?
- ¿Qué números hay en la parte superior? ¿Y en la parte inferior?
- ¿Sabes qué significan las otras teclas? ¿Para qué sirven?
- ¿Qué tecla está en la parte superior derecha, izquierda, central, …?

Figura 2. Ficha de referencia para observar la calculadora

—Estudiante 8: yo sé hacer historias con la calculadora.
—Docente: ¿A qué se parece?
—Estudiante 4: parece un móvil
—Estudiante 3: pero el móvil funciona con letras y números.
—Docente: ¿Alguien sabe cómo funciona?
—Estudiante 3: las tiendas tienen unas calculadoras parecidas que te dicen cuanto hay que pagar y sale un tique.
—Estudiante 8: si pones 5, aprietas la cruz y vuelves a poner 5 y aprietas las dos rayitas, el resultado da diez. Lo comprobamos y efectivamente funciona.
—Docente: Esto que hacíamos era sumar, ¿cómo podemos hacer una resta?



Figura 3. Conociendo la calculadora

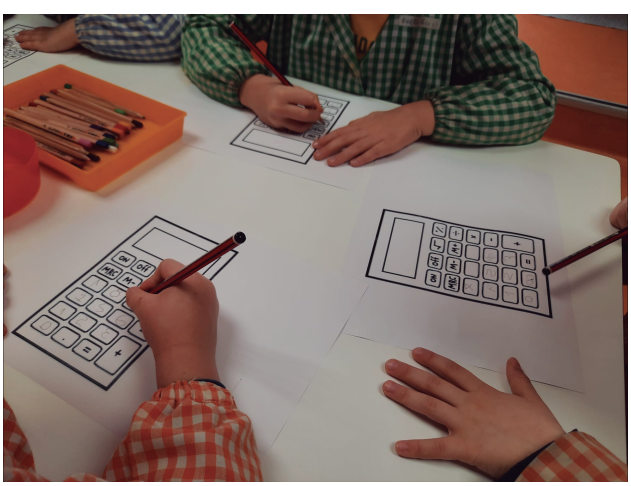


Figura 4. Elaboración de la actividad para reconocer los elementos básicos de una calculadora

—Estudiante 7: pon un 10, ahora la raya y el 9, ¿Cuántos caramelos quedan?
—¡Uno! dicen unos cuantos, lo comprobamos y efectivamente da uno.
—Docente: ¿Podemos hacer más cosas con la calculadora?

Con Estudiante 8 jugamos a hacer una historia con la calculadora de manera que los números que salen, sus cifras pueden parecer letras si le damos la vuelta a la calculadora, pues comentó que se lo había enseñado su padre.

Aunque la mayor parte de la actividad se hizo de forma oral, las maestras repartieron una ficha con una calculadora dibujada sin contenido en las teclas numéricas para que el alumnado dibujara los números en el sitio correcto para trabajar la orientación espacial.

### *Evaluación de los resultados*

Como podemos observar en el diálogo que se produce entre el alumnado y la maestra, los niños y las niñas se familiarizaron fácilmente con la calculadora y según la docente les encantó poder jugar con ella y conocer algunas de sus funciones. Está claro que cuando el curso que viene vuelvan a verla, ya no les sorprenderá y podrán empezar a trabajar teniendo ya un conocimiento y manejo previo sobre esta herramienta.

## EDUCACIÓN PRIMARIA

### *Ciclo inicial*

En el primer curso se propuso como actividad para conocer la máquina, un ejercicio en el que tenían que colocar correctamente los números en la calculadora. Como se trataba de estudiantes que nunca habían trabajado con la calculadora, para no dificultar más la tarea, solo se solicitó colocar los números del 1 al 9 (el 0 ya estaba dibujado, ver figura 5) en las teclas de la calculadora dibujada.

Posteriormente, como actividad de aprendizaje se solicita la confección de series numéricas a través de la programación de la función constante en la calculadora (esto puede variar según el modelo, pero en general se realiza tecleando dos veces sobre el símbolo

de la operación correspondiente). Así, por ejemplo, realizan series de números de 2 en 2, que se programa tecleando **2++=** (aunque primero exploraron e indagaron por sí solos y luego se les orientó con el uso de esta funcionalidad) y de 3 en 3 para conseguir que por sí solos dedujeran cómo podrían contar de 4 en 4 con la calculadora.

Para el segundo curso de Educación Primaria se propuso con el objetivo de conocer la máquina, un ejercicio en el que, como en el curso anterior, tenían que colocar correctamente los números en la calculadora. Para dificultar un poco más la tarea en relación con el curso previo, además de los números, también tenían que colocar el 0 y los símbolos de las operaciones (dejamos el símbolo de la coma para no confundir al alumnado).

Como actividad de aprendizaje se solicita la confección de series numéricas, en la que tienen que analizar cómo son las últimas cifras de los números que obtienen: pares, impares, con qué número terminan, etc. (figura 6).

## Evaluación de los resultados

Según el profesorado responsable de los cursos de ciclo inicial las actividades resultaron atractivas para el alumnado y opinaron que, aunque no habían utilizado la calculadora antes, se familiarizaron rápidamente con ella.

A continuación se recogen algunas de las respuestas dadas por este alumnado, en las que permiten ver su buena intuición y conocimiento sobre el diseño de la máquina.

A la pregunta del maestro: «¿Por qué crees que hay una tecla más grande que las otras?», una estudiante contesta muy convencida «Porque es la de sumar y es la que se utiliza más».

Y a la pregunta de por qué hay teclas pintadas de un color más fuerte, la misma alumna contesta: «Porque son las de encender y apagar la calculadora» (en ese momento desconocían la función de borrar la última cifra).




Figura 5. Ficha de la tarea de conocimiento sobre la máquina y momentos durante la realización de la segunda actividad

### *Ciclo medio*

En el primer curso de ciclo medio se propone como actividad para conocer la máquina, una tarea sobre la suma de los números representados en las teclas de la calculadora (ver figura 7) y como actividad de aprendizaje, un ejercicio en el que tienen que componer el número 25 con otros números sin utilizar la tecla del 5 porque está estropeada (ver figura 7).

Aprovechamos esta tarea para combinar el uso de la calculadora con el manejo de material manipulativo, en este caso las regletas haciéndoselas dibujar al lado una vez que las manipulasen.

### Evaluación de los resultados

El profesorado encontró las actividades muy interesantes y sobre todo muy relacionadas con los apren-

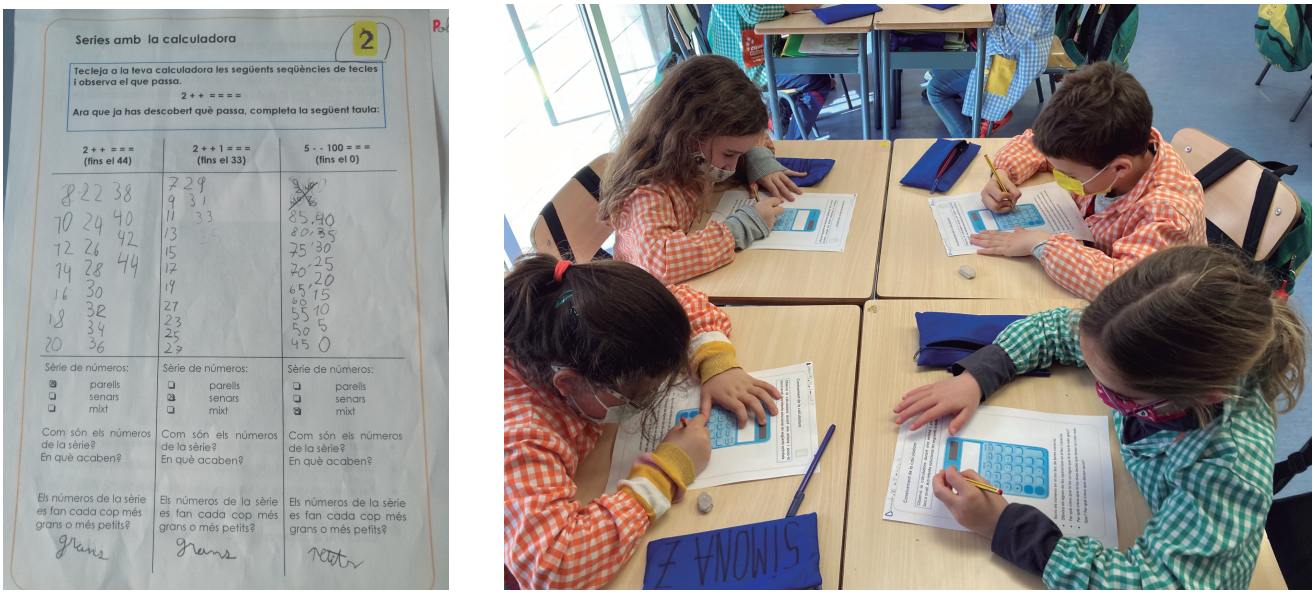



Figura 6. Ficha de la actividad sobe la seriación numérica y momento sobre su realización de 2.º curso de Educación Primaria

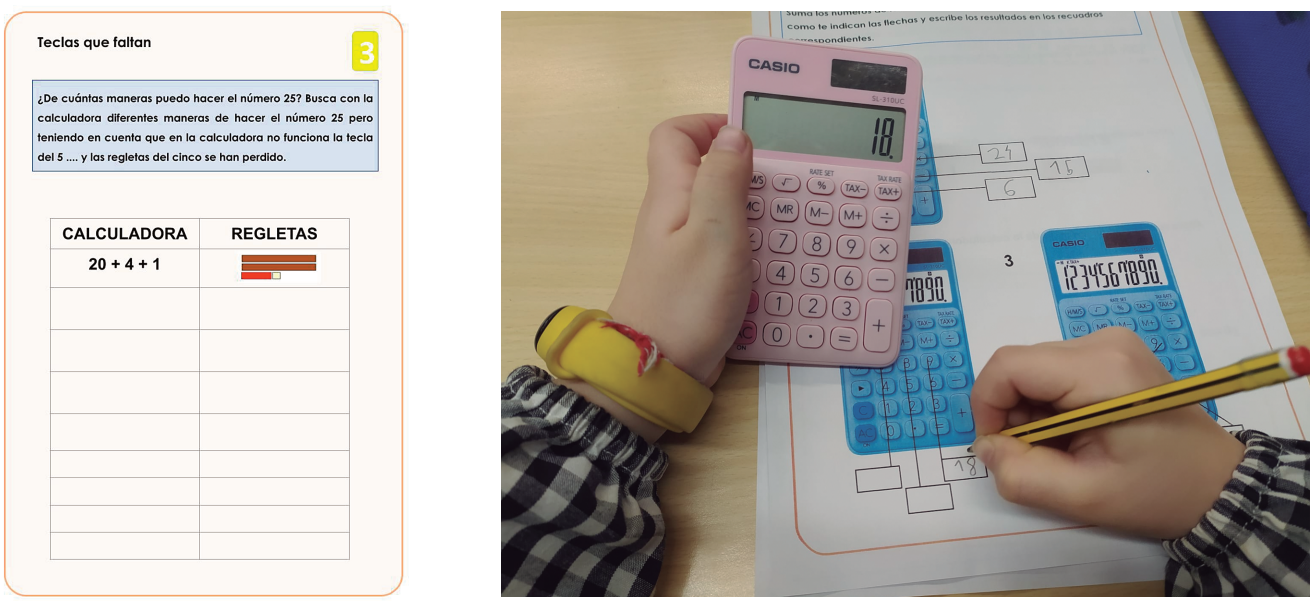



Figura 7. Ficha de la actividad presentada y momento sobre la realización de la primera tarea en 3.er curso de Educación Primaria

dizajes que en ese momento estaban desarrollando con su alumnado. Como muestra de esta reflexión se reproduce algunas de las conversaciones que se mantuvieron con el alumnado.

A la pregunta «¿Hay sumas (en el contexto de la primera actividad) que den el mismo resultado?» Un alumno contesta que sí y lo razona de la siguiente manera:

> Todos los amigos del 10 (aquellos números que sumados dan 10) al pasar por el cinco que está en el medio dan 1.

A la pregunta «¿Qué suman las teclas de la calculadora?» Un alumno contesta lo siguiente:

> 1+9=10 y más 2+8=20 y más 3+7=30 y más 4+6=40 y con el 5 hacen 45.

Con estos dos razonamientos vemos claramente que los niños y las niñas tienen muy bien integrados «los amigos del 10», y esta actividad facilitó y fomentó esta adquisición.

Cabe destacar que, como se recoge en la figura 8, una alumna aplica la descomposición de los números en sumandos para comprobar que las dos sumas dan el mismo resultado: el 24 se descompone en 12 + 12 y uno de los 12 se suma a 6 y forma el 18 de la otra suma.

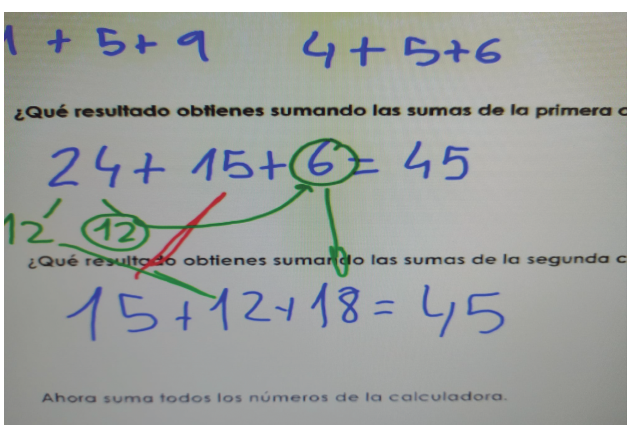



Figura 8. Respuesta de la actividad de una alumna de 3.er curso de Educación Primaria

En el segundo curso de ciclo medio se propone como actividad para conocer la máquina un ejercicio que consiste en descubrir el resultado de una historia haciendo unas operaciones combinadas para obtener un número y al darle la vuelta a la calculadora se podía leer una palabra (ver figura 9).

La actividad de aprendizaje se presenta a través de un juego, el conocido como tres en raya, sobre la multiplicación de números naturales (ver figura 9). Se trata de encontrar dos números más pequeños que 16 que multiplicados deben de dar como resultado algún número de la tabla presentada como tablero que recoge una serie de números (ver figura 9). Al jugarse en pareja, por turnos, uno debe intentar descubrir los números y el otro comprobar el resultado con la calculadora.

## Evaluación de los resultados

En la figura 9, realizada en cuarto curso, se muestra cómo el alumnado enseña sus calculadoras con la palabra «SELLOS» que es la respuesta al siguiente problema:

> Un valioso maletín es perseguido por 3 grupos de 15 ladrones cada uno. A cada grupo le persigue un valiente policía. Cuando los grupos llegan al escondite del maletín, los 3 policías detienen a todos los ladrones, comprobando que dentro del maletín siguen estando las 3761 valiosas antigüedades. ¿Qué contenía el maletín? Si quieres saberlo, multiplica todos los números que aparecen en esta historia y dale la vuelta a la calculadora.

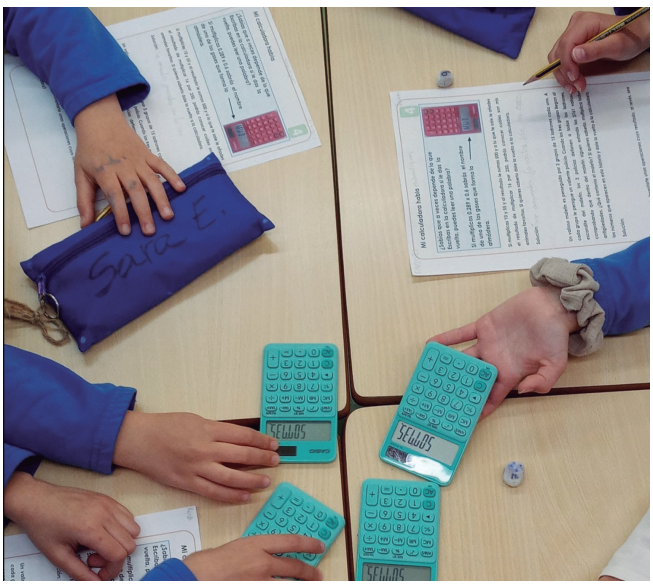
También se realizaron comentarios sobre la actividad del juego tres en raya, que son los siguientes:

> Qué divertido jugar repasando las tablas de multiplicar.

> No te das cuenta y estás haciendo multiplicaciones.

> Qué chulo comprobar las multiplicaciones de la compañera con la calculadora.

Además, cabe destacar también que algunos niños y niñas, al intentar buscar números que multiplicados den los de la tabla, hacen divisiones, con lo cual prac-



¡Juguemos al 3 en raya! 4

Para jugar a este juego lo primero que tenemos que hacer es buscar a un compañero o compañera y fichas de dos colores diferentes.

Cada jugador tiene que pensar en dos números/factores más pequeños que 16 que al multiplicarlos dé alguno de los números que se recogen en la tabla.

¡Vigilad!, porque hay dos números que no cumplen esta condición.

Cada jugador/a por turnos piensa un producto y lo dice en voz alta, el/la otro/a jugador/a lo comprueba con la calculadora y si es correcto tapa el resultado con una ficha de su color. Si no es correcto pasa el turno al otro/a jugador/a. Gana el jugador o la jugadora que primero consiga hacer un tres en raya (tres números de la misma fila, columna o diagonal).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 70 | 39 | 28 | 17 |
| 48 | 84 | 121 | 90 |
| 19 | 56 | 63 | 45 |
| 81 | 18 | 105 | 66 |

Figura 9. Momento que ilustra la realización de la primera actividad, y ficha de la segunda tarea presentada en 4.º de Educación Primaria

tican el concepto de que la multiplicación y la división son operaciones inversas, destacando este comentario de un estudiante:

> Si divido 39 entre 3 me da 13 por lo tanto $13 \times 3 = 39$.

Otras veces utilizan la compensación para encontrar factores que cumplan la propiedad de ser menores de 16, como este ejemplo que realizó una estudiante:

> Si divido $105 : 5 = 21$, por lo tanto $21 \times 5 = 105$ pero como 21 es mayor que 16 no cumple la norma y por lo tanto tenemos que buscar un número más pequeño y por compensación encontramos $7 \times 15 = 105$ que ya cumple la norma.

Cuando el docente les pregunta sobre los números que no cumplen la condición, el alumnado sabe que son el 17 y el 19, y contesta que solo hay una multiplicación posible para ellos: $1 \times 17 = 17$ y $1 \times 19 = 19$, y cuando pregunta si hay más números a los que les pase esto, algunos contestan que sí y ponen de ejemplos el 7, el 11, etc. En este momento, si se diera el caso podríamos completar la explicación poniendo nombre a este tipo de números: números primos.

### *Ciclo superior*

El objetivo que se persigue para el primer curso del ciclo superior es, como en los casos previos, el conocimiento y familiaridad con la calculadora como herramienta en sí, que en este caso se realiza a través de varias tareas donde se debe de operar con las teclas, y dibujar sobre ellas (consultar la figura 10). En concreto, la primera actividad consistía con ayuda de las teclas numéricas de la calculadora, que compusiesen números con dos dígitos y luego con los mismos dígitos en diferente orden restasen los números, es decir: con el 8 y 5, tenían que operar $85-58$; con 7 y 4, $74-47$; con 9 y 6, $96-69$; con 1 y 4, $41-14$; con 5 y 2, $52-25$; y con 3 y 6, $63-36$. Y luego utilizando estas mismas teclas numéricas simulando como puntos o vértices de un geoplano, tenían que realizar diferentes figuras geométricas.

### Evaluación de los resultados

Durante la realización de la ficha sobre el cálculo de las diferentes restas, después de unos breves momentos de sorpresa por la coincidencia en los resultados (la diferencia siempre es 27), los y las estudiantes se pusieron a buscar la razón de la igualdad y enseguida dieron con ella, dando esta serie de respuestas:

> Todas las restas dan 27 porque lo único que hemos hecho es aumentar uno tanto a las decenas como a las unidades y por lo tanto la distancia sigue siendo la misma, 27.
>
> El resultado entre las primeras restas y las segundas es el mismo porque entre las teclas hay la misma distancia, 3.
>
> El resultado de la resta entre las teclas de la primera fila y la última es el doble que las otras restas, 54, porque la distancia entre las teclas también es el doble, 6.

Estos descubrimientos llevaron al alumnado a descubrir otras regularidades que se esconden bajo las teclas numéricas colocando de una forma u otra sus cifras, como las siguientes:

> Hemos descubierto que si restamos en diagonal 95−59=36 y 51−15 también da 36 y si restamos los números de la otra diagonal 75−57=18 y 53−35 también da 18.
>
> Hemos descubierto que si restamos en filas de dos en dos también nos da igual: 89−56=33 y 78−45=33.
>
> Si restamos por columnas 963−852=111 y 852−741= =111.
>
> ¡Claro!, porque la distancia entre las teclas es 3 cuando restas filas y 1 cuando restas columnas.

Gracias a todos estos descubrimientos, indagaciones o demostraciones el alumnado refuerza la idea de que, si a los términos de una resta le sumas o le restas la misma cantidad, la resta obtenida tiene el mismo resultado.

Con la otra ficha presentada cambiamos totalmente el escenario, pasamos de hacer restas de forma exhaustiva, a dibujar triángulos, cuadrados, rectángulos y trapecios de todos los tamaños y medidas. En esta actividad cabe destacar un aspecto muy importante que es la capacidad de mostrar los resultados de forma ordenada y siguiendo unas pautas para evitar dejarnos ninguna respuesta.

Como muestra del trabajo realizado, en la figura 11 se recogen los cuadrados obtenidos en el que está incluida la respuesta a la pregunta «¿Cuántos cuadrados podemos dibujar teniendo en cuenta que los vértices no pueden ser consecutivos?

En segundo curso de ciclo superior nos propusimos como actividad para conocer la máquina un ejercicio sobre los cuadrados mágicos y como actividad de aprendizaje una ficha donde se comparan las fracciones con su expresión fraccionaria y su porcentaje.

## Evaluación de los resultados

Las chicas y los chicos de sexto ya habían trabajado el curso anterior los cuadrados mágicos a partir de

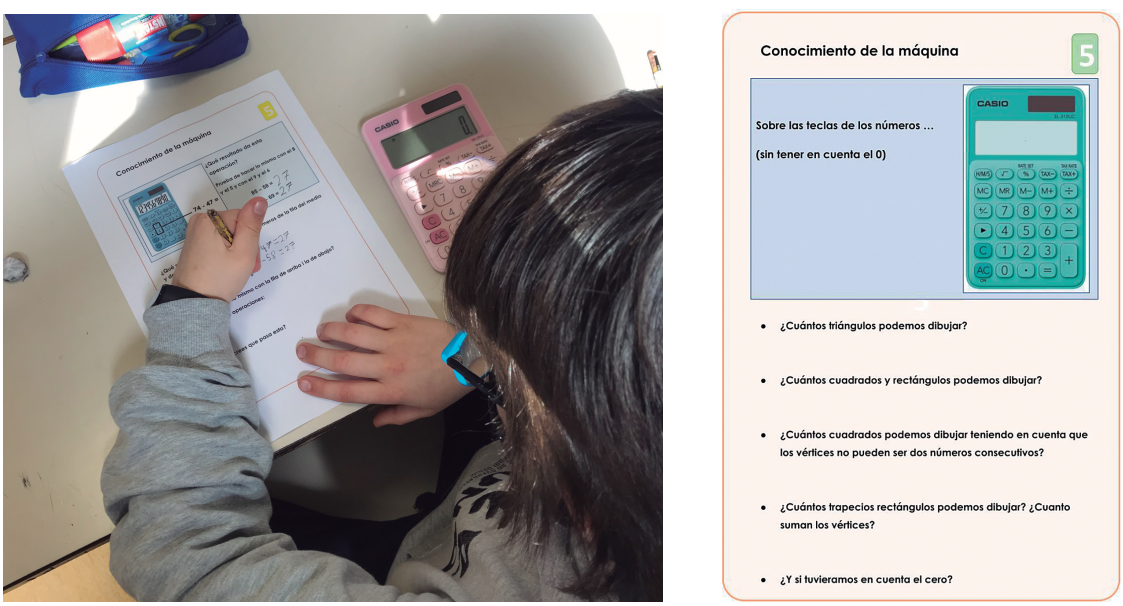



Figura 10. Actividades sobre el conocimiento de la calculadora para 5.º curso de Educación Primaria

los cuadrados mágicos de Durero y de Gaudí, por lo que el concepto ya lo tenían claro y lo único que tenían que hacer era convertir el teclado de una calculadora en un cuadrado mágico (ver figura 12).

Como la tarea no era fácil utilizamos un video de Lídia Molina Ribera (que se puede consultar aquí: <https://www.youtube.com/watch?v=nBsOSEm9rFI>) para iniciar la actividad y corregir los posibles resultados. Aunque una de las alumnas descubrió muy rápidamente la solución y al preguntarle cómo lo había hecho, nos comentó que había leído unos libros titulados *Resuelve el misterio* donde había tenido que resolver un cuadrado mágico como este.

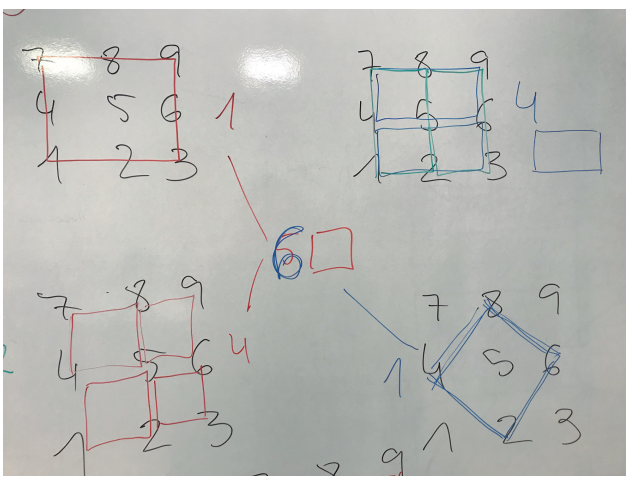
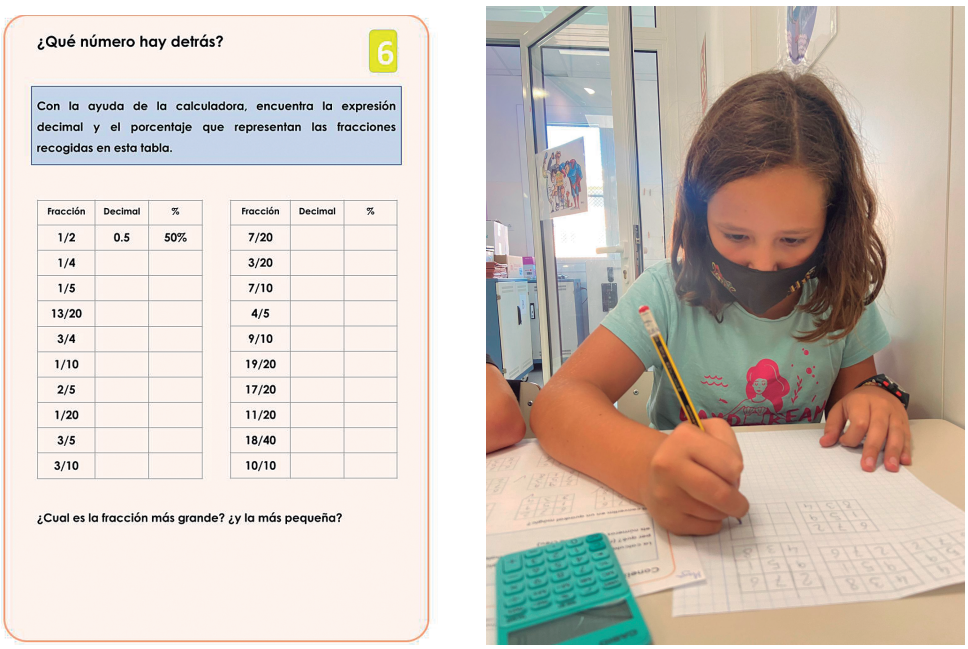


Figura 11. Cuadrados y rectángulos que se realizaron durante la experiencia en el aula

La ficha (ver figura 12) que relaciona las distintas expresiones de un número racional (fracciones, decimales y porcentajes) ha sido muy bien acogida y valorada por el profesorado, ya que se destacó que sirvió a modo de conclusión del trabajo que estaban haciendo en el aula. Hace años, en el centro educativo estos temas se trabajaban de forma separada y aislada, y pocas veces el alumnado veía la relación entre las tres expresiones. Desde que nos propusimos trabajar estos tres aspectos de forma conjunta la mejora de la comprensión por parte del alumnado ha sido muy clara.

## Valoración global y conclusiones

Como se ha expuesto, el trabajo con la calculadora en el aula permite focalizar las actividades en los procesos de razonamiento ya que los mecanismos los resuelve la máquina.



¿Qué número hay detrás? 6

Con la ayuda de la calculadora, encuentra la expresión decimal y el porcentaje que representan las fracciones recogidas en esta tabla.

| Fracción | Decimal | % |
|---|---|---|
| 1/2 | 0.5 | 50% |
| 1/4 | | |
| 1/5 | | |
| 13/20 | | |
| 3/4 | | |
| 1/10 | | |
| 2/5 | | |
| 1/20 | | |
| 3/5 | | |
| 3/10 | | |

| Fracción | Decimal | % |
|---|---|---|
| 7/20 | | |
| 3/20 | | |
| 7/10 | | |
| 4/5 | | |
| 9/10 | | |
| 19/20 | | |
| 17/20 | | |
| 11/20 | | |
| 18/40 | | |
| 10/10 | | |

¿Cual es la fracción más grande? ¿y la más pequeña?

Figura 12. Ficha y momento de realizar la experiencia en 6.º curso de Educación Primaria

Un planteamiento transversal de la calculadora en los diferentes niveles educativos permite «normalizar» su uso y facilitar un recurso que tienen fácilmente a su disposición, como calculadora en sí o como una aplicación de móvil.

El manejo de la calculadora no «compite» con el uso de los mecanismos vinculados a las operaciones básicas, sino que los complementa. Permite acelerar el proceso o facilitar (según los casos) el proceso de cálculo sin evitar el procedimiento mental que lleva a su uso. Es importante en este sentido tener en cuenta dónde focalizamos el trabajo que queremos llevar a cabo.

El uso de la calculadora puede sustituir el proceso del cálculo en aquellos casos de necesidades educativas en que esta herramienta sustituya el proceso cuando este, por dificultades determinadas, no sea posible. En este sentido, se convierte en una inestimable herramienta de atención a la diversidad. En el resto de los casos, actuará como un elemento facilitador que no sustituye la comprensión del procedimiento realizado, sino que facilita o acelera su resolución.

Un patinete no evita saber andar, una hoja de cálculo no evita conocer las operaciones que puede realizar, un tratamiento de textos no evita aprender a escribir. Simplemente son herramientas, que bien utilizadas y, en el momento oportuno, permiten invertir los esfuerzos en la adquisición de nuevos procesos y conocimientos sin ralentizarlos.

Así, es importante un planteamiento transversal del uso de la calculadora para su óptimo provecho como recurso educativo, como en las tecnologías del aprendizaje y conocimiento o en cualquier otro material. Los resultados conseguidos de esta forma tienen un efecto multiplicador en cuanto a su eficacia y un uso incorporado a la realidad cotidiana.

Por último, la autora querría insistir en la posibilidad que ofrece la calculadora de poder priorizar las estrategias y los razonamientos por encima del cálculo en sí. Esto no les resta importancia a los mecanismos que, imprescindiblemente, se deberán trabajar, sino que permitirá desarrollar competencias y estrategias en el alumnado que la calculadora, en ningún caso, podrá llevar a cabo.

Como propuestas de mejora para este curso, la autora se ha planteado solicitar a las maestras y a los maestros sus preferencias para trabajar en el aula e introducir nuevas actividades que respondan más a aquellos conocimientos que estén trabajando en el momento de llevarlas al aula. También en esta segunda «fase» pediré al profesorado que haga una evaluación de la experiencia a través de un formulario, para poder tener más información para mejorar en las propuestas educativas con la calculadora.

## Referencias bibliográficas


Burgués, C., y J. Sarramona (2013), *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació primaria,* Direcció General d'Educació Infantil i Primària, Barcelona.

Canals, M. A. (1986). *El càlcul mental i la calculadora I,* Eumo Editorial, Barcelona.

*Currículum: educació primària. Elaboració: Servei d'Ordenació Curricular d'Educació Infantil i Primària* (2017), Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament, Barcelona.

*Currículum i orientacions: educació infantil: segon cicle. Elaboració: Servei d'Ordenació Curricular d'Educació Infantil i Primària* (2017), Generalitat de Catalunya. Departament d'Ensenyament. Servei de Comunicació i Publicacions, Barcelona, 2016.

Pikler, E. (1984), *Moverse en libertad: Desarrollo de la psicomotricidad global*, Narcea Editorial, Madrid.



Tuti Comalat i Navarra
Escola Guinardó SCCL, Barcelona
<tuticomalat@gmail.com>

DIARIO DE EXPERIENCIAS MATEMÁTICAS

# Geometría estelar

Susanna Morell Torrens
Catalina Maria Pizà Mut
Maria Àngels Portilla Rueda

SUMA+ núm. 98
pp. 81-92
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

Antes de iniciar una propuesta en el aula, los maestros pensamos una actividad motivadora que genere expectativas y que nos sirva para recoger los conocimientos previos que tienen nuestros alumnos del tema en concreto.

Ayudados por el currículum de nuestra comunidad autónoma decidimos qué objetivos y contenidos deseamos que alcancen, a fin de que adquieran competencias matemáticas. Diseñamos una secuencia de actividades para este fin, establecemos la organización en espacio y tiempo más adecuada, escogemos los materiales que utilizaremos y pautamos la evaluación a lo largo de la propuesta.

Todo esto lo pensamos, lo redactamos y elaboramos la programación correspondiente, pero como nos gusta que nuestras aulas sean bidireccionales y activas, no profundizamos en la planificación, dejando espacio a las intervenciones de los alumnos, a sus propuestas y preguntas, teniendo siempre como guía la idea inicial.

## Propuestas programadas

Nuestro objetivo principal en este caso es trabajar la geometría a partir de la observación de las constelaciones. Para ello, planificamos la propuesta en tres bloques de actividades que incluyen la familiarización con el problema, la introducción de nuevos conocimientos y la crecación propiamente dicha por parte de los alumnos y alumnas:

— Descubrimiento del calendario zodiacal, como una actividad de divulgación científica para dar a conocer el origen de nuestro calendario.
— Conocimiento de los elementos geométricos de las constelaciones, como punto, tipos de línea, ángulos, polígonos...

— Diseño de una constelación, como expresión de la creatividad.

## Descubrir el calendario zodiacal: La importancia de las preguntas

### ACTIVIDAD MOTIVADORA

Los alumnos se encuentran con 12 láminas plastificadas a tamaño DIN A3, colgadas en la pared formando una elipse; todas ellas representan distintas constelaciones zodiacales. Se asigna un código no numérico para cada constelación y se ordenan según aparecen en la eclíptica. El objetivo de esta presentación es simular el zodíaco, que es la franja imaginaria que permite dividir la esfera celeste en doce partes iguales y en la que aparentemente se desplazan el Sol, la Luna y los principales planetas; esta zona es conocida como eclíptica, ya que sobre ella se producen los eclipses. La figura 1 muestra un alumno eligiendo su constelación.



Figura 1. Eligiendo constelación

Sin ninguna explicación previa se les pide que hagan el recorrido de la elipse, observen las láminas (figura 2) y se sitúen debajo de la imagen que más les guste o con la que se sientan más identificados.

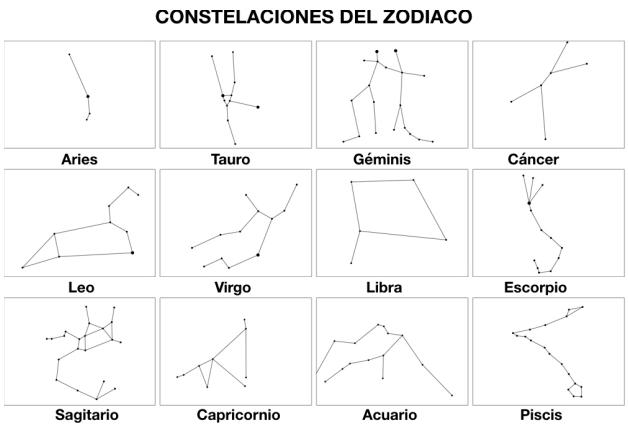



Figura 2. Constelaciones zodiacales

Previamente han respondido por escrito las siguientes preguntas:

1. ¿Qué imagen escoges?

En la figura 3 se muestran las elecciones de los alumnos.

2. ¿Por qué has escogido esta imagen?

La gran mayoría de los alumnos escogen una de las constelaciones que puedan relacionar con un objeto, animal o letra que sea de su agrado.

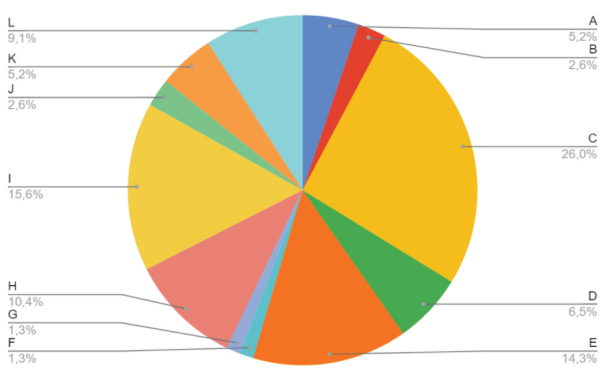



Figura 3. Elección de los alumnos. A: Aries; B: Tauro; C: Géminis; D: Cáncer; E: Leo; F: Virgo; G: Libra; H: Escorpio; I: Sagitario; J: Capricornio; K: Acuario; L: Piscis

Ven grúas al revés, trenes, cohetes, varitas mágicas, lazos de vaqueros, montañas, la bandera de España, flores, caballitos de mar, cisnes, jirafas, cocodrilos, patos, dragones, ratones, serpientes, caballos y las letras J, D, L, K.

Géminis ha sido con diferencia la constelación más elegida por los alumnos, si bien la escogen en todos los grupos lo hacen de manera más acusada en los cursos altos, en los que la amistad y el amor ya tienen un peso considerable. Algunas de las razones de esta elección son:

— Es la más rara, tiene una forma extraña, pero seguro que representa una cosa muy bonita.
— Parece una rana en un nenúfar mirando a alguna parte.
— Son dos amigos que se dan la mano.
— Dos personas bailando.
— Dos personas jugando.
— Una pareja de enamorados que se dan la mano.
— Una imagen geométrica.

3. ¿Qué crees que representa?

Muchos de los alumnos contestan lo mismo en las dos preguntas; aquí, algunas de las respuestas:

— Un cuadro de un pintor.
— Una cosa que está en el cielo.
— Un mapa muy largo.
— Es para los ciegos, que ven puntos.
— Un plano, un camino simulado.
— Un niño y una niña paseando por la noche, he dicho noche porque es una constelación.
— Una cosa elegante, una constelación.
— Que el amor es lo mejor del mundo.
— Representa la amistad.
— Mi horóscopo.

¿Cuál ha sido el papel del maestro? ¿Qué hecho para crear una situación de aprendizaje?

1. Crear un ambiente relajado.
2. Crear expectación.

¿Qué dificultades se han encontrado? ¿Qué nos hemos tenido que replantear?

1. Las preguntas iniciales no son suficientemente claras o tal vez demasiado abiertas.

## CONOCIMIENTOS PREVIOS

Seguidamente la maestra los reubica debajo de la constelación que representa su signo del Zodiaco, todo ello, también, sin ninguna explicación.
Se les comenta que realmente, esa lámina donde ahora están situados, es la que les corresponde, que no es aleatoria y que tienen que pensar por qué creen que les «toca» esa, es decir, qué criterio se ha seguido para la reagrupación.

La conversación que se da entre los alumnos para llegar a descubrir la organización del calendario zodiacal es muy distinta según la edad:

— Son letras de nuestro nombre.
— Estamos juntos porque nos gusta el chocolate.
— Porque tenemos el pelo rizado.
— Porque tenemos la L en nuestro nombre (refiriéndose a Piscis).
— Porque parece un limpiafosas, lo parece y a mí me gusta (refiriéndose a Acuario).

En el caso de los más pequeños, el maestro debe realizar muchas preguntas para dirigir la conversación y para rebatir algunas afirmaciones, «porque a todos nosotros nos gusta el chocolate», con contraargumentos, «a mi también y no estoy en vuestro grupo», e incluso para ofrecer datos. Los alumnos que se encuentran solos en una constelación buscan algún gusto o afición personal.

Solo algunos alumnos tienen algún argumento más elaborado, pero que tampoco saben explicar mucho más:

— Dicen que si naces un día te toca un horóscopo. Yo soy tauro.
— Creo que esa (refiriéndose a Libra) es la Osa Mayor.
— Esa (señalando Tauro) es la de mi hermana.

Con «buenas» preguntar aparecen argumentos más elaborados, coherentes y con argumentación:

— Celebramos el aniversario el mismo mes o muy cerquita.

En cambio, en el caso del segundo ciclo, la conversación se desarrolla entre los propios alumnos, que por una parte formulan hipótesis: «todos hemos nacido en el mismo mes», y por otra las rebaten «no, tu eres de diciembre y yo de enero». Consecuentemente las reformulan «pero los meses están cerca»… así, hasta que llegan a una conclusión aceptada por todos. No siempre es cierta, es necesario decirlo, aunque en este caso sí lo fue y se pudo comprobar con la presentación del calendario. Así, en cada signo del Zodiaco se han agrupado los alumnos que han nacido al final de un mes y al principio del siguiente (figura 4).

Parece, pues, que se evidencia la importancia de hacer preguntas, de posibilitar que los alumnos las formulen, también de animarles a intervenir sobre las aportaciones de los compañeros... ya que es un entrenamiento útil, para desarrollar y adquirir el proceso de razonamiento y prueba (razonamiento, argumentación, comunicación, toma de decisiones, rigor…).

Se evidencia también que el bagaje cultural/personal supone un anclaje para dichos razonamientos. Por ello, como profesionales, debemos tenerlo presente y promover actividades que amplíen el conocimiento cultural.

¿Cuál ha sido el papel del maestro?

— Ofrecer tiempo y espacio para que los alumnos formulen sus propias preguntas desde pequeños.




Figura 4. Ejemplo de calendario zodiacal

— Recoger las aportaciones y compartirlas con el grupo sin emitir juicios.
— Formular preguntas abiertas para redirigir la conversación.
— Presentar contraargumentos.

¿Qué dificultades se han encontrado? ¿Qué nos hemos tenido que replantear?

— Dificultad de los alumnos para buscar argumentos comunes, y no tan personales.
— Falta de conocimientos previos respecto a la temática.
— Resumir por parte del maestro las intervenciones de los alumnos.

## Propuesta divulgativa: Origen del calendario. La importancia de una buena base teórica

### PRIMERA PRESENTACIÓN: LA HISTORIA DEL CALENDARIO

Aprovechando la temática que hemos iniciado, queremos dar a conocer a nuestros alumnos, de forma breve, el origen de nuestro calendario. La propuesta la llevamos a cabo a partir de 2.º de primaria. Ellos tienen tan interiorizado el contaje de los días, semanas, meses, estaciones, años…, que ni se plantean que en algún momento de la historia pudiera haber sido diferente.

Preparamos una primera presentación titulada «El Origen del Calendario». Iniciamos nuestra historia explicando que hace mucho tiempo, la gente que vivía en la Tierra no tenía ni calendarios ni relojes para ubicarse en el tiempo. Así, los elementos que observaban en el cielo, la Luna, el Sol y las estrellas, son los que empezaron a darles pistas. Los babilonios fueron una de las civilizaciones que ya dedicaron su tiempo al estudio del cielo. Construcciones como los zigurats pretendían ser morada de los dioses, los cuales enviaban desde el cielo señales a los sacerdotes. Los egipcios fueron otra de las civilizaciones que también dedicaron su tiempo al estudio del cielo, dando ya los primeros apuntes del calendario.

Cuando Sirius, la estrella más brillante de la constelación Canis Major, aparecía en un determinado punto del cielo, se iniciaba la «crecida del río Nilo», marcando el inicio de una de las tres estaciones del calendario egipcio.

Con la llegada de los romanos se inició el gran cambio en nuestro calendario. El rey Rómulo dividió el año en 10 meses, dedicando los 4 primeros a Marte, Venus, a las personas mayores y al rey Juno. El resto se le otorgó un nombre haciendo referencia a su posición en el calendario (número ordinal). El sacerdote Numa Pompilio decidió añadir 2 meses más al calendario, ya que las estaciones a lo largo del tiempo habían quedado descuadradas. Así, los añadió a principio de año y los dedicó al dios Janus y a los muertos. Con la llegada de Julio César, y con ayuda del astrónomo Sosígenes de Alejandría, se añadieron los años bisiestos y, a su muerte, se le dedicó un mes, Julius. Con la llegada de César Augusto, se estableció el número de días que debía tener cada mes y un mes adquirió su nombre, August. Finalmente, el papa Gregorio XIII, en el año 1582, fue quien implantó el calendario hasta ahora explicado como el calendario oficial. De ahí el nombre de calendario gregoriano.

El objetivo de esta sesión es dar a los alumnos unos conocimientos científicos y matemáticos para poder entender nuestro mundo actual.

## SEGUNDA PRESENTACIÓN: EL CAMINO DEL SOL

Para profundizar aún un poco más en el conocimiento del cielo, se prepara una segunda presentación titulada «El camino del Sol». Esta pretende explicar, de forma muy visual, cómo el Sol, desde el punto de vista de la Tierra, parece desplazarse en el cielo recorriendo las doce constelaciones del Zodíaco, lo que se conoce como eclíptica.

Además, permite reflexionar sobre los horóscopos ya que el que se adjudica a cada persona no se debe a la constelación que se ve en el cielo en el momento de nacer, sino a la constelación que no podemos ver debido a la posición del Sol, el cual se sitúa, precisamente, entre la Tierra y dicha constelación.

La figura 5 incluye una explicación: Si por ejemplo, eres leo, por la noche, durante las semanas en las que el Sol esté situado como se aprecia en la imagen, dicha conselación quedará fuera de tu campo de visión; a tu espalda, por decirlo de alguna manera.

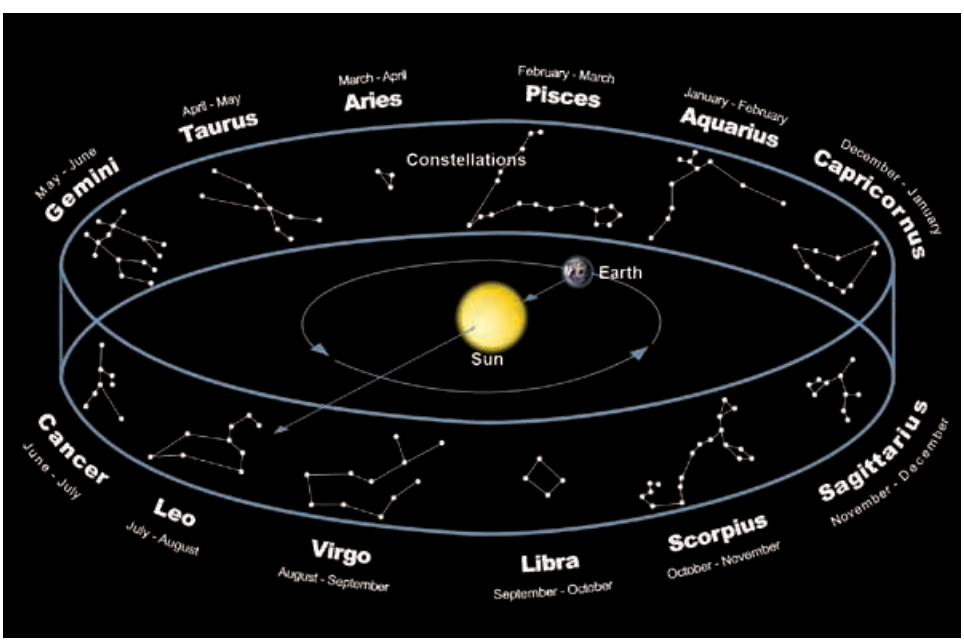



Figura 5. Eclíptica

¿Cuál ha sido el papel del maestro?

— Adaptar un texto divulgativo al nivel de comprensión de los alumnos.

¿Qué dificultades se han encontrado? ¿Qué nos hemos tenido que replantear?

— El grado de abstracción.
— La organización mental del espacio.
— Necesidad de añadir una actividad individual y concreta para mejorar la comprensión («Marca con una cruz donde estaba situada la Tierra en el momento de tu nacimiento», «¿Qué estación del año era en el hemisferio norte?», «Indica dónde estaría la Tierra en el caso de las otras estaciones. Escribe el nombre», «Escribe el nombre de las constelaciones por orden, comenzando por Aries, inicio del año solar»).

## Conocer los elementos geométricos de las constelaciones: La necesidad de tener un bagaje amplio de recursos

Una vez que todos sabemos que hablamos de constelaciones, nos centramos en analizarlas desde diferentes puntos de vista.

A los alumnos de 1.º y 2.º de primaria les decimos que se fijen en las figuras, en líneas abiertas o cerradas y en líneas curvas y rectas. Estos dos últimos conceptos ya los habían trabajado previamente en el aula. A pesar de ello, nos da la sensación de que los niños van «perdidos» a la hora de responder, que la observación no es suficiente para adquirir y afianzar los objetivos propuestos. Así, ante este contratiempo, incorporamos un material manipulativo, el geoplano, que nos permitirá hacer de puente entre la cotidianidad y las matemáticas. Una vez que han experimentado el material libremente, procedemos a dar pequeñas instrucciones para representar: un camino largo, un camino corto, un camino abierto, un camino cerrado, una figura de 3 lados, una figura de 4 lados, una figura de 5 lados, una figura de 3/4/5 lados que sea diferente a la representada… Todavía no ponemos nombre a las figuras, porque ahora lo que nos interesa es centrarnos en los elementos comunes y diferentes (figura 6).

Algunos alumnos presentaban dificultades ante la diferencia entre líneas curvas o rectas. Así, se propuso salir un día al patio a hacer caminos y recorridos para aclarar el concepto.

En cursos superiores el bagaje sobre estos conceptos es mayor y la observación y el diálogo es suficiente para poner nombre o identificar todos los elementos.

### CLASIFICAR CONSTELACIONES

Una vez conocidos los elementos en los más pequeños y recordados para el resto, les proponemos que clasifiquen las constelaciones, que ellos elijan el criterio.

A menudo usan más de un criterio para clasificar, especialmente en los grupos de primer ciclo, y a cada grupo le asignan uno, el que les interesa en aquel momento. Así, se hace imprescindible proponer contraejemplos, hacer preguntas que pongan en duda esa clasificación…

Algunas clasificaciones que surgen son:



Figura 6. Experimentando con el geoplano

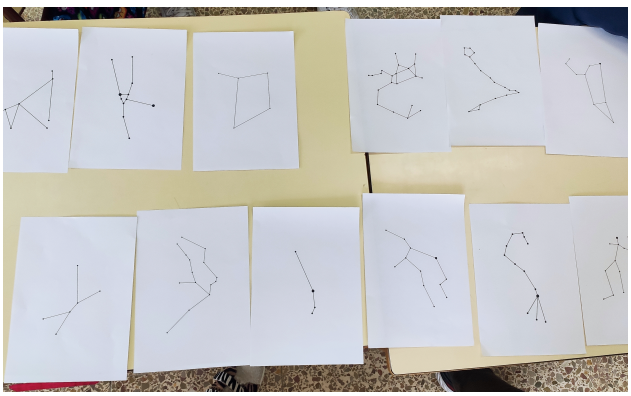


Figura 7. Ejemplo de clasificación

— Por número de lados.
— Por líneas abiertas y cerradas.
— Por elementos que imaginan: tienen cuernos, tienen 4 patas.
— Por si presentan o no formas geométricas.

Estos criterios se entremezclan entre ellos, tal como hemos detallado.

Después de observar y dialogar, la mayoría de grupos deciden volver a clasificarlas según las figuras que observan. Resultan curiosos los títulos que ponen a cada agrupación:

Para constelaciones que presentan figuras de 4 lados:

— Las 4 líneas
— Las 4 puntas

Para constelaciones que presentan figuras de 3 y 4 lados:

— El grupo del 7
— Los *trirrectángulos*
— Las 3 y 4 lados

Para constelaciones que presentan figuras de 3 y 5 lados:

— El grupo del 8
— Las 3 y 5 lados

A pesar de la diversidad de títulos, todos coinciden en que existen constelaciones en las que aparecen figuras geométricas y otras en las que no.

Finalmente, decidimos poner un nombre a todas estas figuras que estamos observando.

— Las figuras de 3 lados no presentan dificultad alguna, todos rápidamente le asignan el nombre de triángulos.
— Para las figuras de 4 lados, mayoritariamente sale el nombre de cuadrado y rectángulo. Volvemos a los contraejemplos y a las preguntas para romper la idea previa. Algún alumno los llama «cuadrígonos». Finalmente, la maestra propone el nombre de cuadrilátero para poder dar cabida a todas las figuras de 4 lados. Analizamos la palabra: 4 lados, para que les sirva de ayuda y recordatorio.
— Para las figuras de 5 lados son los mismos alumnos quienes empiezan a hacer una lluvia de ideas a partir de conocimientos previos y del descubrimiento de los cuadriláteros. Así, salen «pentiláteros», «quintiláteros» y, finalmente, pentágonos.
— Lo mismo ocurre con las figuras de 6 lados. Aparecen «sixtágonos», «hexígonos» y finalmente, hexágonos.

A los alumnos de segundo ciclo se les pregunta qué elementos geométricos o matemáticos observan en las distintas constelaciones que se van proyectando y es entonces cuando aparece el vocabulario pertinente: Líneas rectas (horizontales, verticales y oblicuas), líneas abiertas, polígonos (triángulos, cuadriláteros...), puntos, vértices, ángulos y su clasificación según la abertura, lados, simetría, giros, longitud (más largo, más corto)… No todos los alumnos utilizan el vocabulario estándar, aunque con las aportaciones del grupo se amplía el abanico personal. Así, palabras como las que hay a continuación se van sustituyendo por otras más precisas. Las palabras que más cuesta sustituir son:

— «Torcida» por oblicua.
— «Cuadrados» por cuadriláteros.

— «Cincágono» por pentágono.
— «Sexágono», por hexágono.
— «Punta» por vértice.
— «Figura, forma» por polígono.

## ÁNGULOS

La noción de ángulo la iniciamos en 3.º de primaria, teniendo en cuenta que diferencian entre ángulos agudos, rectos u obtusos.

A través de la observación van descubriendo los ángulos que observan en las constelaciones.

En cursos superiores se añade el reconocimiento de otros tipos de ángulos a partir de su medida, como los llanos, completos, consecutivos, complementarios, suplementarios, cóncavos y convexos…, así como el uso del transportador para medir ángulos.

En un primer momento se utilizan plantillas con ángulos predeterminados de 5°, 10°, 20°, 30°, 45°, 60°, 90°, 100°, 120°, 180°, 270° y 360°. Se comprueba que estas plantillas son muy útiles para potenciar la estimación, puesto que se aventuran a predecir, por ejemplo, que el ángulo de abertura de la puerta está entre 20° y 30°; a la vez que pueden comprobar el cálculo estimativo de forma muy rápida. Ellos mismos juegan a combinar plantillas y elaboran las que necesitan a partir de las anteriores, como la de 25° (20° + 5°), 80° (60° + 20°)... Se discute si la plantilla de 80° es verdaderamente de 80° o de 90°, ya que a simple vista es difícil de discernir. Se comprueba al momento colocándola en una esquina de un folio. (figura 8). Para el cálculo exacto utilizamos el transportador.

A la hora de medir los ángulos de sus propias constelaciones surge la necesidad de especificar el ángulo que están midiendo, pues algunos de ellos están muy juntos. Por eso, se les ofrece la convención de nombrar las 3 estrellas que determinan cada ángulo con una letra del abecedario.¡Les parece muy práctico! En ese momento algunos alumnos se plantean si medir la parte «de dentro» o la parte «de fuera» y así es como aparece de forma simple la diferencia entre ángulos convexos y cóncavos.



Figura 8. Plantilla para medir ángulos

Como curiosidad, se puede comentar que surge la duda de cómo medir un ángulo de más de 180° con un transportador. Hay dos aportaciones:

— Imaginar un ángulo plano alargando un lado y medir únicamente el ángulo que queda, para sumarlo posteriormente a los 180°.
— Medir el ángulo interior y restarlo de los 360° del completo. Esta es la aportación con mayor éxito.

También aparece el concepto de ángulo consecutivo, pues de algunas de sus estrellas sale más de una línea y consecuentemente se obtienen dichos ángulos.

¿Cuál ha sido el papel del maestro?

— Proporcionar un material para resolver dudas y conceptos (geoplano y plantillas de ángulos).
— Ofrecer tiempo y espacio para que los alumnos dialoguen y contrasten sus hipótesis.
— Ofrecer el vocabulario matemático preciso.

¿Qué dificultades se han encontrado? ¿Qué nos hemos tenido que replantear?

— Dificultad para encontrar un único criterio común a la hora de clasificar.
— Necesidad de un lenguaje matemático consensuado, se inventan los nombres de las figuras geométricas cuando no las conocen.

## Diseñar una constelación. Expresión de la creatividad

Posteriormente realizan el diseño de una posible constelación en un papel con las siguientes consignas:

— Dibujar entre 5 y 10 puntos (las estrellas de la constelación).
— Unirlos con líneas rectas (distancia entre las estrellas), formando una figura.

En la figura 9 se muestra un ejemplo de los alumnos. Una vez han creado la constelación con sus 5, 6, 7, 8, 9 o 10 puntos, resulta que la cantidad de líneas puede resultar muy elevada y, aunque ya prevemos las dificultades que pueden surgir a la hora de representarla con el material de gomaeva, decidimos esperar a que sean ellos los que se vean la dificultad y busquen alternativas. En esta situación se encuentran los alumnos más pequeños, ya que los alumnos de cursos superiores realizan creaciones estructuralmente similares a las constelaciones y no se exceden en el uso de líneas. Los diseños en ambos ciclos son muy variados y originales: en los cursos inferiores, las creaciones suelen estar más relacionadas con la vida real: animales, vehículos, objetos cotidianos…, mientras que en los cursos superiores la abstracción está más consolidada (figura 10).Todos ellos nombran sus constelaciones con palabras tan sugerentes como las que se han puesto a lo largo de la historia. Estas son algunas de ellas:

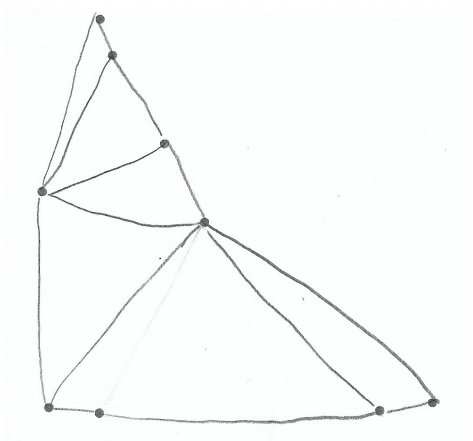


Figura 9. La montaña del Polo Norte

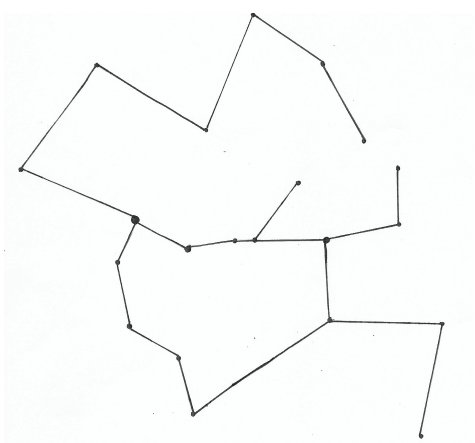


Figura 10. *Casmi*

— Animales o partes de animales: erizo, serpiente, caracol, doble pico, reno, ballena, ojo de dragón.
— Seres mitológicos: centauro, caballo de tres colas.
— Objetos: corona de dos puntas, la casita, la equis del tesoro, la cometa desigual, cara de nadie, mueble con televisión.
— Palabras inventadas: *zexu*, la *flexfletxa*, *licir*, *estritum*, *cuxiflu*, *susami*, *ospau*, *amberthos*, *casmi*.
— Palabras en otros idiomas: *familj* (familia en sueco).
— Combinación de palabras: *uniari* (unicornio Ariadna).
— Palabras relacionadas con el espacio: estrella, laika.
— Palabras con componente geométrico: *exsquadripenta*, *triguatatel*, *triacuper*, *quintimal*.

### REALIZACIÓN DEL MODELO CON MATERIAL

En el primer ciclo, una vez realizado el modelo en papel, nos apoyamos en materiales manipulativos, concretamente en el geoplano que, una vez más, nos ayuda en el camino de afianzar conocimientos y representar la constelación creada. Algunos alumnos obvian partes de la constelación conscientemente, ya que, o bien no les cabe, o bien la estructura en el

papel es demasiado complicada para representar con elásticos. Otros recrean la constelación de forma simplificada y, otros, sencillamente no son fieles a la constelación representada en el papel (figura 11). A continuación se les proporciona el material para que realicen con él la maqueta de «su» constelación: tiras de goma eva de dos longitudes, agujereadas cerca de los extremos o en el medio y encuadernadores para unirlas (figura 12).

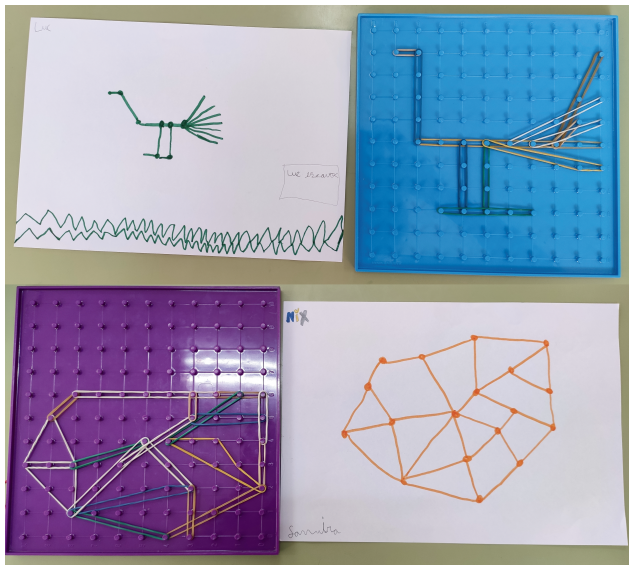


Figura 11. Constelaciones en el geoplano



Figura 12. Material utilizado: Tiras de goma eva de dos longitudes

Una de las principales dificultades con las que se encuentran a la hora de crear es que el material no se adapta al diseño. Se presentan dos medidas, pero en sus representaciones tienen uniones entre estrellas de muchas medidas diferentes. Otra complicación es la dificultad de elaborar alguno de los modelos. Así surgen dos soluciones:

— Simplificar el modelo hecho en papel, eliminando líneas de unión.
— «Crear» nuevas longitudes para las tiras de goma eva, y así ajustar la creación al diseño inicial.

Las figuras 13 y 14 muestran producciones de los alumnos en las situaciones descritas.

## UN INCONVENIENTE QUE LLEVA A UNA INVESTIGACIÓN

Una vez realizada la maqueta se les pregunta si es idéntica al diseño. Son conscientes de que no, pero se esfuerzan en colocar el material para que ambos, diseño y maqueta, sean lo más parecidos posible. Todos consiguen que su maqueta sea reconocible.

En los cursos superiores los alumnos se percatan de que la longitud de las líneas condiciona la abertura del ángulo en el caso de líneas cerradas (polígonos); es decir, algunos ángulos obtenidos son mayores o menores que los del diseño y es imposible obtener el ángulo en cuestión debido a que las tiras de goma eva no tienen la longitud adecuada y no permiten el giro donde debe estar.

Es un buen momento para hacerles reflexionar sobre algunas características de los polígonos, en concreto la relación entre los lados y entre los ángulos de los triángulos.

Por ello, se les plantea la siguiente pregunta:

¿Se podría realizar un triángulo con tres tiras cualesquiera?

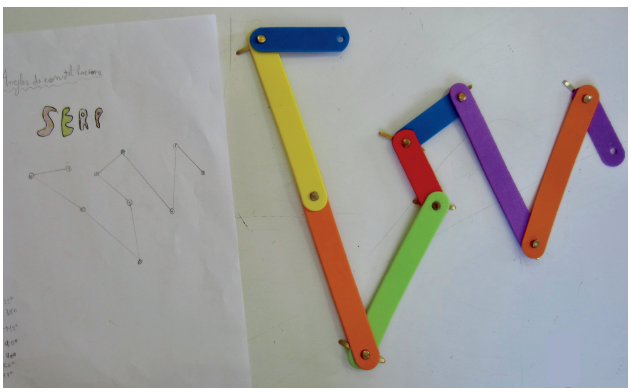


Figura 13. Diseño de la constelación y maqueta

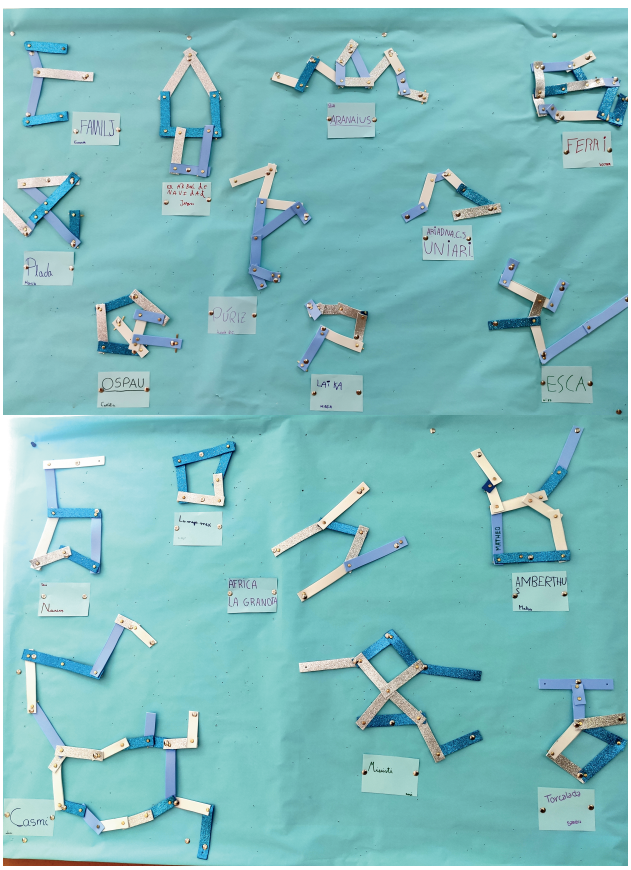


Figura 14. Mural final de las constelaciones creadas

La mayoría dicen que sí, que serían triángulos pequeños, grandes, con distinta apariencia…, así que «claro que sí». Pero algunos dudan, especialmente porque se les ha planteado la pregunta y de algún modo ya perciben que puede que haya alguna complicación.

A continuación se les ofrecen cañas de refresco para que recorten a su gusto y hagan comprobaciones.

Tras un rato de manipulación, algunos alumnos descubren combinaciones que no permiten cerrar el triángulo. Así, entre ellos se muestran (que no demuestran) que no siempre es posible formar un triángulo con tres lados. Es entonces cuando otros afirman que si un lado es muy corto no se cerrará el triángulo, afirmación que otros rebaten aportando un triángulo con un lado muy corto y dos muy largos. La pregunta que se les plantea entonces es: ¿Qué condiciones deben cumplir tres lados para que se pueda formar un triángulo? Tras otro rato de manipular, pensar y debatir, formulamos entre todos la siguiente afirmación:

«Para que se pueda formar un triángulo la suma de los dos lados más pequeños tiene que ser mayor que la del lado más grande» (figura 15).Para completar un poco las características de los triángulos se les pregunta:

¿Y qué pasa con los ángulos? ¿Deben tener alguna característica especial?

Tras una nueva manipulación con las cañitas, estas son las conclusiones que formulan:

- Un triángulo no puede tener un ángulo llano.
- Solo puede tener un ángulo recto, con dos no se cerraría.
- Tampoco puede tener más de un ángulo obtuso.
- Puede tener los tres ángulos agudos.
- Si tenemos un triángulo y aumentamos la abertura de un ángulo, otro ángulo disminuye. «Si quitas de un ángulo se pone en otro y al revés».
- Los ángulos de un triángulo siempre valdrán lo mismo, aunque cambies sus ángulos.

En este momento se les facilitó la comprobación de la suma de los ángulos a partir de recortar los ángulos de un triángulo dibujado en papel y unirlos por los vértices; es decir, se colocan los tres ángulos consecutivamente y se obtiene un ángulo llano. Final-

mente, como formulaciones generales nos quedamos con estas dos:

— «Cualquier triángulo debe tener como mínimo dos ángulos agudos»
— «La suma de los ángulos de un triángulo siempre es la misma y es de 180°»

¿Cuál ha sido el papel del maestro?

— Animar a los alumnos a ser creativos.
— Proporcionar un material manipulativo (geoplano) en caso que sea necesario.
— Hacer preguntas para crear conflictos, buscar alternativas y poder avanzar.
— Ayudar a la adquisición del vocabulario específico.
— Aprovechar sus dudas y dificultades para formular nuevas preguntas y animarles a investigar.

¿Qué dificultades se han encontrado? ¿Qué nos hemos tenido que replantear?

— Necesidad de facilitar un geoplano para poder construir las figuras.
— Demasiadas conexiones, se pueden acotar condiciones.
— La longitud de las tiras ya cortadas no siempre ha sido la adecuada, por lo que se han visto forzados a adaptar el material.
—Las observaciones de los alumnos han llevado a una investigación y a posteriores descubrimientos sobre los triángulos. Se podría continuar con otros polígonos.

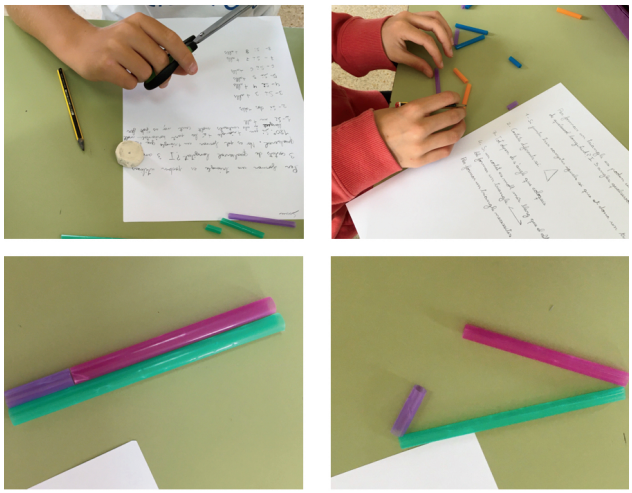


Figura 15. Relación entre los lados de un triángulo

## Referencias bibliográficas

AUBANELL, A. (2009), «Un paseo por el origen del calendario y el Sistema Métrico», XIV JAEM, <https://apliense.xtec.cat/arc/sites/default/files/annex_octubre_1582_Un_paseo_por_el_origen_del_calendario_y___a_aubanell.pdf>.

GRUP «ALMOSTA» (1988), *Més de 7 Materials per a l'Aprenentatge de la Matemàtica*, Associació de Mestres Rosa Sensat, Barcelona.

Susanna Morell Torrens
CENTMAT, Palma
<susannamorell@gmail.com>

Catalina Maria Pizà Mut
CEIP Mestre Colom, Bunyola
<ppizam@gmail.com>

Maria Àngels Portilla Rueda
CEIP Son Anglada, Palma
<manangels@gmail.com>

MATEMÁTICAS A UN CLIC

# La mitad del cubo

José Antonio Mora Sánchez
José Luis Muñoz Casado
José Aurelio Pina Romero

SUMA+ núm. 98
pp. 93-104
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

Las tecnologías existentes hoy en día permiten plantear al alumnado investigaciones y proyectos que pueden ayudar a mejorar su competencia matemática, estableciendo conexiones con diferentes áreas como la biología, la tecnología, la historia, el arte, etc., y extrapolando conceptos y procedimientos propios de las matemáticas a otros entornos no matemáticos.

En los últimos años, el uso de impresoras 3D en el ámbito educativo se ha visto incrementado por su coste y accesibilidad de la mano del profesorado (Beltrán-Pellicer, 2017; Aguilar, 2020) innovador y creativo. Creemos que el uso de esta tecnología se puede utilizar para generar oportunidades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel escolar, abriendo la mente del alumnado (Reichenberger y otros, 2019).

El software libre GeoGebra <https://www.geogebra.org/>, de atractiva interfaz gráfica, disponible en distintos idiomas y dispositivos, con una amplia comunidad global, y en constante desarrollo, permite trabajar con objetos 3D a partir de la versión 5 con relativa sencillez. La versión 6 (escritorio y web: figura 1) incorpora la posibilidad de exportar las construcciones al formato STL para luego poder imprimirlas utilizando una impresora 3D.

Cabe recordar que también ha incorporado la Realidad Aumentada (RA) en las aplicaciones para dispositivos móviles (figura 2):

https://cutt.ly/VEJ95tK
https://cutt.ly/sEJ93fF

Proponemos una actividad clásica, conseguir la mitad de un objeto geométrico, con la utilización de la tecnología para generar no solo conocimiento matemático sino también computacional al tener que explorar, analizar, modelizar o generalizar los diferentes procesos que intervienen en el proyecto.

## Antecedentes

Este problema proviene de una investigación de matemática escolar desarrollada a lo largo de más de 30 cursos en las clases de 1.º a 4.º ESO con distintos niveles de profundización y que ha sido descrita en tres artículos:

— «La mitad del cuadrado» (Mora, 1991). Mitades con lápiz y la tecnología más avanzada del papel cuadriculado y el lápiz de punta fina. El foco se puso en los procesos que llevan a los estudiantes a descubrir nuevos procedimientos para conseguir la mitad del cuadrado y en la organización de la clase para conseguir que unos procedimientos abran el camino a otros.
— «La mitad del cuadrado con geometría dinámica» (Mora, 2007) en la que se exploran las ideas de construcción de un procedimiento con el software matemático Cabri II y se centra en las soluciones que incluyen elementos dinámicos para ir de unos procedimientos a otros.
— «Azulejos con GeoGebra en el Museo de Onda» (Mora, 2017). El software utilizado es GeoGebra, el foco se pone en la construcción de soluciones dinámicas que incluyen elementos manipulables (mediante desplazamiento, giro, etc.) bajo ciertas condiciones para dar lugar a nuevas soluciones. Con esos diseños creamos baldosas para obtener mosaicos que después llevamos al taller del Museu del Taulell de Onda para pintarlos y decorar con ellos el instituto.

Ya desde el primer artículo se proponen varias posibilidades de ampliación del problema a otras situaciones en las que se cambia el cuadrado por un triángulo equilátero, un hexágono o un círculo, obtener un tercio o la cuarta parte del cuadrado y también se incluye «el paso del plano al espacio: obtener un poliedro cuyo volumen sea la mitad del cubo», que es el tema que abordamos en este artículo.

Tenemos otro antecedente de este trabajo en la investigación de las secciones del cubo. Normalmente

Versión escritorio

Versión web

Figura 1

Iphone

Android

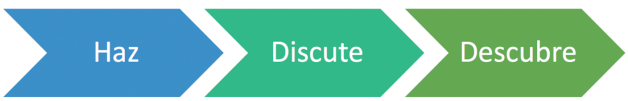
Figura 2

la primera sesión empezaba con una situación de imaginar, también se podría llamar de intuición espacial. Al principio seguía una secuencia tomada de Alonso y Salar (1992) parecida a esta:

— Toma un cubo. Da un pequeño corte a una esquina. Intenta que la sección que se obtiene sea un triángulo equilátero.
— Da un nuevo corte de forma que el triángulo equilátero sea un poco mayor. Sigue hasta que el triángulo sea lo más grande posible.
— Sigue un poco más, ¿ya no es triángulo? ¿Qué nueva figura se ha formado?
—¿Puedes conseguir que el hexágono sea regular? ¿Cómo es el corte en este caso?
— Sigue dando cortes paralelos a los anteriores hasta que salga de nuevo un triángulo equilátero cada vez más pequeño.

El trabajo continuaba con la obtención de secciones del cubo con todas las formas que pudiéramos conseguir: triángulos, cuadriláteros y otros polígonos.

El esquema de trabajo de una investigación solía ser:




Pero siguiendo a Fielker (1987) se da un vuelco a este orden que se daba por establecido:




Es decir, ante las propuestas de trabajo, primero se hace una predicción de la figura que se va a obtener, después el estudiante debe defender su propuesta ante otras distintas de sus compañeros y, solo al final, hacer dibujos sobre plantillas de cubos o dar el corte a cubos de estiropor.

## Secciones modulares del cubo con GeoGebra 3D

De aquella propuesta inicial de trabajo cuyo objetivo era conseguir secciones poligonales en los cortes del cubo hemos pasado a otra que enlaza mejor con la mitad del cuadrado. Lo que nos propusimos es intentar que esas secciones fueran modulares, es decir, que dieran lugar a dos partes exactamente iguales en forma y tamaño.

Las primeras secciones no eran difíciles: un plano paralelo a una de las caras que pase por los puntos medios de cuatro aristas (sección cuadrada), un plano que entre por una arista y salga por la arista opuesta (rectángulo), un plano que vaya por la diagonal principal y sea perpendicular a la diagonal espacial opuesta (rombo) o un plano perpendicular a la diagonal principal que incluya a los puntos medios de seis aristas (hexágono) (figura 3).

En los *applets* se representa el desplazamiento del plano de corte que se introduce en el interior del cubo para componer una de las dos partes en las que se ha dividido el cubo. Tomamos nota de los puntos que se generan para construir una a una las caras del poliedro que constituye esa sección modular (la cara que proviene del corte y todas las caras poligonales que se originan sobre las caras del cubo).

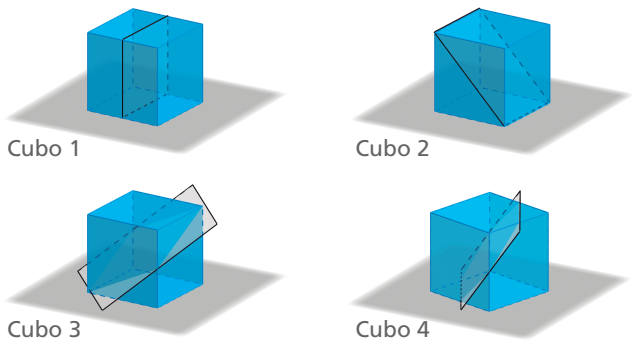



Figura 3

La técnica utilizada con GeoGebra ha consistido en crear una lista con todos los polígonos que envuelven a esa mitad del cubo, esto nos permite trabajar con ese poliedro como un objeto único (una lista en color rojo) con el que construir la otra mitad (en color verde) por traslación, giro o simetría (o una combinación de esos movimientos). Después los separamos con una traslación para ver la descomposición del cubo en dos partes que podemos alejar y acercar con un deslizador.

## Propuestas didácticas

### PROPUESTA 1

Muchas de las piezas que hemos realizado requieren de una gran destreza en el uso de GeoGebra, sin embargo, alguna de ellas sí permite trabajar con el alumnado. En particular, las piezas que vamos a mostrar se trabajaron en 2.º de ESO con alumnado que el año anterior, durante el confinamiento, habían realizado «La mitad del cuadrado» (figura 4).

Figura 4. Vídeo *Mitad del cuadrado*

Con «La mitad del cuadrado» se trabajaron:

— Las propiedades de las formas de 2D.
— La descripción con precisión.
— La clasificación según las propiedades de las formas y la comprensión de las relaciones entre sus elementos.

Con la versión en 3D el planteamiento didáctico fue el siguiente:

— Usar la geometría analítica para representar y examinar propiedades de algunas figuras 3D.
— Describir los tamaños, las posiciones y las orientaciones de figuras geométricas 3D sometidas a transformaciones como reflexiones, rotaciones, traslaciones y escalas.

El alumnado de esta experiencia estaba familiarizado con el uso de GeoGebra en el plano. Sin embargo, la parte 3D era nueva para ellos, por tanto, se dedicaron varias sesiones a familiarizarnos con la geometría 3D y con GeoGebra 3D. Aprendieron a representar puntos en el espacio y formas tridimensionales como prismas, pirámides, conos y poliedros aprendiendo sus elementos principales.

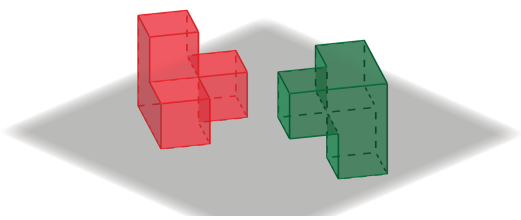
Una vez familiarizados con las formas 3D y las diferentes vistas se lanzó el reto de dividir el cubo en dos mitades iguales. Al igual que en la mitad el cuadrado, los primeros cortes surgen de modo natural, son las que hemos construido en la sección anterior.

Para avanzar un poco más en la visualización tridimensional, se sugirió la posibilidad de usar más de un corte al dividir el cubo, en la propuesta no se menciona usar exclusivamente uno solo. Se propuso construir los dos modelos de la figura 5, uno con una simetría central y el otro no. Tras examinar las piezas, y con el dato previo de que el cubo tenía que tener de longitud de arista 4 cm, se lanzaron a investigar cómo realizar las figuras.

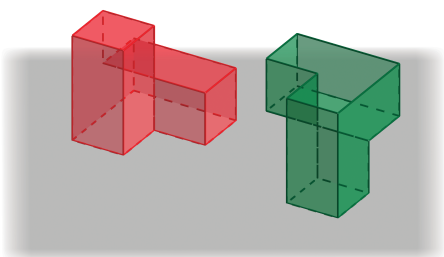
Hubo un grupo de alumnos que recurrió a dibujar el cubo de arista 4 cm y representar los puntos necesarios para conseguir la figura (figura 6).

Una vez localizado los vértices, construyó cara a cara la pieza (figura 7).

Sin embargo, otro grupo de alumnos descompuso la pieza en otras conocidas: un prisma cuadrado de base $2 \times 2$ y altura 4, y dos cubos $2 \times 2 \times 2$ (figura 8).



Propuesta número 1



Propuesta número 2

Figura 5

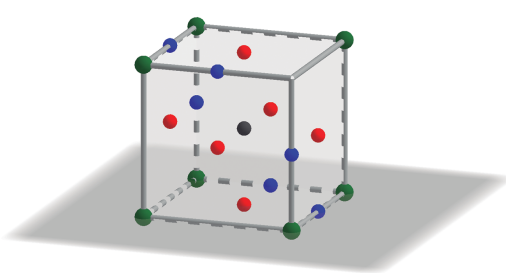


Figura 6. Cubo con los puntos medios de caras y aristas

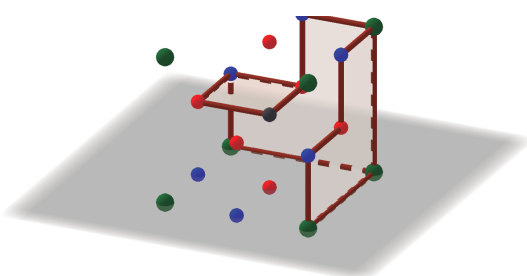


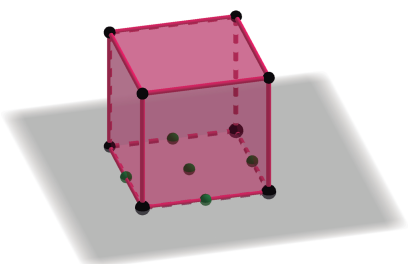
Figura 7. Construcción de las caras de la pieza

Para conseguir la segunda pieza usaron la simetría por el centro del cubo.

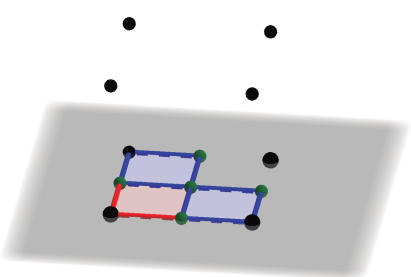
Al realizar la segunda propuesta, todos los alumnos observaron que la pieza a construir era un prisma «de pie» y otro «tumbado» (figura 9).

Sin embargo, al representar la figura simétrica por el centro del cubo descubrieron que parecían piezas iguales pero que no lo eran, dando pie a explicar las diferentes simetrías que se pueden realizar en el espacio (figura 10).

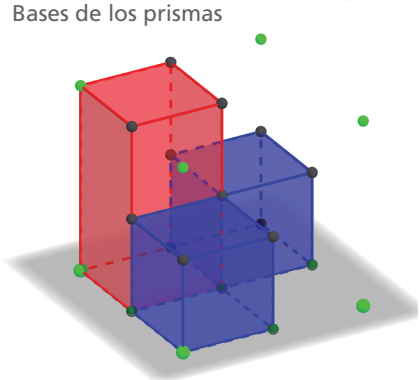
Para solventar el problema, los alumnos representaron los otros prismas de igual forma que los primeros.



Puntos medios de aristas y caras



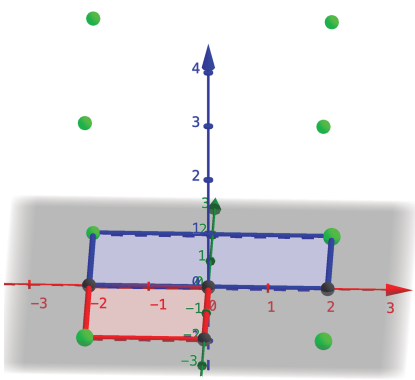
Bases de los prismas



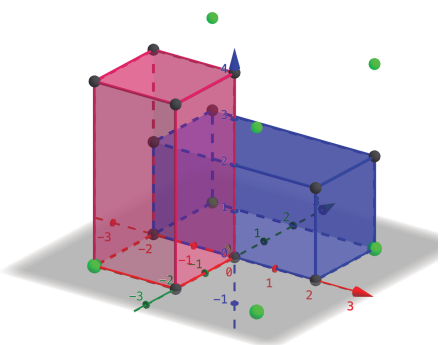
Pieza construida por composición

Figura 8

Para finalizar la actividad, los alumnos exportaron el fichero en formato STL, y con la impresora 3D del centro, y a lo largo de varios días, se imprimieron las piezas a cada uno de los alumnos.



Bases de los prismas



Prismas de base cuadrada y rectangular

Figura 9

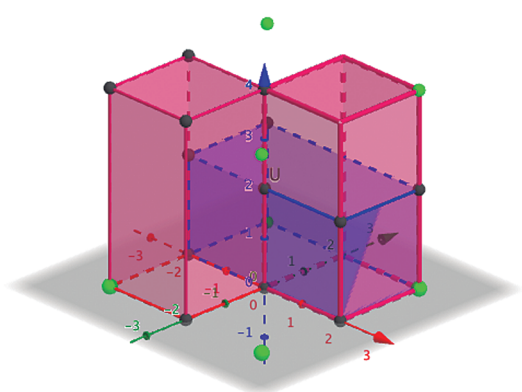


Figura 10. Al hacer la simetría se solapan los prismas

## PROPUESTA 2

Esta propuesta se realizó en el proyecto interdisciplinar con alumnado de 4.º ESO en el IES Gaia de Sant Vicent del Raspeig. Se les propuso construir la mitad del cubo, pero de igual área y volumen, con la cara del corte de forma hexagonal (figura 11).

En sesiones anteriores se había realizado una iniciación a GeoGebra 3D, con la construcción de su primera pieza y de un tangram en 3D.

En clase se les proporcionaron piezas impresas para que investigaran cómo construirlas mediante GeoGebra.

Un alumno unió las dos piezas y observó que los vértices del corte hexagonal recaían en el punto medio de las aristas. Construyó un cubo de arista 5 cm, y marcó los puntos medios de todas las aristas. A partir de este punto construyó el corte hexagonal, y el resto de los polígonos (figura 12).

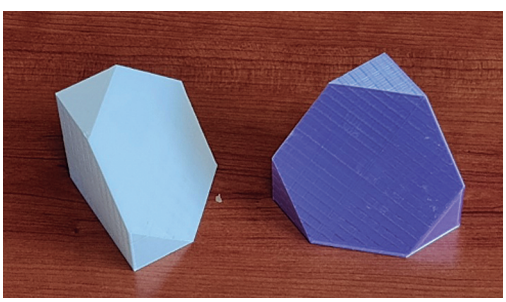


Figura 11. Cubo impreso

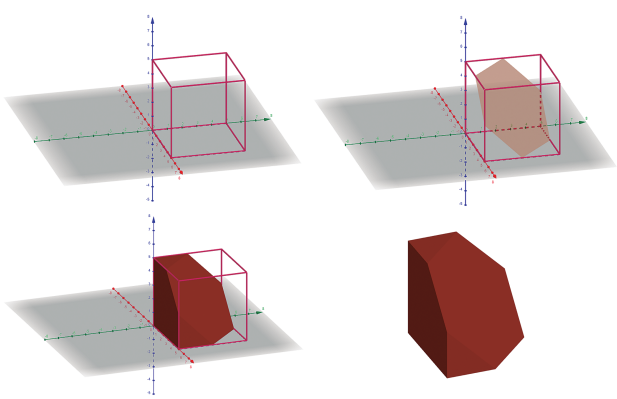


Figura 12

# Para profundizar

## SECCIONES CURVAS

Una vez realizadas las secciones rectas, el siguiente reto que se plantea es encontrar secciones curvas que dividan al cubo en dos partes iguales.

Para conseguir piezas iguales o simétricas es interesante reflexionar sobre la simetría de la curva que cortará alrededor del centro de una de las caras. Una forma de conseguir curvas suaves consiste en usar la herramienta **Spline**.

**Spline**

Una función spline está formada por varios polinomios, cada uno definido sobre un intervalo, que se unen respetando ciertas condiciones de continuidad. Si tenemos $n+1$ puntos, $x_0<x_1<\ldots<x_n$ y fijamos el grado de los polinomios en la función spline $S$ debe verificar:

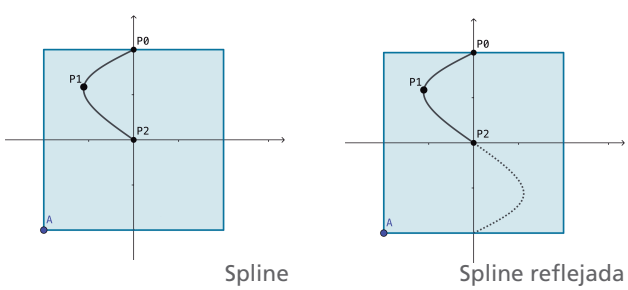
- En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i)$ la función S es un polinomio de grado menor igual que $k$.
- $S$ tiene derivada de orden $k-1$ continua en $[x_0, x_n]$.

GeoGebra ofrece la posibilidad de obtener $S$ simplemente indicando los puntos y el grado de los polinomios.

- Spline(<Lista de puntos> )
- Spline(<Lista de puntos>, <Grado≥3>)

Una vez obtenida una curva suave, podemos obtener la curva simétrica por el centro del cuadrado (figura 13).

Una vez tenemos la curva podemos dar el corte al cubo con una superficie que la contenga y que contenga a otra idéntica en la cara opuesta (figura 14).




Spline Spline reflejada

Figura 13

Siguiendo la misma estructura que con los cortes del apartado 3, podemos generar los cortes (figura 15).

Y también hacer nuevas variaciones o utilizar superficies regladas (figura 16).

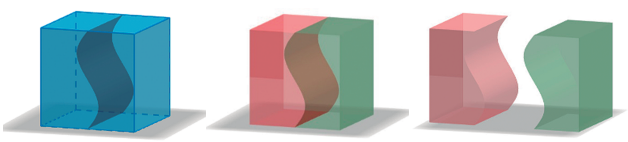


Figura 14

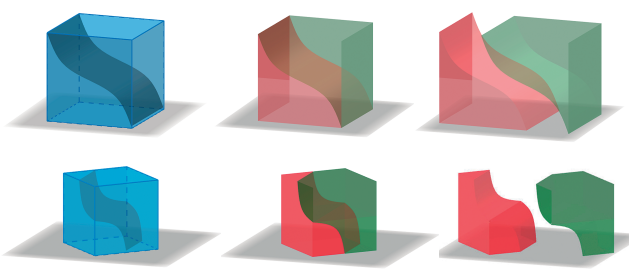


Figura 15

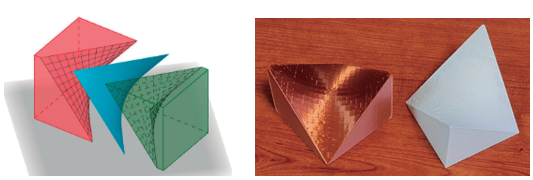


Figura 16

## SECCIONES MODIFICABLES

Se utilizan técnicas que ya aparecían en la mitad del cuadrado, que provienen de procedimientos que podemos llamar dinámicos: cuando trazamos una diagonal (triángulo) o el segmento que une los puntos medios (rectángulo) obtenemos dos mitades del cuadrado. El objetivo es dar un salto en nuestra forma de pensar para convertir esa solución en otra más general que se puede analizar de forma dinámica tomando una recta que pase por el centro del cuadrado (trapecios). Avanzado el trabajo, algunos alumnos experimentan nuevos saltos en sus estrategias de pensamiento, desde esta solución con una línea recta a líneas poligonales (a veces curvas) con simetría en el centro del cuadrado (figura 17).

Podemos utilizar razonamientos parecidos al anterior cuando buscamos la mitad del cubo: si partimos de una sección que da origen al cuadrado y otra que da lugar al rectángulo, podemos enlazar estos procedimientos para dar una nueva inclinación al corte y hacer que el plano, en lugar de cortar por las diagonales de dos caras dividiéndolas en dos triángulos rectángulos o dos rectángulos, corte formando dos trapecios y generalizarlo a nuevas figuras (figura 18).

Y esto lo podemos aplicar a las soluciones como la del rombo (el plano que pasa por dos vértices opuestos y los puntos medios de dos aristas), del hexágono y también modificar la solución para hacer algo parecido con las líneas poligonales con simetría central en el punto medio de una cara (figura 19).

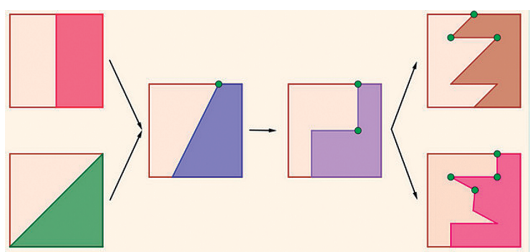


Figura 17

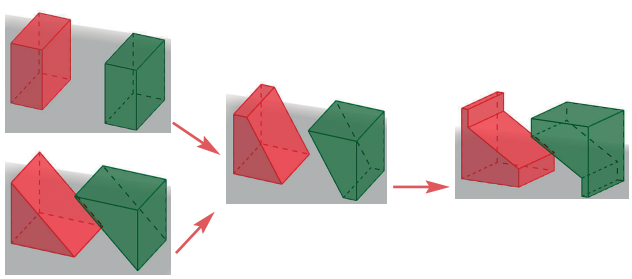


Figura 18

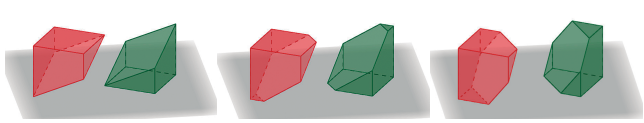


Figura 19

## SECCIONES MODULARES DEL CUBO

Tienen su origen en la carpeta de recortables geométricos *Secciones modulares del cubo* de Javier Carvajal que contiene ocho recortables que se introducen en un cubo de mayor tamaño. En la figura 20 tenemos dos de las construcciones.

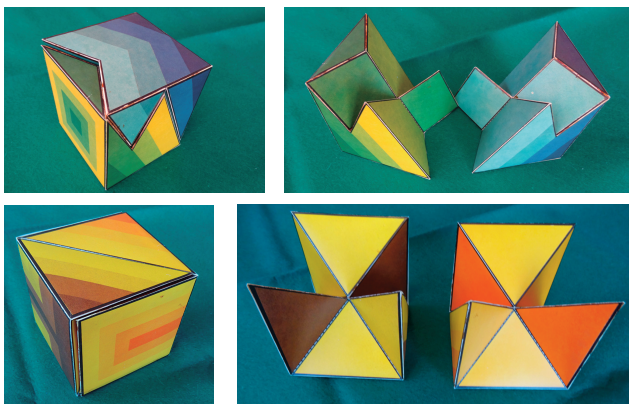


Figura 20

El problema principal para conseguir estos compuestos con GeoGebra consistía en encontrar los planos de corte que dan lugar a la sección modular para obtener las caras del poliedro. Una vez hemos conseguido esos polígonos, los introducimos en una lista y obtenemos la otra mitad por simetría central respecto del centro del cubo (poliedro en verde). En la figura 21 se observan las distintas fases de construcción con GeoGebra y dos fotografías de las piezas obtenidas con una impresora 3D.

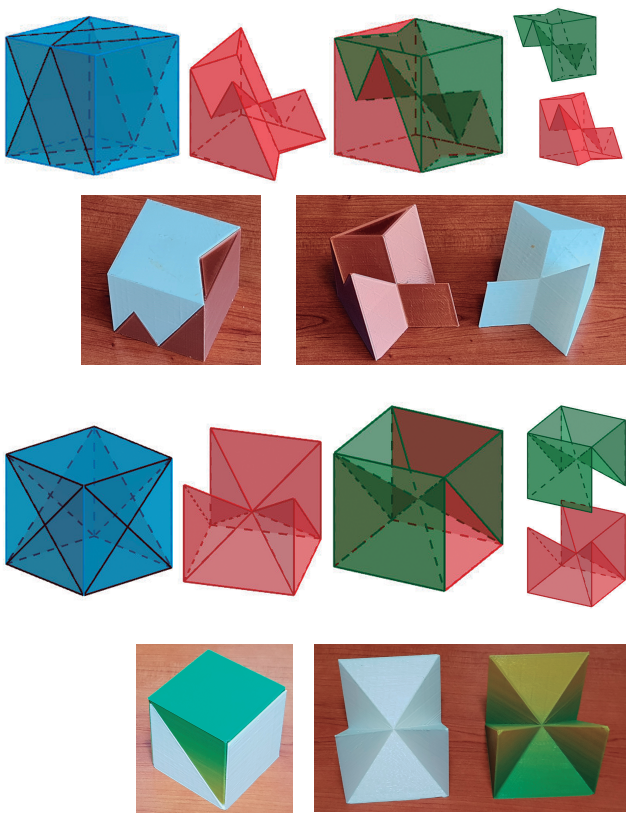


Figura 21

Hemos construido ocho secciones modulares en las que el cubo se divide en dos poliedros iguales excepto en una de ellas que se divide en tres.

## IMPRESIÓN 3D

Una impresora 3D es una máquina que construye de forma automática objetos en tres dimensiones a partir de unas instrucciones almacenadas en un fichero electrónico. Existen diversas tecnologías de impresión 3D, aunque la más extendida en diversos ámbitos es la conocida como FDM (Modelado por Deposición Fundida) que se basa en 3 elementos: una cama de impresión, una bobina de filamento y una cabeza de extrusión (figura 22). El filamento es fundido por el extrusor de la impresora, que deposita el material capa a capa sobre la cama de impresión. El filamento se funde cuando el Fusor (Hotend) alcanza alrededor de 200° C (en función del tipo de material), a continuación se extruye el material de 1,75 mm de diámetro sobre la plataforma a través de una boquilla que se mueve sobre tres ejes (X, Y, Z). En ocasiones es necesario imprimir las piezas con soportes para mejorar la calidad de las piezas, y su función es apoyar las partes voladas.

Entre los tipos de materiales más usados en la FDM se encuentran el PLA (ácido poliacético), el ABS (Acrilonitrilo Butadieno Estireno), el PETG (Tereftalato de Polietileno Glicol), el TPE (elastómeros termoplásticos), el ASA (Acrilonitrilo estireno Acrilato) y el PD (Policarbonato).

Otra de las tecnologías utilizadas es la resina con tecnología DLP (Procesado Digital de Luz) (figura 23),

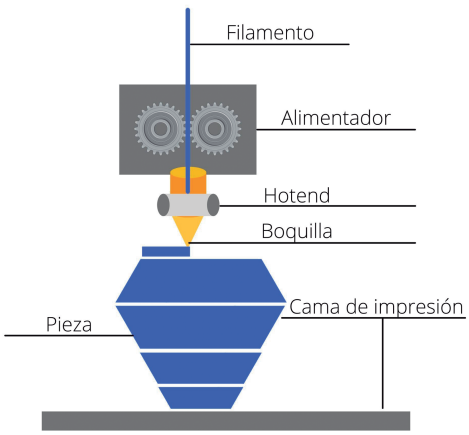



Figura 22

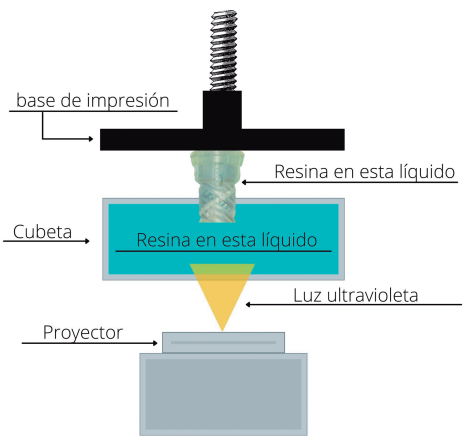



Figura 23

que consiste en la superposición por capas de una resina en estado líquido que se solidifica punto a punto, de manera muy precisa, mediante un láser ultravioleta. Cabe recordar que en esta tecnología el proyector DLP proyecta toda la silueta completa sin realizar recorridos en el plano XL.

Una de las ventajas frente a las FDM es que la resolución de impresión es muy superior a estas. Sin embargo, la principal desventaja es el coste de la resina liquida.

El post-procesado de las piezas es tedioso y debe ser ordenado, en primer lugar se debe limpiar el material sobrante, habitualmente con alcohol, y por último se cura la pieza mediante la exposición de luz ultravioleta.

Las impresoras FDM y DLP son máquinas de bajo coste, alrededor de 200 euros, y poco a poco están introduciéndose en el ámbito educativo. El bloque de geometría recogido en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato nos posibilita introducir su uso en las aulas de matemáticas en sinergia con otras materias que nos faciliten escenarios de aprendizaje en contextos multidisciplinares.

GeoGebra es un software matemático interactivo libre, que se puede utilizar en todas las etapas del sistema educativo del Estado español de acuerdo con la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre. Además, cabe recordar que el RD 1105/2005, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, promueve la utilización de aplicaciones informáticas de geometría dinámica que faciliten la compresión de conceptos y propiedades geométricas.

Con la ayuda de GeoGebra podemos modelar objetos en 3D, imprimirlos con nuestras impresoras 3D y colocarlos en cualquier entorno mediante realidad aumentada desde un dispositivo móvil. Así pues, se trata de una herramienta que nos permite abordar un enfoque STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas) en el aula de Matemáticas.

### *Impresión de objetos 3D con GeoGebra (Muñoz y otros, 2020)*

A partir de la versión 6 (versión en línea y escritorio) los objetos se pueden descargar en formato STL.

— *Paso 1.* Accede a la construcción, pulsa en los tres puntos que aparecen en la parte superior derecha y después en **Abrir** con GeoGebra (construcción: <https://www.geogebra.org/m/p98hu9s4>) (figura 24).
— *Paso 2.* Pulsa en los tres segmentos horizontales de la parte superior derecha, después **Descargar como → Archivo GeoGebra (.ggb)** (figura 25).

— *Paso 3.* Accede a GeoGebra (versión escritorio), y abre el fichero que has descargado. Desde el menú principal, ubicado en la parte superior derecha, pulsar en **Archivo → Abrir**.
A continuación, pulsa en la carpeta que aparece en la parte derecha, y carga el fichero que has bajado en el paso 2 (figura 26).
*Nota:* es recomendable no mostrar el plano, puesto que aparecerá en el fichero STL. Pulsa sobre el botón derecho del ratón, y después sobre **Mostrar plano**. En caso que los ejes estén visibles debes de seguir las mismas pautas.

— *Paso 4.* Descargar la construcción en formato STL.
Desde el Menú principal, ubicado en la parte superior derecha, pulsar en **Archivo → Descargar como... → Impresión 3D (.stl)** (figura 27).
Se puede ajustar las dimensiones y el espesor del objeto (también existe la posibilidad de exportar el objeto con un relleno sólido pulsando sobre la casilla, y determinar el grosor en mm) (figura 28).

— *Paso 5.* Cargar el fichero en un laminador, en nuestro caso Cura versión 4.11 <https://ultimaker.com/es/software/ultimaker-cura>.
Dos posibles formas de cargar el fichero:
1. Arrastrar el fichero .STL al programa
2. **Archivo → Abrir archivo(s)...** (figura 29)

— *Paso 6.* Ajustes en Cura.
En primer lugar, hay que seleccionar la impresora con la que quieres imprimir tu pieza.(figura 30).
Si pulsamos en la parte superior aparecen los ajustes de impresión básicos (altura de capa, densidad de relleno, soporte y adherencia) (figura 31).
Una vez que se han modificado todos los ajustes oportunos, solo nos queda segmentar/laminar la pieza en cuestión pulsando en **SEGMENTACIÓN** (figura 32).
Nos indica el tiempo y la cantidad de material que necesitará.Y si pulsamos sobre el deslizador que aparece en la parte derecha, podemos observar la evolución de la pieza capa a capa.

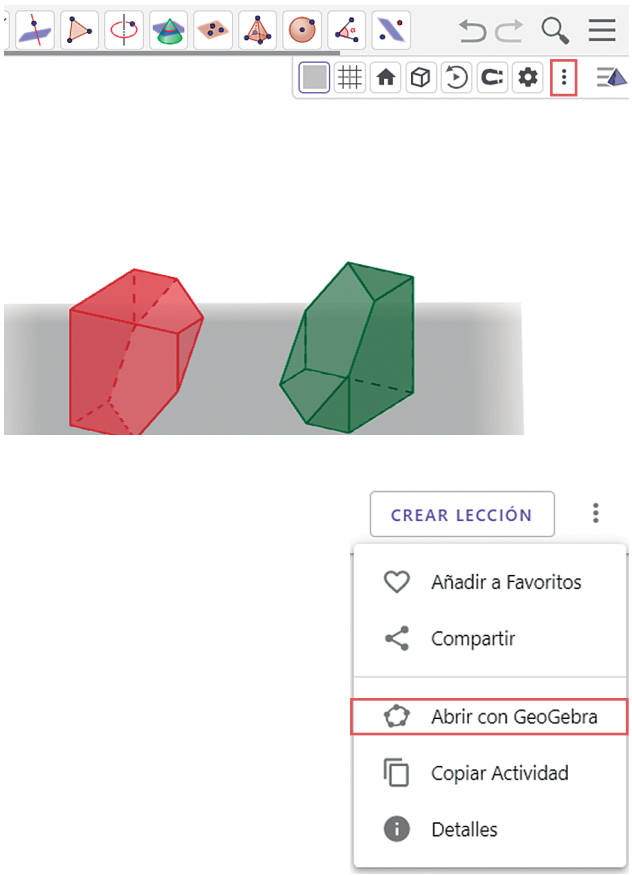



Figura 24

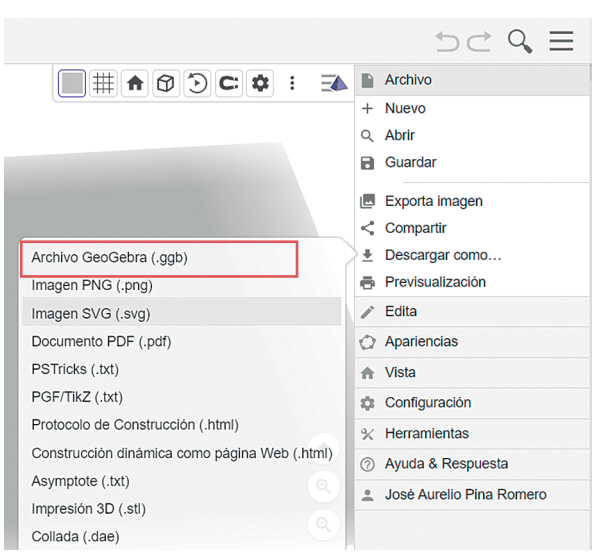



Figura 25

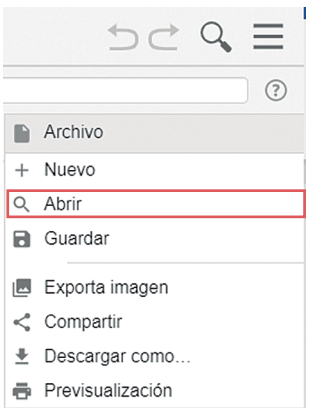






Figura 28

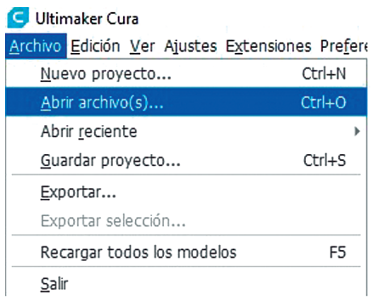
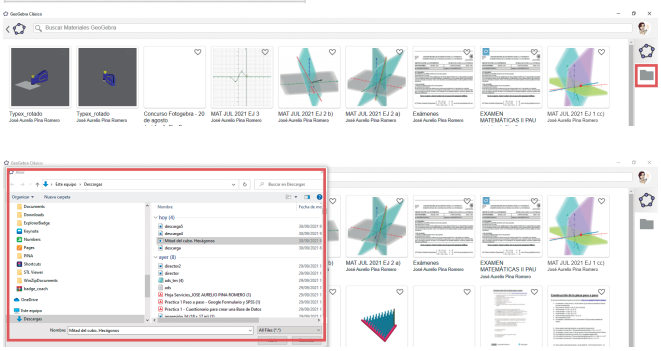



Figura 29



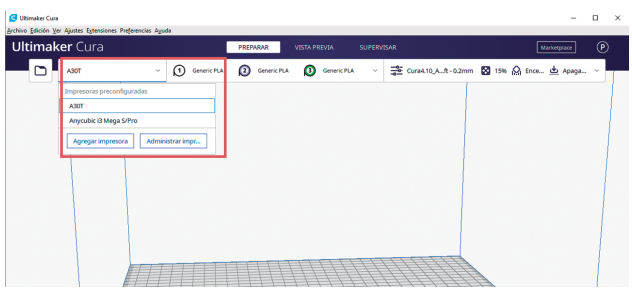



Figura 30

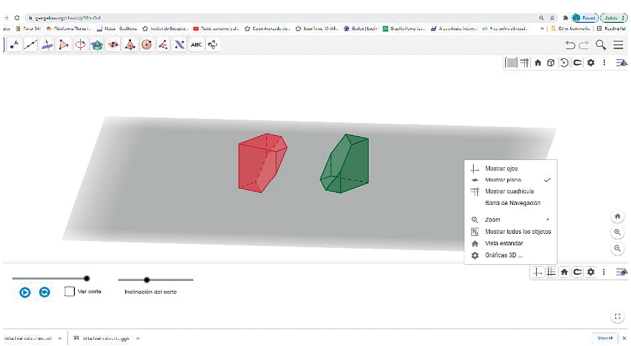


Figura 26

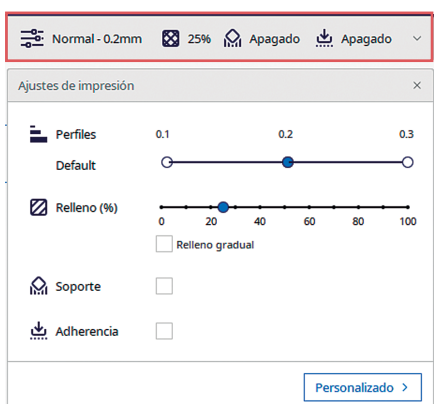



Figura 31

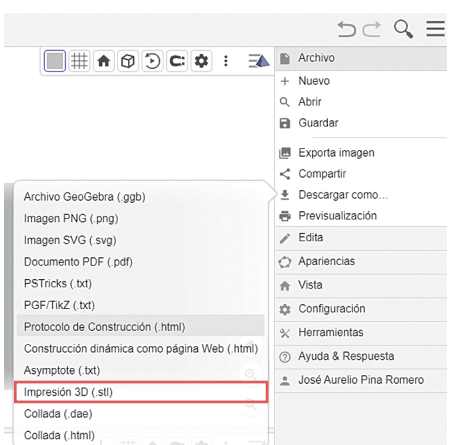



Figura 27

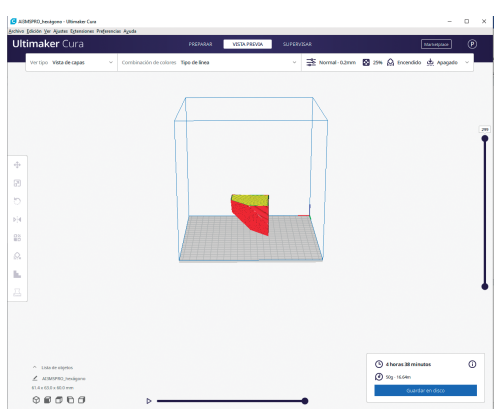



Figura 32

## Referencias bibliográficas


Aguilar, G. (2020), «Modelos en GeoGebra para el plano y el espacio. Impresión de materiales 3D para su uso en el aula», *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo,* n.º 9(1), 132-146, <http://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p132-146>.

Alonso, P., y Á. Salar (1992), *Visión espacial: cortando un cubo,* Aula Material, n.os 5 y 7, Graó, Barcelona.

Carvajal, J. (1988), *Secciones modulares del cubo*, Generalitat Valenciana, Valencia.

Fielker, D. (1987), *Rompiendo las cadenas de Euclides,* MEC, Madrid.

Jones, R., P. Haufe, E. Sells, P. Iravani, V. Olliver, C. Palmer y A. Bowyer (2011), «RepRap- the replicating rapid prototyper», *Robotica*, n.º 29, 177-191.

Mora, J. A. (1991), «La mitad del cuadrado», *Suma,* n.º 8, 11-29.

Mora, J. A. (2007), «La mitad del cuadrado con geometría dinámica», *La Gaceta de la RSME*. vol. 10.3, 743-762.

— (2017), «Azulejos con GeoGebra en el Museo de Onda», *Uno,* n.º 77, 24-33.

Mora, J. A, y J. A. Pina (2020), «Guía para la impresión 3D», *Calidoscopis polièdrics*, <https://www.geogebra.org/m/bm4heq77#chapter/602526>.

Muñoz J. L., J. A. Mora y J. A. Pina (2020), *La mitad del cubo*, <https://www.geogebra.org/m/fzych5mj>.

Reichenberger, S., D. Lieban, C. Russo y B. Lichtenegger (2019), «3D Printing to Address Solids of Revolution at School», en S. Goldstine, D. McKenna, K. Fenyvesi y C. S. Kaplan (Hrsg.), *Bridges Linz 2019 Conference Proceedings,* Phoenix: Tessellations, 493-496.



José Antonio Mora Sánchez
Institut GeoGebra Valencià
<jmora7@gmail.com>

José Luis Muñoz Casado
Instituto Geogebra Maslama al-Mayriti
<jose.munoz.casado@gmail.com>

José Aurelio Pina Romero
IES Gaia, Sant Vicent del Raspeig (Alicante)
Institut GeoGebra Valencià
<apina@institutogaia.es>

VERSIÓN INGLESA

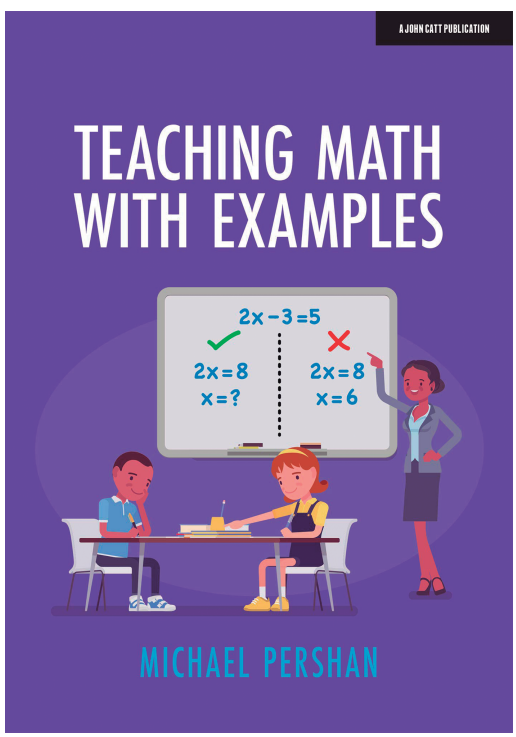
# Teaching math with examples

Maite Aranés Maza

SUMA+ núm. 98
pp. 105-110
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

Michael Pershan es un profesor de matemáticas estadounidense que da clases a niveles que van desde primaria hasta secundaria y bachillerato. Comenzó su carrera profesional en 2010, recién salido de la universidad y con experiencia y formación nula en docencia. Esto le llevó a buscar ayuda en la literatura científica, comenzando a leer estudios y artículos en la rama de la psicología, y continuando con la educación matemática. Ha mantenido una presencia activa en las redes sociales, y ha ganado cierto reconocimiento entre el profesorado de habla inglesa. *Teaching math with examples* es su primer libro.

Este es un libro informativo y conciso. Según el mismo Pershan, su intención es contarnos todo lo que ha aprendido en su estudio de la literatura sobre el trabajo con ejemplos, acompañado por sus experiencias y conclusiones personales. El estilo es informal y amigable, y transmite, en mi opinión, el deseo del autor de mantener una conversación con sus lectores.




John Catt Educational, 126 páginas (2021)

Quiero destacar que desde un primer momento Pershan es muy claro separando qué dice la teoría, cuál es su interpretación, cuáles son sus conclusiones y cómo decide aplicarlo en su aula. Lo que tú hagas con esa información ya es asunto tuyo. Su actitud con respecto a las teorías y resultados de experimentos académicos es muy pragmática: podemos tenerlos en cuenta para plantear nuestra actividad docente, pero es prácticamente imposible aplicarlos tal cual a la realidad del aula. Este posicionamiento es muy cercano al propuesto por el educador Dylan Wiliam (al que se menciona en el texto). Pershan reconoce también que un resultado teórico puede interpretarse o aplicarse de forma diferente según la personalidad y objetivos del docente.

> I'd define «evidence-informed teaching» as however it is you teach when you understand the research evidence. I don't believe teaching can ever be evidence-based, but I think it would be terrific if teaching became more informed by evidence. As Wiliam says, this wouldn't lead to a total convergence in techniques. We teachers all have different abilities and dispositions, and many of us even have different classroom goals. We'll never teach the same, and that's OK by me.

La estructura del libro es simple. Tras prefacio e introducción, los dos primeros capítulos son algo más teóricos. En ellos se resumen los trabajos que Pershan ha estudiado sobre el uso de ejemplos como herramienta pedagógica. En los siguientes capítulos nos cuenta sus experiencias personales, qué rutinas utiliza, y en qué situaciones utiliza ejemplos. En el capítulo 7 habla brevemente del diseño de materiales y termina en el capítulo 8 compartiendo su uso de ejemplos en la enseñanza de demostraciones geométricas. Al final del libro incluye un breve epílogo con las ideas principales que hemos ido encontrando en el texto. Para aquellos que quieran profundizar más en el tema Pershan también incluye una bibliografía.

Los ejemplos de los que nos habla Pershan son, según su propia descripción, soluciones completas que los alumnos deben estudiar y aprender de ellas («worked examples» en la literatura). En el prefacio hace una reflexión bastante provocativa en la que compara la resolución de problemas con el estudio de su solución (es decir, el estudio de un ejemplo resuelto). Plantea una situación ficticia en la que dos personas deben resolver un problema matemático. Una de ellas, tras muchos intentos, da con la solución más o menos por accidente. La otra persona no consigue resolverlo; tras intentarlo y reflexionar sobre varias estrategias decide consultar la solución y la estudia detenidamente. ¿Quién ha aprendido más del problema? Por supuesto no podemos saberlo. Pero Pershan cree que la resolución correcta de un problema es importante si con ella entendemos el problema completamente. En caso contrario, esta experiencia nos habrá servido de poco, y quizá nos valía más el estudiar la solución.

> In my view, this is a fundamental shift in perspective that teachers and students need to make. If what we mainly value is problem solving, studying a solution is just giving up. But if we value achieving mathematical understanding, we can see the studying of a solution for what it is: a core mathematical art.
> This is something I believe deeply, and it's why I wrote this book.

En resumen, Pershan opina que deberíamos dar más valor al estudio de soluciones/ejemplos resueltos en el proceso de aprendizaje.

El ejemplo del prefacio enlaza directamente con el capítulo 1, «How learning from examples works». Pershan nos explica que el alumnado puede aprender tanto, o tan poco, del estudio de una solución detallada cómo de un proceso menos guiado de descubrimiento. La clave en el éxito de cualquiera de las dos estrategias está en conseguir una reflexión cuidadosa por parte de los estudiantes.

> Teaching only works when it provokes this sort of active, deeper thought: «manipulating, linking, and evaluating information». Performing a series of worked examples while students drool in ther notebooks doesn't meet this standard. Neither does discovering a solution if students discover it by guessing. Either approach can, and often does, fail to produce learning. Educational techniques are not magic. If they don't provoke thinking, they don't work.

¿Cuáles son entonces los mayores obstáculos a la hora de aprender con ejemplos? Se pueden resumir en

dos: los alumnos no reflexionan de forma activa ni detenidamente sobre los pasos de la resolución, o no están lo suficientemente preparados para entender ni el problema ni su solución. Según Pershan, la estrategia «habitual» (profesor en la pizarra, haciendo problemas paso por paso y preguntando a los alumnos de vez en cuando) no resuelve estas cuestiones. Fue en una iniciativa llamada «Algebra by Example» dónde observó por primera vez un uso efectivo de ejemplos. En este programa se da respuesta al primer problema (falta de reflexión) a través del diseño de los ejemplos: incluyen instrucciones para favorecer que el alumnado analice la solución, explique por qué funciona y la aplique en otro problema. En particular, las rutinas que comparte Pershan en el capítulo 3 están basadas en las estrategias del equipo de «Algebra by Example».

Con respecto a la segunda cuestión, que el alumnado no esté preparado para entender ni el problema ni su solución, Pershan nos comenta que no vamos a encontrar una respuesta inequívoca. Por una parte, hay quien sostiene que intentar hacer el problema antes de estudiar la solución (fallo productivo) es la estrategia más adecuada. Por otra parte, están los partidarios de comenzar directamente con el ejemplo resuelto. Al parecer, podemos encontrar estudios y experimentos apoyando ambas posturas. A falta de consenso, Pershan intenta al menos esclarecer algunos aspectos esenciales en la preparación de los estudiantes antes de comenzar el estudio de una solución. Entre otras cosas, el alumno debe ser consciente de todos los aspectos del problema que intervendrán en la solución. Además, debe recordar contenidos y estrategias que van a darse por sabidos en la misma. Su respuesta a estas necesidades es el plantear un problema previo más sencillo que sirva como introducción al ejemplo a estudiar.

> To learn from a solution, students need to *notice* crucial aspects of the problem. They also need to *remember* some things they have already learned. A problem that comes before an example can help students notice and remember this information, and so enhances their learning from the example.

Pershan explica su interpretación de todo el proceso con detalle en el capítulo 3, «Routines for learning from examples». Lo hace con ayuda de un ejemplo concreto: el cálculo de la suma de los ángulos interiores de un polígono, que os resumo brevemente. Antes de presentar la solución que los alumnos deben estudiar, les propone que resuelvan el siguiente problema (figura 1), similar a otros trabajados en días anteriores.

Tras su resolución, propone que, en silencio, estudien el siguiente ejemplo resuelto, y posteriormente, trabajando en parejas, los alumnos deben explicar todos los pasos a su compañero.

Como parte del proceso para asegurarse de que los alumnos están atentos a los aspectos esenciales del problema, también añade preguntas que inciden en dichos aspectos (o explicaciones parciales que deben

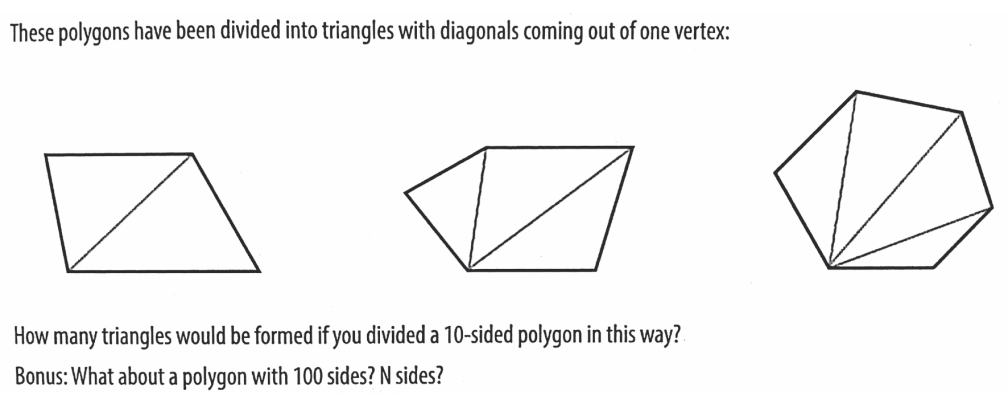



Figura 1. Problema inicial (antes de estudiar el ejemplo)

completarse, etc.). Para terminar plantea un problema similar para que los alumnos apliquen las técnicas del ejemplo (figura 2).

Pershan nos explica además en este tercer capítulo todos los detalles de cómo desarrolla la actividad en el aula. Por si nos quedan dudas, aclara algunos asuntos extra en el capítulo 4, «Some questions and answers about the routine».

Otra importante cuestión es por supuesto cuándo utilizar ejemplos resueltos dentro de una secuencia didáctica. Pershan nos explica por qué él ha decidido que prefiere siempre empezar con ejemplos en el capítulo 2, «The case for starting with examples». La literatura sugiere que es más rápido y eficiente aprender nuevos contenidos y/o estrategias con el estudio de un ejemplo resuelto. También se puede aprender en el proceso de resolución de un problema, pero es más costoso. Por supuesto que esta «optimización» no tiene por qué ser el objetivo de la práctica docente. En cualquier caso, Pershan prefiere, en la mayoría de ocasiones, comenzar con un ejemplo, y tiende a dejar la resolución de problemas para otros momentos.

cuando Pershan utiliza la palabra «problema», se refiere a ejercicios que requieren una solución sofisticada o elaborada, más que a actividades abiertas de investigación. Al final del capítulo 2 incluye algunas reflexiones y comentarios bastante interesantes sobre cómo plantea una sesión centrada en la resolución de un problema. Y en el capítulo 5, «Moving from examples to problem solving», nos explica cómo pasar a resolver ejercicios más complicados. La dinámica ejemplo-problema que ha explicado en los capítulos anteriores resulta algo limitada cuando el contenido es complejo. Una de las razones por las que el alumnado experimenta dificultades es que no domina lo suficiente los pasos intermedios necesarios para llegar a la resolución completa del problema. Aquí Pershan introduce las ideas de práctica de una parte y práctica de tarea completa («part-task practice» y «whole-task practice»). En su opinión, este segundo tipo de actividad, la «práctica de tarea completa», es más difícil de diseñar y quizás no la estemos usando en clase con suficiente frecuencia. Básicamente, la idea es utilizar actividades que permitan practicar una parte de una tarea más compleja pero manteniendo la integridad de la tarea completa. No voy a entrar en detalles, salvo comentar que comparte

> […] Why not directly focus on the solution, then? One reason is because math class can be about more than just learning skills. It can be a chance for students to engage in all sorts of mathematical activities that are connected to the discipline. For some people, math class is all about giving students a chance to engage in rich problem solving. That's not my orientation (see the Preface), but I do see value in sometimes giving students a juicy mathematical problem to work on. If for no other reason, just because it can be a lot of fun.

Como es natural en cualquier texto sobre la enseñanza de las matemáticas, la resolución de problemas forma parte de la discusión. Aclaro que la mayor parte del tiempo,

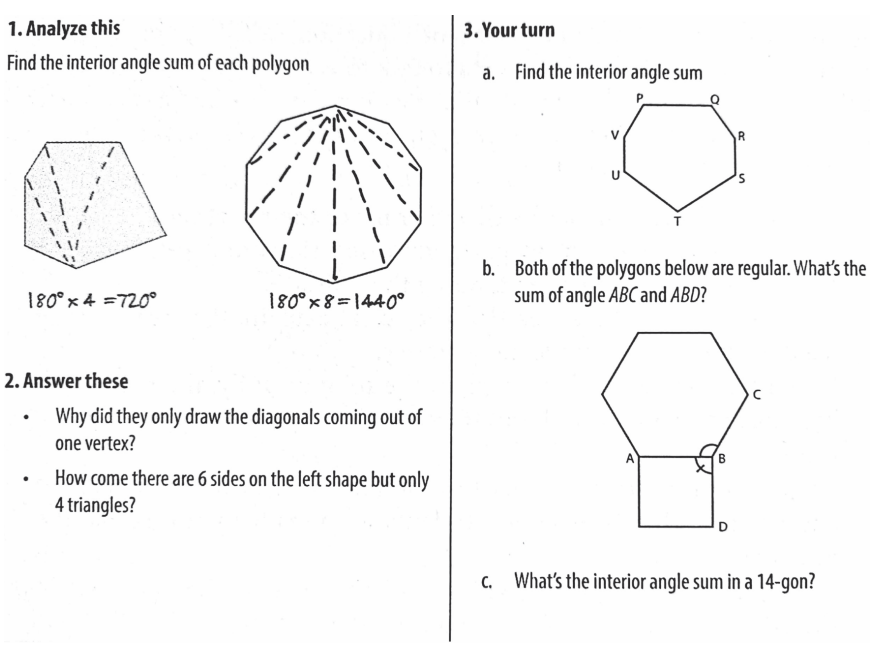



Figura 2. Ejemplo resuelto, preguntas de reflexión para el estudio del ejemplo, y ejercicios de aplicación

con nosotros los cinco tipos de tarea que él utiliza habitualmente, y los ilustra para el caso concreto de la resolución de sistemas (figuras 3 y 4).

El capítulo 6, «Giving worked examples as feedback», es particularmente interesante por las reflexiones que encontramos sobre evaluación formativa y *feedback* (del docente hacia el alumnado). En general, no hay un consenso sobre qué constituye *feedback* en educación ni cuándo o cómo es más efectivo, aunque se acepta generalmente como componente esencial de la enseñanza. Pershan plantea reducirse a principios fundamentales. Esencialmente, podemos influir en el proceso de aprendizaje del alumnado de dos formas: o bien damos una respuesta que enseña algo nuevo al alumno, o bien nuestra respuesta motiva al alumno a aprender algo nuevo por su cuenta. Es decir, cuando estemos considerando una forma u otra de *feedback* para nuestros alumnos podemos preguntarnos: ¿es motivadora para el alumnado? ¿es efectiva? Para Pershan esto ha supuesto la transición hacia el uso de actividades como respuesta a las dificultades y errores cometidos por los alumnos.

> To give feedback in this way, we need to scour our students' work for ideas they need to better understand. We want to look carefully at the mistakes they've made and understand how we might address them. Then, we need to put together some sort of activity that addresses just the need that we have identified.

Por supuesto Pershan después de esta reflexión, nos cuenta exactamente cómo implementa estas ideas en sus clases (utilizando un ejemplo resuelto, naturalmente), aunque ya no os lo voy a contar porque si no esto se va a alargar mucho.

En el siguiente capítulo, «Designing worked examples», nos hace un resumen de algunos principios de

**Complete the steps, solve the system**

| **1.** $-6x+y=-50$ | **2.** $-10y=x$ | **3.** $3x+4y=50$ | **4.** $y=2x$ |
|---|---|---|---|
| $y=-4x$ | $-5x-7y=43$ | $-2x=y$ | $-3x+8y=26$ |
| $-6x+(-4x)=-50$ | $-5(-10y)-7y=43$ | $3x+4(-2x)=50$ | |
| $-6x-4x=-50$ | $50y-7y=43$ | | |
| $-10x=-50$ | | | |
| $x=5$ | | | |
| $y=$ ____ | | | |

Figura 3. «Whole-task practice»: ejemplos que «se desvanecen» («Fading out examples»)

| Michael made a mistake in his first step of solving this system. | Michael should have subtracted first. If he had done that he would have $3x=-15$. | **Your turn** |
|---|---|---|
| $2x+y=-4$ | Why would that get him closer to the solution? | Solve the system: |
| $-x+y=11$ | | $x+3y=14$ |
| $x+2y=7$ ✗ | | $x+y=6$ |

Figura 4. «Whole-task practice»: análisis de errores

diseño efectivo para actividades y ejemplos en el aula. Esto no se trata de hacer que quede bonito, sino de que transmita la información necesaria de la forma más eficiente y efectiva. Aparte de eso, también implica la elección del contenido según criterios pedagógicos. Como en los otros capítulos, Pershan nos hace un resumen breve de las conclusiones de psicólogos y ciencia cognitiva, para después darnos algunos ejemplos concretos (figura 5).

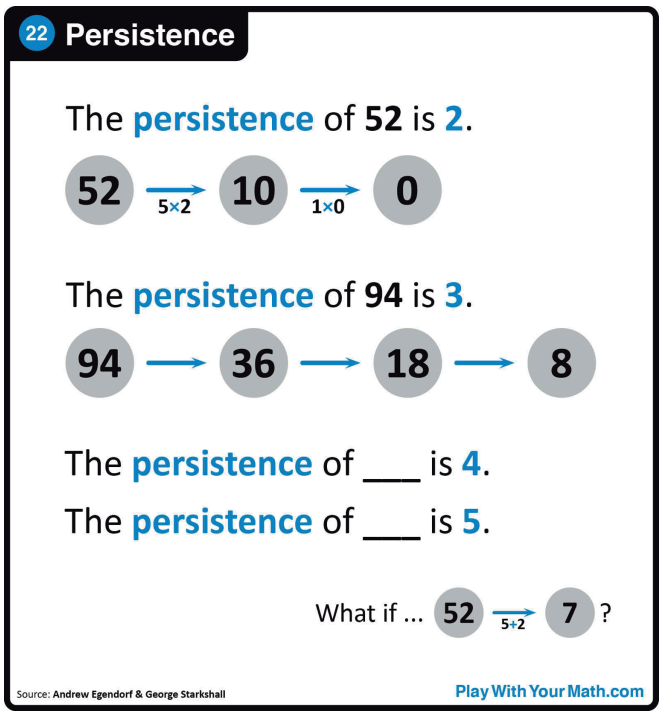



Figura 5. «Persistence», *Play With Your Math:* <https://playwithyourmath.com/2019/12/02/22-persistence/>

Pershan admira el diseño y claridad de exposición de las actividades del proyecto *Play With Your Math*

En el último capítulo, «Teaching proof with examples», Pershan quiere mostrarnos la potencia de enseñar con ejemplos explicando cómo los usa para un tema más complejo: las demostraciones geométricas. Al ser un contenido más sofisticado, su rutina es algo distinta de la descrita en el capítulo 3. Este capítulo es interesante por ver otra «aplicación» de enseñar con ejemplos, ya que este tema no aparece en nuestro currículo.

Con esto llego al final de la reseña. La lectura de «Teaching math with examples» me ha resultado muy agradable. Por una parte, es un libro muy práctico: breve pero con detalles suficientes si queremos intentar utilizar alguna de las estrategias compartidas por el autor. Por otra parte, me ha gustado el estilo abierto e informal de Pershan. Es interesante «escuchar» las opiniones de otro profesor, como también lo es ver lo que hacen en un aula distinta a la tuya.

Maite Aranés Maza
IES de Villanueva de Gállego,
Villanueva de Gállego (Zaragoza)
<maite.aranes@gmail.com>

# Disparates y gazapos frente a problemas de la Olimpiada

Fernando de la Cueva Landa
Juan Martínez-Tébar Giménez

SUMA+ núm. 98
pp. 111-114
Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

## Disparates y gazapos matemáticos

Son muchos los libros aparecidos en torno a los temas que trata «Disparates y gazapos matemáticos». El último que había leído era *200% of Nothing*, de A.K. Dewdney, al que me ha recordado en varios aspectos. ¿Se trata entonces de uno más? Rotundamente no. La más reciente publicación de José María Sorando (¡y que no sea la última, por favor!) aborda los asuntos que describe su título con orden, rigor, precisión y, sobre todo, humor. Perdón por la pedantería, pero desde *El Quijote* no me había reído tanto. Estamos ante un compendio magníficamente organizado de barbaridades, engaños, paradojas, enseñanzas, curiosidades, sorpresas, exageraciones y errores con trasfondo lógico-matemático.

José María es un profesor de largo recorrido, con gran paciencia y capacidad de trabajo. Su elaborada colección de noticias, anécdotas y situaciones matemáticamente absurdas o chocantes tiene detrás largos años de concienzuda recolección, si bien buena parte de lo recogido destaca por su «candente actualidad».

Son 22 capítulos que se pueden leer de forma totalmente independiente. Están salpicados de cuestiones y problemitas que sirven para que el lector reflexione y profundice sobre lo que va leyendo, sin agobios. Al final hay un apartado «bonus» con soluciones y comentarios a las cuestiones que quedaron abiertas a lo largo del texto. Cada capítulo comienza con una acertada cita escogida con ingenio que provoca la primera sonrisa. Valga como primer ejemplo la del capítulo 1, «Errare humanum est», atribuida a Jesulín de Ubrique, torero: «Hace diez años tenía veinte años, ahora tengo treinta y tres». Cuando uno ve esto, no puede evitar seguir leyendo. Citas y referencias son amenizadas y aclaradas con abundantes ilustraciones que hacen todavía más entretenida la lectura. Por ejemplo, encontraremos una placa colocada en

la vía pública que inventa un novedoso sistema de numeración «mixta» mezclando números arábigos y romanos…

También exageraciones aparecidas en algún periódico deportivo, como la referida a un gran campeón: «Marc Márquez, ante el desafío más grande de la historia de las matemáticas. El octocampeón tendrá que ir más allá de los límites de lo conocido para lograr su objetivo más difícil». El estilo literario es, a mi juicio, impecable. Hablando de los errores matemáticos presentes en cine, televisión y otros medios de comunicación, dice: «Al igual que ocurre con sus homónimos conejillos en los campos, el número de estos gazapos no decae y aparecen por doquier». ¡Elegancia!

Con humildad y buscando siempre el aspecto positivo, las citas se suceden sin querer «hacer sangre» de sus autores, siguiendo la sabiduría del legendario «rey de la rumba» Peret con su «Es preferible reír que llorar» o del humorista Jaume Perich: «Todo el mundo puede equivocarse más de una vez, menos los buscadores de setas». Hasta Cervantes se equivocó con las tablas de multiplicar: «Él dijo que nueve meses, a siete reales cada mes. Hizo la cuenta don Quijote y halló que montaban setenta y tres reales...».

Políticos de toda clase y condición son fuente inagotable de inspiración. Por ejemplo, alude a George W. Bush como autor de varias frases antológicas del estilo de «La tercera prioridad de la campaña es dar la primera prioridad a la enseñanza» e incluso tautológicas: «Un número bajo de votantes es una indicación de que pocas personas están yendo a votar» (aquí Sorando apostilla que además habrá bastante abstención) o «Hay mucha especulación y me parece que seguirá habiendo mucha especulación hasta que la especulación termine». Inquietante es la frase atribuida al dictador soviético Iósif Stalin: «Lo importante no es quién vota, sino quién cuenta los votos». Y enigmáticos son algunos mensajes de expresidentes del Gobierno de España, si se analizan desde la lógica, como «Pienso como usted. Pienso que yo no pienso» (Felipe González), «El deporte es bueno para quien lo hace y para quien no» (Mariano Rajoy), «Tenemos un rey bastante republicano» (José Luis Rodríguez Zapatero) o la farragosa «El Gobierno podrá recibir o no podrá recibir peticiones y podrá estudiar o no podrá estudiar, sin duda, en función de que las reciba o no las reciba, pues, el fundamento de esas peticiones» (José María Aznar).

Se percibe una beneficiosa intención didáctica. Así, el capítulo 5 desenmaraña conceptos populares (pero confusos entre la mayoría de la gente) como media, mediana y moda. Arranca con un viejo chiste matemático que da que pensar y con el que a muchos «profes de mates» nos gustaría provocar a nuestros alumnos: «La mayoría de las personas tienen más piernas que la media». Un buen estímulo para reflexionar sobre medidas estadísticas de centralización.

La jerarquía de operaciones, (justificada) obsesión entre el gremio al que pertenezco, aparece con este enunciado viral en Twitter que divulgó Steven Strogatz en The New York Times, $8 \div 2\,(2+2) = ?$ ¿Cuántos no responderíamos «1»?

Comentando la noticia que pronosticaba que en Huesca lloverían 60 000 litros por metro cuadrado, explica que el agua alcanzaría una altura de 60 metros, finalizando con «La última vez que se vio algo así sólo se salvaron un tal Noé y su familia».

Estimula el pensamiento matemático del lector cuando se refiere al televisivo Grand Prix (La 1), donde se afirmó que el ángulo máximo que puede abrir sus mandíbulas un hipopótamo es de 360°. Sorando plantea que en tal caso, el animal se autoengulle.

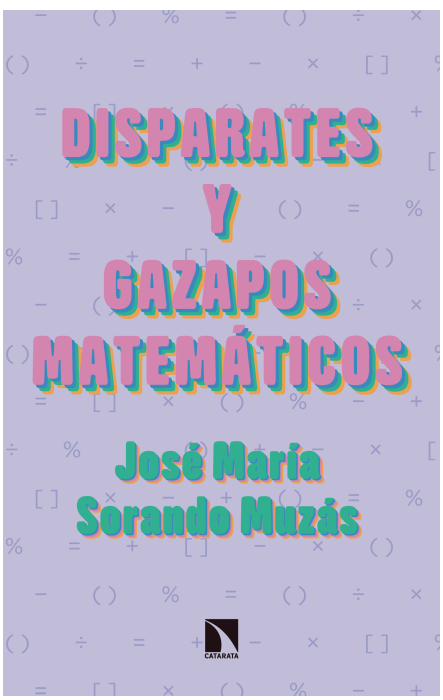
Paso a añadir otras pinceladas que sirvan para dar una idea del contenido de esta creación rebosante de ironía y buen humor que es *Disparates y gazapos matemáticos.*

Errores «a lo grande», como el de Donald Trump hablando de la frontera con México: «Cuatro mil terroristas conocidos o sospechosos fueron detenidos en la frontera sur el año pasado». En realidad fueron seis, según aclaraba The News & Observer.

Tópicos arraigados en el pensamiento colectivo, como la proverbial dificultad de las matemáticas. En vísperas del sorteo de la Lotería de Navidad, decía un locutor (La Sexta): «Es el único día del año en que podemos disfrutar con los números». Esa estigmatización popular de lo matemático se cuela incluso en titulares que pretenden ser positivos: «Los profesores de lo imposible: hacen divertidas las matemáticas» (Canal Sur). También hay anuncios de un conocido banco…

Hay citas de famosos en todos los campos. Así: «De filipino tengo un cuarto… Un poquito más, entre un cuarto y un veinticinco por ciento» (Enrique Iglesias, cantante).

Termino con palabras del autor en el último capítulo: «En este libro hemos conocido gazapos matemáticos en abundancia, a veces tan bochornosos que parecen chascarrillos de un humorista […]. Prestemos atención a los datos, a los gráficos y a los razonamientos que recibimos a diario, especialmente cuando tras ellos pueda esconderse cierto interés para el emisor y, sobre todo, cuando se trate de algo que nos afecta. Pensemos en ellos y saquemos nuestras propias conclusiones. Porque muchas veces no salen las cuentas».




DISPARATES Y GAZAPOS MATEMÁTICOS
*José María Sorando Muzás*
Catarata y FESPM
Madrid-Albacete, 2021
218 páginas
ISBN: 978-84-1352-249-4

## Olimpiada Matemática Nacional 1990-2004

### LAS OLIMPIADAS ESCOLARES

No habrá ningún docente, entre los que están asociados a las distintas sociedades que conforman la FESPM, que no conozcan la Olimpiada Matemática en alguno de sus distintos niveles. Y del resto, serán muy pocos los que no sepan de su existencia.

Las primeras competiciones escolares de resolución de problemas se centraban en medir la creatividad de los estudiantes y de desarrollar su autonomía de pensamiento, más que de medir sus conocimientos curriculares. Y esa es la filosofía que se mantiene hasta nuestros días.

En nuestro país es en 1980, en Canarias, cuando la Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas, inicia su Torneo de Matemáticas, dirigido a alumnos de 8.º de EGB (actual 2.º ESO). A Canarias le sigue Andalucía y rápidamente se extienden por todas las comunidades autónomas.

Cuando en 1988 se funda la FESPM, permite coordinar todos los certámenes que se celebraban en estas distintas comunidades y fundar las bases para que en 1990 se celebrara en Pamplona la I Olimpiada Matemática Nacional organizada por la Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira». Desde entonces ha recorrido todas las comunidades autónomas y el Principado de Andorra, que participa como invitado.

Desde 2018 también se celebra la Olimpiada Matemática Nacional Alevín, las dos primeras ediciones en Melilla, para alumnos de sexto curso de primaria. Como triste anécdota, la XXXI edición de la Olim-

piada Matemática Junior y la III Olimpiada Matemática Alevín se tuvieron que posponer un año, a causa de la pandemia y celebrarse de forma online como consecuencia también de la situación sanitaria.

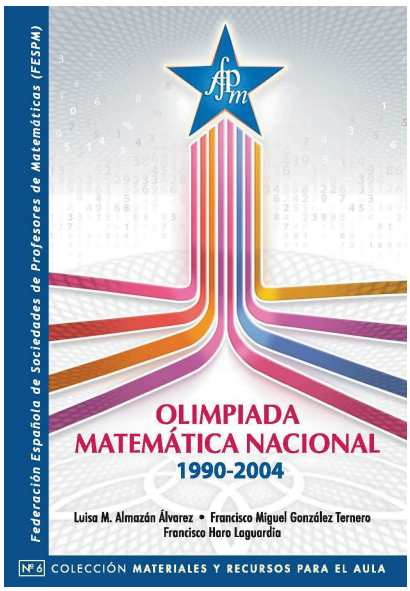
## LOS PROBLEMAS

Era una antigua aspiración dentro de la FESPM recopilar todos los problemas de las distintas ediciones de las olimpiadas. Afortunadamente, los organizadores conservaban los enunciados y las soluciones en diversos formatos. Ha sido un gran trabajo recopilatorio en el que han colaborado muchos miembros de las distintas sociedades.

También el Servicio de Publicaciones de la FESPM publicó en su día los problemas de las cinco primeras ediciones de la olimpiada.Los enunciados de estas primeras treinta ediciones están disponible en la página web de la FESPM <https://bit.ly/3qgyDFU>.

Este libro constituye un excelente banco de recursos para el aula de matemáticas, no desde un estricto punto de vista curricular, que también, sino sobre todo como problemas y actividades motivadoras para el alumnado. Abarcan todas las áreas del currículo de matemáticas, Álgebra, Geometría, Números… y algunas, como la Lógica, que tradicionalmente no está presente.

En cuanto a su origen, presentan un amplio abanico, desde problemas clásicos, a problemas originales y actuales. Para resolverlos no es necesario tener un conocimiento profundo del tema, y se puede llegar a la solución con ingenio e imaginación. Los enunciados, claros y rigurosos, ayudan también a los alumnos y alumnas a reconocer desde su propia lengua, que las matemáticas son un lenguaje en sí. Las soluciones han sido revisadas y en algunos casos se han añadido nuevas variantes a la solución ya propuesta, que tal y como ya sabemos, no tiene por qué ser única.Además, es un libro adecuado para aquellos alumnos más motivados en la resolución de problemas y todo aquel, padres, docentes de otras asignaturas y público de cualquier edad y condición que sienta gusto e interés por las matemáticas.




Olimpiada Matemática Nacional 1990-2004
*Luisa M. Almazán Álvarez, Fco. Miguel González Ternero y Francisco Haro Laguardia*
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)
Albacete, 2021
220 páginas
ISBN: 978-84-948824-7-0

Sirve también el libro de un recorrido histórico por todos los lugares donde la olimpiada ha tenido lugar y como homenaje y reconocimiento a todos los docentes que han hecho posible cada una de las ediciones. En este primer volumen están recogidas las quince primeras ediciones, y ya hay un grupo de docentes de la FESPM trabajando en las ediciones restantes. En definitiva, es un libro imprescindible en nuestra biblioteca.

primera reseña
Fernando de la Cueva Landa
<fercueva@gmail.com>

segunda reseña
Juan Martínez-Tébar Giménez
< juanmartineztebar@iesaltodelosmolinos.com>


FESPM
&
Cía

FESPM

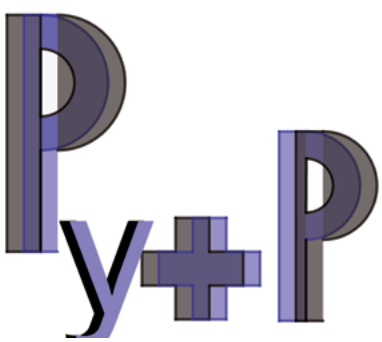
# Problemas y más problemas

Francisco Haro Laguardia

El pasado curso escolar desde la Secretaría de Actividades con el Alumnado, se propuso una nueva actividad que titulamos: Problemas y más problemas. Sabemos que cuando se trata el tema de la diversidad, casi todos los recursos van destinados a recuperar ese alumnado con dificultades en el área de Matemáticas, siendo secundaria la atención a ese otro tipo de alumnado con un talento especial para esta disciplina.

El programa de ESTALMAT (Estimulación del Talento Matemático) y las diferentes olimpiadas y concursos matemáticos son un modo de atender a este tipo de alumnado, que requiere más conocimientos y métodos diferentes a los del currículum. Estos programas, en el caso de las olimpiadas, son puntuales, y en el caso del programa de ESTALMAT, las plazas son limitadas.

Desde la FESPM pensamos que una actividad de resolución de problemas, con alguna dificultad especial, podría ayudar al profesorado en la atención a estos alumnos y alumnas que requieren algo más de lo que habitualmente se ofrece en el aula.



Hasta el momento se han publicado cinco entregas, cuatro el pasado curso y una primera entrega en este curso 2021-2022. El objetivo es facilitar al profesorado un banco de problemas para su uso con este alumnado y poder atender esa demanda de los alumnos, y en muchos casos, de sus padres y tutores legales. La actividad consiste en la publicación de dos problemas por nivel, siendo cuatro los niveles que se ofrecen: tercer ciclo de primaria, primer y segundo ciclo de secundaria y también en bachillerato.

En cada una de las entregas se ha habilitado un formulario para que aquel profesor que lo desee, y teniendo en cuenta su criterio, pueda enviar al equipo de la FESPM las propuestas de resolución de aquellos alumnos, que por el motivo que sea, crean conveniente su envío. Finalizado el curso, en la página web de la FESPM <www.fespm.es> se publicarán algunas de las soluciones recibidas, así se hizo el pasado curso.

Los problemas que se publican son los que las diferentes Sociedades de Profesores que componen la FESPM han enviado. Hasta el momento han colaborado la Sociedad Andaluza «Thales», la Sociedad Gallega «Agapema», la Sociedad Navarra «Tornamira», la Sociedad Castellano-Manchega, la Sociedad «Al-Khwarizmi» de la Comunidad Valenciana, la Sociedad Extremeña «Ventura Reyes Prósper», la Sociedad Asturiana «Agustín de Pedrayes» y la Sociedad Canaria «Isaac Newton».

Como muestra dejamos algunos de los problemas de estas dos primeras entregas del curso 2021-2022. Animamos al profesorado a difundir estos problemas en sus centros educativos.

## Tercer ciclo de primaria

Un cuadrado de números se dice mágico, cuando está formado por números naturales distintos y se verifica que las sumas de cada fila, cada columna y cada diagonal son iguales. Completa el cuadrado de la figura 1 de forma que resulte mágico.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | | | 13 |
| | | 11 | |
| 9 | 6 | | |
| 4 | | | |

Figura 1

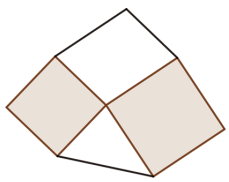


Figura 2

## Primer ciclo de secundaria

La figura 2 está formada por dos cuadrados de lados 5 cm y 7 cm, un triángulo y un paralelogramo o romboide. ¿Qué relación hay entre el área del paralelogramo y el área del triángulo?

## Segundo ciclo de secundaria

Dos números de dos cifras terminan en 7 y las dos primeras cifras de su producto son iguales, así como las dos últimas. Halla estos dos números.

## Bachillerato

Hallar todos los números naturales $x$ e $y$ con $x<y$ tales que la suma de todos los naturales estrictamente comprendidos entre ambos sea igual a 2021.

Francisco Haro Laguardia
IES Jándula de Andújar, Jaén
<calzmex@yahoo.es>

FESPM

# Cine, literatura y redes sociales en los *webinars* de inicio de curso

Juan Carlos Toscano Grimaldi

En este curso 2021-2022 hemos iniciado los *webinars* de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) tratando temas relacionados con recursos. Se ha escogido un primer bloque de temas más tradicionales (cine y literatura) y uno nuevo que en el fondo es el recurso de los recursos, las redes sociales.

El primero de ellos se celebró el 30 de septiembre y tuvo como protagonistas a José María Sorando Muzás y Rafael Ramírez Uclés. José María trató sobre el cine y Rafael sobre la literatura. Se tituló *Cine y literatura recursos para educación matemática*.

Sobre cine se justificó por qué y cómo puede tener cabida el cine en la enseñanza de las matemáticas mostrando dos ejemplos prácticos. El primero se basaba en un fragmento de la película *El mundo está loco, loco, loco* (1963), dirigida por Stanley Kramer y que mostraba el reparto proporcional. El segundo fragmento es de la película *Marte* (2015), dirigida por Ridley Scott, que presentaba un problema de probabilidades y evaluación de riesgos.

Durante esa parte José María Sorando partía de la premisa de que a las matemáticas no solo se llega por medio de libros y pizarras y remarcó el interés que tiene el uso de otros medios, además del cine, como la prensa, las rutas matemáticas o la historia. Para ello se basó en un pequeño fragmento del escrito de Anton Aubanell, «Carta a quien comienza en el oficio de enseñar matemáticas», que dice:

> Particulariza la clase. Cada día puede ser especial: unas efemérides, una idea nueva que hoy trataremos, un problema muy interesante, un material sorprendente, una dinámica de trabajo diferente....

Para todos aquellos que tengan interés en conocer otros fragmentos de cine y su uso en las clases de matemáticas les recomendamos el libro del propio José María Sorando Muzás, *100 escenas de cine y televisión para la clase de matemáticas* que editó la FESPM y que puede ser adquirido en el Servicio de Publicaciones de la FESPM.

Sobre literatura pudimos ver el potencial de las «lecturas en paralelo» de textos literarios relacionados con las matemáticas. La literatura puede servir como contexto para el planteamiento de problemas, resolución de retos, divulgación de contenidos matemáticos y hechos históricos.

Al inicio de su parte Rafael Martínez enlazó con el tema del cine mostrando una escena de la película *El Club de los Poetas Muertos* (1989), dirigida por Peter Weir, en la que se habla de las métricas de la poesía. A partir de ahí se parte de la doble pregunta: ¿Leer para las matemáticas?, ¿Matemáticas para leer? Rafael mostró como ambas se pueden combinar y destacó el papel cultural de las matemáticas a lo largo de toda la historia.

Dentro de las distintas lecturas mostró dos posibilidades: lecturas sobre temas matemáticos y lecturas que tienen alusiones a las matemáticas.

Durante la charla presentó los objetivos de una lectura con sentido matemático:

— Señalar los contenidos matemáticos.
— Relacionarlos con los estudiados en clase.




Figura 1. Invitación al *webinar* 1

— Conocer protagonistas y hechos fundamentales de la historia de las matemáticas.
— Encontrar matemáticas en contextos reales.
— Profundizar en un contenido matemático.

El vídeo completo puede verse en <https://youtu.be/EhZyStAWH6E>.

También compartimos los enlaces que ambos ponentes proporcionaronn con materiales ya seleccionados.

El segundo de los *webinar* se realizó bajo el título «Redes sociales como recurso didáctico» con la coordinación de Juan Martínez-Tébar Giménez, secretario de la Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas y secretario de Publicaciones de la FESPM y tuvo la presencia de Juan Medina Molina, Miguel Ángel Morales Medina y Ángel y José Luis Gonzalez Fernández, creadores de *Troncho y Poncho*.

Las redes sociales se han convertido en una fuente de información de primer orden y en una manera de relacionarnos con amigos y conocidos de todas partes del globo, derribando fronteras. Aunque determinadas redes sociales son controvertidas, está claro que para muchos docentes (y estudiantes) las redes permiten acceder a trabajos ya desarrollados por otros profesores y que están al alcance de toda persona.

Las matemáticas impulsan la comunicación y facilitan la comprensión en el mensaje y su relación con el ambiente donde este se esparce, por lo que su papel en las redes sociales es fundamental e inevitable. En todas las redes encontramos información específica o casual sobre las matemáticas. Es por lo que son susceptibles de ser usadas como un recurso didáctico *ad hoc* u ocasional.

Desde Cartagena nos habló Juan Medina Molina donde es profesor titular en la Universidad Politécnica. Licenciado y doctor en Ciencias Matemáticas por la Universitat de València. Creador, en 2005, del portal <lasmatematicas.es> sobre vídeos de matemáticas, con más de 3 000 vídeos, y referente como proyecto universitario en educación en internet como muestran sus más de 30 millones de reproducciones en YouTube y más de 100 mil seguidores en Facebook. Ha sido conferenciante sobre innovación educativa y educación en internet España, Argentina, Costa Rica, Perú y México. Es autor, junto a Fernando Blasco, del libro *Tu hijo puede ser un genio de las mates,* del sello Temas de Hoy de la Editorial Planeta. Y más recientemente, *Matemáticas para entender el mundo en que vivimos,* junto con David Darling.

Su intervención la tituló *Los videos educativos en la «enseñanza informal» de las matemáticas*. Explicó cómo su canal de YouTube, quizás el primero de todos, lo creó como complemento de sus clases, no para sustituirlas, y con la intención de mejorar como profesor. Crea sus vídeos no como una tarea mecánica sino tratando de definir y demostrar. A lo largo de su intervención muestra cómo ha ido evolucionando en los dispositivos técnicos que ha usado.

Desde Puertollano tuvimos a Miguel Ángel Morales Medina que mantiene el blog *Gaussianos* desde hace 15 años. Dedica buena parte de su tiempo a la divulgación de las matemáticas en su blog y también mediante otros formatos, como son artículos en prensa (tanto en papel como digital), colaboraciones en radio o impartiendo charlas de divulgación. Tras haber sido nominado a varios premios, en 2018 *Gaussianos* alcanzó su mayor logro en este sentido al ser galardonado con el Premio Prisma a la Mejor Web/Red Social, premio que cada año entregan los Museos Científicos Coruñeses a distintas iniciativas de divulgación científica en diversos formatos y que pasa a ser uno de los más importantes de esta temática a nivel nacional. Compagina su trabajo como profesor en el IES Juan de Távora de Puertollano con la publicación de artículos en su blog y la divulgación a través de las redes sociales. Además de *Gaussianos*, también escribió durante dos años *El Aleph,* blog de matemáticas alojado en la versión digital de *El País*.

Al igual que Juan Medina, Miguel Ángel es un pionero en su trabajo como bloguero. Como él mismo cuenta en su charla solo conocía un blog de contenidos matemáticos allá cuando en 2006 empezó a

publicarlo. Ahora su blog es todo un referente con contenidos de divulgación matemática. Con ello suple el desconocimiento general, incluso de matemáticos, sobre la historia de la matemática y sus protagonistas. No solo es de interés para los cercanos a la matemática, entre sus lectores abundan personas totalmente alejadas de la matemática. Para ir difundiendo lo que tiene en el blog tiene una cuenta en Twitter con cerca de 38 000 seguidores y más recientemente en Instagram, en la que difunde las imágenes con las que ilustra sus artículos con el objetivo de incrementar su difusión.

Y finalmente, desde Madrid y Ciudad Real intervinieron los hermanos Ángel y José Luis Gonzalez Fernández, creadores de *Troncho y Poncho*, los divulgadores matemáticos más gamberros y divertidos de las redes. Hace dieciocho años estos dos profesores de secundaria en Los Marianistas, uno en Madrid y otro en Ciudad Real, decidieron realizar unos divertidos vídeos que explicaran desde «un humor gamberro» conceptos como potencias, probabilidad, expresiones algebraicas, fracciones, números naturales y enteros, proporcionalidad y áreas de polígonos, en este último caso «a ritmo de marcha militar». *Las aventuras de Troncho y Poncho* <www.angelitoons.com>, tratan de enganchar en capítulos de diez minutos a un alumnado que, en ocasiones, se encuentra con muchos problemas a la hora de resolverlos. Hace unos días se ha estrenado el último capítulo, *Troncho y Poncho: Sistema sexagesimal,* donde un rey de Sumeria viaja en el tiempo por medio de una tostadora para enfrentarse al abuelo en una carrera de sacos. Esto servirá a *Poncho* para explicar cómo se opera con sistemas de numeración sexagesimales como algunas medidas angulares o temporales. José Luis, además, es profesor en la Facultad de Educación de Ciudad Real y recientemente ha escrito *Literatura y Matemáticas*.

En su charla contarona como dieron a conocer sus trabajos en el I Congreso de la Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas en 2010. Por entonces los hacían en CD pero el interés de Juan Martínez Tébar en difundirlos por YouTube hizo que empezaran a ser conocidos. Los vídeos que han




Figura 2. Invitación al *webinar* 2

ido creando llevan mucho trabajo por lo que suelen publicar uno nuevo cada año. No obstante, han empezado a crear un nuevo producto de *Troncho y Poncho* que son las viñetas que difunden por Twitter e Instagram, <https://youtu.be/P7XSMN__vKE>.

## Referencias de Cine


AUBANELL, A., «Carta a quien comienza en el oficio de enseñar matemáticas», <https://drive.google.com/file/d/0BxWO9erf9WnrRldUSmthZmpWaEk/edit?resourcekey=0-00qLZLvH0xz2otNoZyAcA>.

*100 escenas de cine y televisión para la clase de Matemáticas,* <https://fespm.es/index.php/2013/03/20/formulario-de-pedido-al-servicio-de-publicaciones/>. Directorio de escenas con enlaces, <https://matematicasentumundo.es/CINE/100escenas.htm>.

*El mundo está loco, loco, loco,* <https://matematicasentumundo.es/CINE/cine_mundo_loco.htm>.

*Marte*, <https://matematicasentumundo.es/CINE/cine_Marte.ht>.

«Matemáticas en el cine y las series de TV» <https://matematicasentumundo.es/CINE/cine.htm>.


## Referencias de Literatura


«A leer matemáticas», <https://digibug.ugr.es/handle/10481/64608>.

DE LA FUENTE, C. (2009), «Matemáticas en lo improbable 1.ª parte. Porque incluso a los demonios les gustan las sorpresas», *Suma,* n.º 96, <https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/60/SUMA_60.pdf>.

«Los profesores de matemáticas también leen», <https://digibug.ugr.es/handle/10481/64748>.


## Referencias de Redes sociales


GONZALEZ, Á., y J. L. GONZALEZ, Canal YouTube, <https://www.youtube.com/user/angelitoons>.

—Web: <http://www.angelitoons.com/>.

MEDINA, J., Canal YouTube, <https://www.youtube.com/c/juanmemol/>.

—Twitter, <@juanmemol https://twitter.com/juanmemol>.

MORALES, M. Á., Blog <https://www.gaussianos.com/>.

—Twitter: <@gaussianos https://twitter.com/gaussianos>.



Juan Carlos Toscano Grimaldi
Organización de Estados Iberoamericanos
<jctoscanogrimaldi@gmail.com>

# Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

## Comisión Ejecutiva

Presidente: **Onofre Monzó del Olmo**
Secretario General: **Agustín Carrillo de Albornoz Torres**
Vicepresidente: **Juan A. Martínez Calvete**
Tesorera: **Encarnación Amaro Parrado**
Secretaría técnica adjunta: **Bienvenido Espinar Cepas**
Secretaría de relaciones internacionales: **M.ª Claudia Lázaro del Pozo**
Revista Suma: **Iolanda Guevara Casanova**
Servicio de publicaciones: **Juan Martínez-Tébar Giménez**
Secretaría de actividades y formación del profesorado: **Juana M.ª Navas Pleguezuelos**
Secretaría de actividades con alumnos: **Francisco Haro Laguardia**
Secretaría de divulgación: **Juan Carlos Toscano Grimaldi**

## Sociedades Federadas

**Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán»**
Presidenta: **M.ª Encarnación Reyes Iglesias**
IES Comuneros de Castilla, C/Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

**Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)**
Presidente: **Julio Rodríguez Taboada**
CPI Dos Dices, C/ Dos Dices, s/n. 15911 Rois (A Coruña)

**Euskadiko Matematika Irakasleen Elkartea «EMIE 20+11»**
Presidenta: **Ana Fernández de Betoño Sáenz de Olamendi**
IES Miguel de Unamuno BHI, c/ Vicente Gonzalez de Etxabarri, s/n 01009 Vitoria-Gasteiz. 01009 Vitoria-Gasteiz (Araba)

**Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)**
Presidente: **Bernat Ancochea Millet**
C/ Itàlia, 84B. 08320 El Masnou (Barcelona)

**Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»**
Presidente: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Centro de Documentacion SAEM Thales, Facultad de Ciencias, Dpto Matemáticas, Campus Río San Pedro s/n, Torre Central 4º planta 11510 Puerto Real (Cádiz)

**Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas**
Presidente: **Daniel Sierra Ruiz**
IUMA, Edificio de Matemáticas, 1.ª planta, Universidad de Zaragoza, C/ Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

**Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»**
Presidente: **Rubén Pérez Zamanillo**
IES Mata Jove, Plaza Club Patín Gijón Solimar, 33213 Gijón (Asturias)

**Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas**
Presidenta: **Agar Arrocha Reyes**
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa. 38205 La Laguna (Santa Cruz de Tenerife)

**Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas**
Presidente: **Serapio García Cuesta**
IES Universidad Laboral, Avda. de la Mancha s/n, 02006 Albacete

**Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia**
Presidenta: **Catalina Ayala Molina**
Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia. Campus de Espinardo. 30100 Murcia

**Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»**
Presidente: **José Pedro Martín Lorenzo**
Centro Educativo Municipal, 2,ª planta, C/ San Juan nº 3A, 06400 Don Benito (Badajoz)

**Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»**
Presidente: **José Luis Muñoz Casado**
Facultad de CC. Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, Plaza de las Ciencias, 3, 28040 Madrid

**Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria**
Presidenta: **Carmen Espeso Ortiz**
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

**Sociedad Melillense de Educación Matemática**
Presidente: **Jesús Diego Rodríguez García**
IES Enrique Nieto. Departamento de Matemáticas, C/ Avenida de la Juventud, 4. 52005 Melilla

**Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»-Matematika Irakasleen Nafar Elkartea**
Presidente: **J. Javier Jiménez Ibáñez**
IES Alhama, Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

**Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas**
Presidente: **José Javier Etayo Gordejuela**
Facultad de Educación. Despacho 3215
C/ Rector Royo Villanova, s/n. 28040 Madrid

**Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima»**
Presidenta: **Elena Ramírez Ezquerro**
Facultad de Ciencia y Tecnología Edificio Científico Tecnológico, CCT; C/ Madre de Dios, 53. 26006 Logroño

**Sociedade de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA)**
Coord. Sección Matemáticas: **Iria Fernández Fontenla**
Facultade de Ciencias, Rúa Alfonso X o Sabio, s/n. 27002 Lugo

**Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX**
Presidente: **Daniel Ruiz Aguilera**
C/ Miquel Capllonch, 30, 3A. 07010 Palma (Illes Balears)

**Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»**
Presidente: **Onofre Monzó del Olmo**
Departamento de Didáctica de la Matemática, Apdo. 22045. 46071 València

FESPM

# Seminario GeoGebra para infantil y primaria en Teruel

Carmen Soguero Pamplona

Teruel presume de frío. Noviembre suele ser un mes que anticipa lo duro del invierno. Sin embargo, durante el fin de semana del 19 al 21 quiso moderarse para acoger a los participantes en el Seminario Geogebra en Educación Infantil y Primaria organizado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

La procedencia de los asistentes era variada, como corresponde a la entidad organizadora. Diversas sociedades estuvieron representadas: AGAPEMA desde Galicia, FEEMCAT desde Cataluña, SCPM desde Canarias, SMPM desde Madrid, SEMCV desde la Comunidad Valenciana, SBM desde Baleares, SCMPM desde Castilla - La Mancha, SMPC desde Cantabria y, como sociedad anfitriona, la SAPM en Aragón.

Entendiendo el interés de la celebración de este seminario en Teruel (figura 1), a la SAPM se unieron como colaboradoras otras entidades ofreciendo espacios y materiales: el Ayuntamiento de la ciudad, el CEIP Ensanche, la Diputación Provincial de Teruel



y la Facultad de Ciencias Sociales y Humanas de la Universidad de Zaragoza, con sede en el campus turolense.

El punto de partida de este seminario tuvo lugar meses antes de su celebración. Como docentes, todos hemos vivido el brutal cambio metodológico impuesto por la pandemia durante el pasado año 2020. Los recursos que nos permiten llegar al alumnado a través de la tecnología dejaron de ser un elemento accesorio en nuestras programaciones para ocupar el centro del día a día. Muchas miradas se volvieron de nuevo hacia GeoGebra, viendo en este programa una herramienta que pasaba de ser útil a ser necesaria. Desde la Federación se organizó un grupo de trabajo para, con la colaboración del INTEF (Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado), reunir en un repositorio una selección de recursos disponibles en la web del programa, tomando como referente los contenidos del currículo de todos los niveles, desde Educación Infantil a Bachillerato.



Figura 1. Teruel

Durante el desarrollo de este trabajo quedó patente la necesidad de incidir en las posibilidades que tienen estos recursos entre el profesorado de los primeros niveles educativos. Generalmente, su uso se centra en los cursos superiores, siendo menor conforme nos acercamos a los primeros años de escolarización. Por ello se planteó la necesidad de formación en este sentido.

Al abordar el diseño de la actividad se priorizó la utilización de materiales ya elaborados frente al diseño de nuevos materiales con el programa. Se decidió no dedicar el tiempo a conocer el programa, sino a cómo localizar, seleccionar, personalizar y organizar en libros las actividades, generando así un material listo para usar en clase de manera rápida y sencilla.

No en vano, los objetivos planteados giraban en torno al conocimiento de las posibilidades que ofrecen al profesorado de Educación Infantil y Primaria los recursos de GeoGebra para mejorar la enseñanza de las matemáticas y a la incorporación del programa a la práctica docente de forma habitual.

Esta idea nos llevó a organizar las sesiones de manera progresiva.

El viernes 19 se desarrolló la actividad en las instalaciones facilitadas por la Facultad de Ciencias Sociales y Humanas de la Universidad de Zaragoza, sita en el Campus de Teruel. Allí, tras la recepción de los asistentes y la entrega del material aportado por los colaboradores, los representantes de las entidades organizadoras y colaboradoras inauguraron el seminario con palabras de agradecimiento al esfuerzo realizado por los asistentes al desplazarse para su participación en la actividad (figura 2).

A continuación, tuvieron lugar las primeras sesiones. Ana Isabel Blasco Nuño, profesora de Educación Infantil en el CEIP Ricardo Mallén de Calamocha (Te-




Figura 2. Representantes de las entidades organizadoras

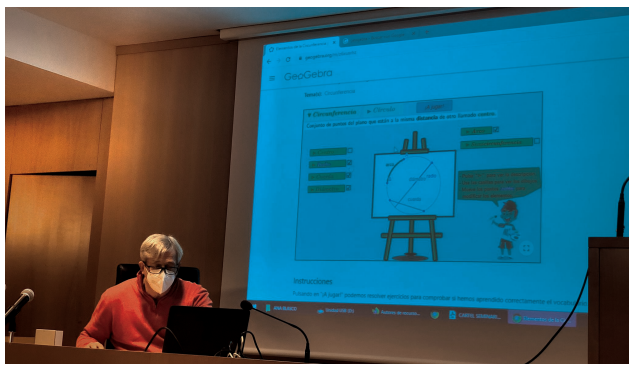



Figura 4. Jesús Serrano Higueras

ruel) y Ángel Antonio García Marrero, profesor de Educación Primaria en el Colegio Escuelas Pías de Tenerife, nos mostraron su trabajo en las aulas mediante su intervención conjunta titulada «Experiencias de uso de GeoGebra en aulas de Ed.Infantil y Ed. Primaria». En ella, además de multitud de recursos, se mostraron ejemplos reales de aplicación en el aula, con propuestas, valoraciones y vídeos. Era el primer paso: mostrar que hay profesores que utilizan con éxito el programa en estos niveles (figura 3).

A continuación, Jesús Serrano Higueras, del CEIP Tomé y Orgaz de Casarrubuelos (Madrid) nos mostró con su intervención «Sitios web con recursos GeoGebra disponibles», dónde localizar los recursos GeoGebra, qué páginas los ofrecen y cómo manejar el repositorio de la página principal del programa. Respondía a la pregunta planteada tras la sesión anterior: ¿de dónde sacamos las actividades para llevar al aula? (figura 4).



Figura 3. Ana Isabel Blasco y Ángel Antonio García

Entendiendo la importancia de llegar a los futuros docentes con estos contenidos, las sesiones del viernes se abrieron al alumnado de los Grados de Magisterio en Educación Primaria y Educación Infantil que se cursan en esta facultad, así como a todos los docentes de estos niveles de Teruel.

Tras un merecido descanso nocturno, se iniciaron al día siguiente las sesiones que se celebraron en las instalaciones del CEIP Ensanche.

El sábado 20 se dedicó a lo que considerábamos el siguiente paso: una vez visto qué se puede hacer en las aulas, y conocidos los sitios web con recursos, tocaba elaborar una secuencia didáctica propia, que quedara lista para llevar a clase, adecuada al nivel y los contenidos que cada uno considerara. Para ello, Cristina Naya Riveiro, de la Facultad de Educación de la Universidad de Santiago de Compostela, y Ricardo Alonso Liarte, del IES Salvador Victoria de Monreal del Campo (Teruel) impartieron el taller «Diseño de secuencias didácticas para Infantil y Primaria con recursos GeoGebra. Descarga de recursos y creación de libros».

La sesión fue muy animada, trabajando en grupos con intereses comunes, en los que los asistentes con más experiencia con el programa ayudaron a plasmar sus ideas a los más novatos.

Por la tarde se realizó una provechosa puesta en común de las secuencias desarrolladas por la mañana. Durante este tiempo cada grupo explicó el motivo que le había llevado a la elección de los contenidos, así como los criterios para la selección de recursos realizada. Compartir el conocimiento se convirtió en el centro de la actividad.

Para acabar la segunda jornada, Carmen Soguero Pamplona, de la Facultad de Ciencias Sociales y Humanas de la Universidad de Zaragoza, desarrolló la sesión «Elementos del entorno para diseñar actividades GeoGebra», mostrando ejemplos de cómo llevar el entorno próximo del alumnado al programa, para acercar la enseñanza de las matemáticas a los elementos que resultan cotidianos para los niños (figura 5).

Las propuestas mostradas tomaron ejemplos de la ciudad de Teruel, por lo que, al final de la tarde, se impuso un paseo para conocerla. La casualidad quiso que en ella se estuviera celebrando la Semana Modernista, lo que le dio al paseo un toque especial. Las luces nocturnas y la visita a varios monumentos cerraron esta segunda jornada del seminario.

El domingo 20, ya con las maletas listas, nos dispusimos a participar en la última sesión formativa. En «GeoGebra Classroom en la escuela», Ricardo Alonso Liarte nos mostró cómo, en unos pocos y sencillos pasos, GeoGebra nos permite visualizar, compartir y conservar el trabajo de nuestro alumnado con el programa, y Bernat Ancochea Millet, de la Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya nos inició en la creación de materiales con 3D, mostrándonos sus posibilidades didácticas tal como se puede ver en la figura 6.

Para terminar el encuentro, hicimos una puesta en común de conclusiones alcanzadas tras el desarrollo del seminario. Entre otros aspectos, cabe destacar que todos estuvimos de acuerdo en la idoneidad del planteamiento de la actividad: para que el uso de GeoGebra se extienda entre el profesorado de Educación Infantil y Primaria es imprescindible dar a conocer la multitud de materiales disponibles, así como la sencillez de su uso en el aula a través de un navegador, sin necesidad de conocimientos de programación. Así mismo, se acordó continuar el trabajo como grupo, compartiendo los materiales y las experiencias a través de alguna herramienta web aún por determinar. Por último, se valoró especialmente el hecho de que, tras la celebración del seminario, los participantes se llevaran un material (libro de GeoGebra), elaborado por ellos adaptado a sus necesidades y listo para usar en su aula.

Sin duda, la realización de este seminario ha sido muy provechosa, como se entrevé en el resultado de la encuesta de valoración realizado por la FESPM. Probablemente, a ello ha contribuido la convivencia entre el profesorado participante derivada de la presencialidad de la actividad.



Figura 5. Sesión de Carmen Soguero



Figura 6. En el taller de Ricardo Alonso y Bernat Ancochea




Figura 7. Los participantes en el seminario

Aunque las sesiones virtuales tienen muchas posibilidades, el calor de un encuentro personal, las conversaciones informales durante los recesos o las comidas nos permiten compartir mucho más que el mero conocimiento sobre un programa. Y si además esto ocurre en Teruel, ¿qué más se puede pedir?

Carmen Soguero Pamplona
Universidad de Zaragoza
<csoguero@unizar.es>

# XII Premio Gonzalo Sánchez Vázquez

Junta de Gobierno de la FESPM

Estos números que crecen y crecen sin descanso,
0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, …
Acercándose cada vez más a la unidad divina,
acariciándola sin llegar a tocarla todavía;
esa sucesión numérica es también poesía.

Es como una rima inacabable y sostenida,
como una esperanza siempre insatisfecha,
como un deseo que nunca se detiene,
como un cercano horizonte inalcanzable…

Triángulos, círculos, polígonos,
elipses, hipérbolas, parábolas,
suenan en nuestros oídos desde Euclides
como formas geométricas abstractas,
figuras ideales que viven con nosotros,
porque también en el amor hay triángulos
y en el cielo se dibuja sin compás el arco iris.

Vais paralelos siempre lenguaje y geometría,
pues en el habla se esconden las elipses,
en los libros sagrados se habla por parábolas.

Números y formas, imágenes y ritmos
orden y luz en versos y en teoremas,
con un toque supremo de armonía,
estáis juntas en la memoria de los tiempos,
juntas estáis matemática y poesía.

Gonzalo Sánchez Vázquez

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca el XII Premio Gonzalo Sánchez Vázquez en homenaje a quien fue su presidente de honor

## Breve semblanza de GSV

Basada en la que Antonio Pérez Jiménez escribió en *Suma* 25 (junio, 1997) como homenaje a Gonzalo Sánchez Vázquez, quien había fallecido el año anterior y a quien se dedicó ese número de la revista.

Nacido en 1917, Gonzalo estudió Bachillerato en el Instituto Gaona de Málaga, el mismo en el que lo hizo el premio Nobel Severo Ochoa. Luego cursó el Plan Profesional de Magisterio. Pero como dicho plan fue derogado tras la Guerra Civil, decidió estudiar Ciencias Exactas.

En 1954 obtuvo la Cátedra de Matemáticas del Instituto Femenino de Oviedo, del que también sería director, y extiende su labor docente a la Universidad

de Oviedo. Tres años después se encarga de una cátedra en la Universidad de Zulía, en Maracaibo (Venezuela), de donde regresa en 1962 y se hace cargo de la Cátedra en el Instituto Murillo de Sevilla. Al mismo tiempo imparte clase de diversas disciplinas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. En 1968 se le encarga la puesta en marcha del Instituto Fernando de Herrera y a partir de 1970 colabora en la formación del profesorado de Matemáticas con el Centro de Orientación Didáctica del Ministerio de Educación y Ciencia y el ICE de la Universidad de Sevilla.

En noviembre de 1981 Gonzalo es nombrado presidente de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales» y organiza las II JAEM de 1982. En su discurso de clausura Gonzalo aboga por una necesaria renovación de la educación matemática basada en un resurgimiento de la geometría. Gonzalo fue promotor y primer presidente de la FESPM creada en 1987 y de la cual, al término de su mandato, fue nombrado presidente de honor.

Pero lo que engrandece la figura de Gonzalo fue su dedicación a los demás más allá de sus obligaciones como profesional. Persona de gran cultura, sus alumnos le llamaban *raíz de dos* por lo inconmensurable de su humanidad.

## Bases de la convocatoria

1. En un sentido general, el objetivo es premiar la labor docente y los valores humanos en la educación matemática. Y en particular, la entrega desinteresada, el amor, el espíritu tolerante, la buena disposición... hacia los alumnos, compañeros, amigos y, en general, hacia la enseñanza de la Matemática. Es decir, el magisterio en sentido amplio.
2. La periodicidad del Premio es bianual, como la de las Jornadas sobre el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).
3. El Premio consiste en el nombramiento de socio de honor de la FESPM al premiado y la entrega de una placa conmemorativa u objeto alegórico.
4. Podrá concurrir al Premio el profesorado dedicado a la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel educativo.
5. Las candidaturas podrán ser presentadas por una sociedad federada y se dirigirán al presidente de la FESPM. Los promotores presentarán el currículo e informes que estimen pertinentes, entre ellos el informe de la junta directiva de la sociedad o del conjunto de socios proponentes.
6. El plazo de presentación de candidaturas finalizará el 31 de mayo de 2022.
7. La concesión del Premio correrá a cargo de la Junta de Gobierno de la FESPM. Para ello, el candidato deberá obtener mayoría absoluta en la correspondiente votación. De no alcanzarse mayoría absoluta en primera votación, se procedería a una segunda. Llegado el caso de no obtener mayoría absoluta en esta segunda votación, el Premio se declararía desierto.
8. Para la concesión del Premio, la Junta de Gobierno de la FESPM atenderá, entre otros, los siguientes criterios:
   — *Labor docente*. Dedicación del candidato a la enseñanza de las matemáticas.
   — *Valores humanos*. Tolerancia, entrega a los demás, talante, espíritu de diálogo, respeto a los compañeros, alumnos... constatados por sus avalistas.
   — *Currículo*. Hechos, anécdotas y otros acontecimientos referidos por quienes proponen al candidato y que pongan de manifiesto sus valores humanos.
9. Se publicará en *Suma* el resultado de la concesión del Premio y una semblanza del premiado.
10. La entrega del Premio se llevará a cabo en un acto específico durante la celebración de las XX JAEM en Valencia del 3 al 6 de julio de 2022.

Junta de Gobierno de la FESPM

# Servicio de publicaciones de la FESPM

Juan Martínez-Tébar Giménez

## Ideas fundamentales que inspiran el Servicio de Publicaciones

La filosofía y la pretensión del Servicio de Publicaciones de la FESPM es servir de canal para que las distintas sociedades puedan publicar sin tener necesidad de un servicio propio o de hacerlo externamente.

La existencia y el buen funcionamiento de este servicio permite disponer de un cauce para publicar y difundir todo tipo de documentos relativos a la educación matemática, que normalmente no van a ser publicados por los cauces comerciales, porque en general no son rentables económicamente debido al reducido número de personas que están interesados en ellos; siendo en la mayoría de los casos una documentación de gran riqueza para las personas interesadas en la educación matemática que no llega nunca a publicarse.

Esto no quiere decir que alguna publicación concreta pueda ser rentable, algunas sociedades federadas tie-

nen publicaciones que producen beneficios económicos, pero no es la tónica general, ni lo que a mi juicio debe de primar en nuestro Servicio.

Por el contrario lo consideramos como un servicio, cuya misión es publicar las cosas que por su calidad y utilidad, merezcan no perderse y pasar a formar parte de nuestro patrimonio cultural matemático. Debe primar este criterio frente a la rentabilidad económica de las editoriales, que lógicamente son empresas cuyo objetivo es ganar dinero.

## Estructura. Dependencias y funciones del Servicio de Publicaciones

El Servicio de Publicaciones es un servicio de la FESPM, su responsable es el secretario de publicaciones, vocal de la Comisión Ejecutiva. Ello implica que la primera dependencia es justamente de dicha Comisión Ejecutiva y en última instancia de la Junta de Gobierno de la Federación.

La Junta de Gobierno debe aprobar las líneas y criterios generales de publicación y el proyecto de presupuesto anual, que se incluirá como una partida en el proyecto general de presupuesto de FESPM. Esto no es óbice para que el presupuesto sea aumentado o disminuido según las circunstancias lo aconsejen por la Comisión Ejecutiva, dando cuenta posterior a la Junta de Gobierno. Las publicaciones concretas serán aprobadas por el director del Servicio, de acuerdo y ateniéndose a las líneas y criterios generales establecidos por la Junta de Gobierno, contando con el asesoramiento del Consejo de Publicaciones. De la marcha de las ediciones y de las incidencias del servicio dará cuenta a la Comisión Ejecutiva y por último a la Junta de Gobierno.

El Servicio cuenta con una Secretaría y con un Consejo Asesor Editorial. La Secretaría debe estar integrada por un número reducido (entre 3 y 5) de personas de la localidad en la que se ubique la sede del Servicio y tendrá funciones técnicas y administrativas. Debe haber un asesor con experiencia en publicaciones, un tesorero, un secretario y contar con una persona de apoyo en las tareas de tipo administrativo y de gestión, envíos etc. Forman parte del Consejo Asesor Editorial: un representante de cada servicio de publicaciones existente en las sociedades federadas, un representante de *Suma*, el vocal de prensa, el vocal de actividades con el profesorado, el vocal de actividades con alumnos y dos miembros designados por la Junta de Gobierno de la FESPM. Tendrá funciones de coordinación de las publicaciones de las distintas sociedades y de propuesta de proyectos de publicación, así como de asesoramiento al vocal de publicaciones. También puede tener la función de réferi, sin perjuicio de que pueda haber otros.

El actual equipo está formado Juan Martínez-Tébar Giménez como secretario del Servicio de Publicaciones de la FESPM (director del servicio), Serapio García Cuesta como secretario y Francisco Javier Blázquez Merino como tesorero (figura 1). Además contamos con la colaboración habitual de los compañeros de la SCMPM de Albacete Joaquín Jiménez Ramos, Ramón Cuenca Cuenca y Antonio Bueno Aroca.

El servicio se encuentra ubicado en el IES Universidad Laboral de Albacete, avenida de la Mancha s/n 02006, Albacete (figura 2).



Figura 1. Serapio García Cuesta, Juan Martínez-Tébar Giménez y Francisco Javier Blázquez Merino



Figura 2. Universidad Laboral de Albacete

## Publicaciones realizadas en nuestra etapa

### *100 ESCENAS DE CINE Y TELEVISIÓN PARA LA CLASE DE MATEMÁTICAS*

Autor: José Maria Sorando Muzás.

La propuesta didáctica de uso del cine y la televisión en clase de matemáticas se complementa con la siguiente relación de películas donde se encuentran escenas aprovechables para el aula. Están clasificadas según los temas del currículo y para cada una se especifican los niveles de aplicación. Pulsando en cada título se accede a un artículo sobre la película de referencia, en cuya esquina superior derecha hay un enlace a la escena (figura 3).

En el libro, y para cada escena, José María incluye:

- Título, dirección, producción y año
- Nivel adecuado en el aula
- Duración y momento de la escena dentro de la película
- Argumento
- Diálogo durante la escena
- Actividad propuesta para el aula
- Contenidos matemáticos tratados
- Comentarios

Además, al final del libro se incluye una guía de las escenas clasificadas por temas y nivel de enseñanza para las que son recomendables, y un listado de referencias bibliográficas y direcciones de internet. De este libro se han realizada dos ediciones.

### *CERVANTES, DON QUIJOTE Y LAS MATEMÁTICAS*

Autores: Luis Balbuena Castellano y Juan Emilio García Jiménez.

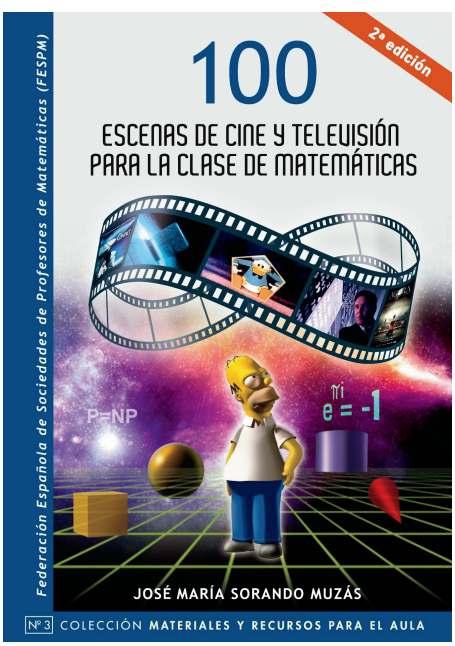



Figura 3

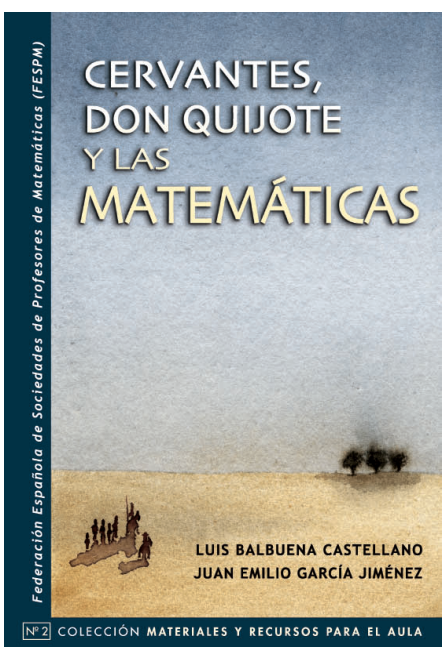



Figura 4

En el libro se repasan aspectos matemáticos relacionados con Cervantes y con su obra. Aparte de hablar sobre las matemáticas que podía conocer Cervantes o que se conocían en su época, se trata con aspectos matemáticos que aparecen reflejados en el libro como tipos de números, el sistema monetario o los distintos pesos y medidas que aparecen en la obra, aspectos cartográficos o astronómicos, etc. (figura 4).

En todo momento aparecen citas del texto original acompañados de una serie de actividades para realizar con el alumnado.

En definitiva, es un libro, que no solo es tremendamente ameno, reflejo de sus autores, sino que está lleno de posibilidades para trabajar con él didácticamente y especialmente sirve para ver con una mirada matemática una de las grandes obras de la literatura.

### *ESTRELLAS EN LA SAGRADA FAMILIA*

Autora: María de los Desamparados López de Briñas Ferragut.

La contemplación de la fachada nordeste de la Basílica de la Sagrada Familia de Gaudí, el Portal del Nacimiento, ya no será igual tras el libro *Estrellas en la Sagrada Familia* (2016) de María de los Desamparados López de Briñas y que ha sido editado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) (figura 5).

La profesora López de Briñas hace un estudio pormenorizado de la Gran Estrella de Belén, de las estrellas de los pináculos y de las estrellas del Zodiaco que rodean a la Anunciación. El libro tiene además el interés añadido de mostrar cómo se realiza el trabajo, cómo se hacen hipótesis que después hay que desechar hasta encontrar una solución plausible.

### *LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES. BIBLIA DE LA GEOMETRÍA GRIEGA*

Autor: Pedro Miguel González Urbaneja.

*Los Elementos* de Euclides es el tratado de matemáticas que mayor influencia ha tenido a lo largo de la historia de la cultura, incluso mucho más allá de la propia matemática y ciencias afines y que más veces se ha editado, después de la *Biblia*. La principal obra de Euclides ha constituido, como autoridad indiscutida, el cuerpo de doctrina central de la totalidad de las ciencias matemáticas elementales, hasta mediados del siglo XIX, del que se puede derivar el resto y ha




Figura 5

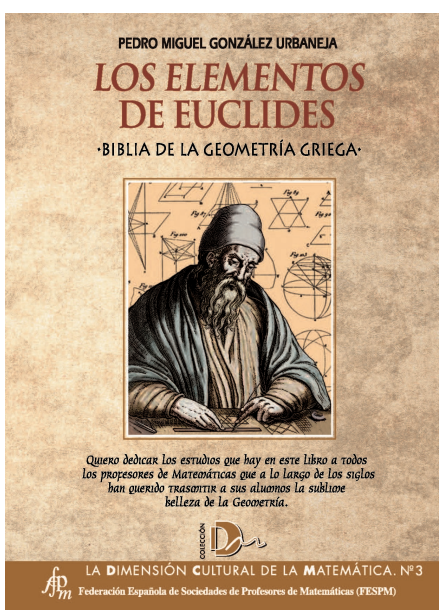



Figura 6

sido, a lo largo de la historia de la ciencia y de la educación, el principal vehículo de la transmisión del saber matemático, hasta mediados del siglo XX. Pero aún hoy la carrera de Euclides no ha concluido, porque *Los Elementos* siguen siendo, tanto una fuente inagotable de estudios epistemológicos y de investigaciones históricas, como el núcleo esencial de la matemática elemental, que determina gran parte de la temática escolar básica y secundaria (figura 6).

Cada nueva versión de *Los Elementos* ha sido un nuevo homenaje y un monumento a la persistencia de la memoria de su egregio autor, el gran geómetra platónico Euclides.

## ÁNGEL RAMÍREZ. UN HUMANISTA DE FRONTERA

Una publicación colectiva sobre la figura de Ángel Ramírez, matemático, filósofo, poeta, humanista, que falleció junto a su compañera María Jesús Buil en un terrible accidente que se llevó sus vidas pero que dejó un gran legado.

El libro se divide en dos partes: en la primera, diez autores cuentan la historia de Ángel, enlazando distintas facetas de su vida con el desarrollo político y social de España. En la segunda parte es el propio Ángel el que habla y la obra recoge sus aportaciones en distintos campos (figura 7).

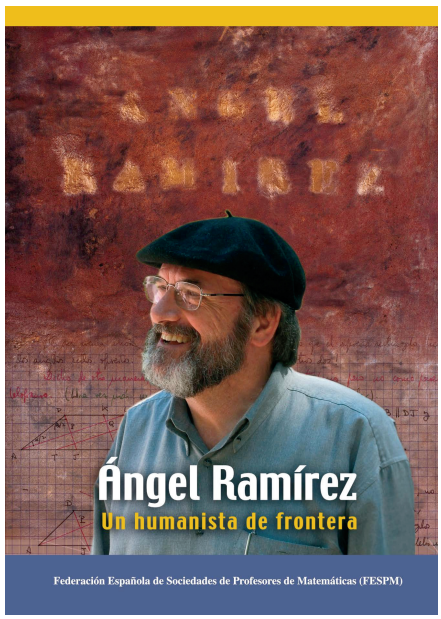


Figura 7

## TEXTOS DEL PROFESOR LUIS RICO

Luis Rico nace en Almería el 23 de enero de 1946. En 1964 comienza sus estudios de Matemáticas en la Universidad de Granada, justamente cuando se implanta su licenciatura en esa universidad. Al acabar la carrera da clases en un instituto (como profesor agregado) y, enseguida, en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, en donde años después leería la tesis doctoral en el departamento de Análisis Matemático; más tarde su docencia la desarrollará fundamentalmente en la Facultad de Educación. En 1969 es catedrático de Escuelas Normales. En 1978 es catedrático de Escuela Universitaria y, en 1992, catedrático de universidad: el primero del área de Didáctica de la Matemática de la universidad española (figura 8).

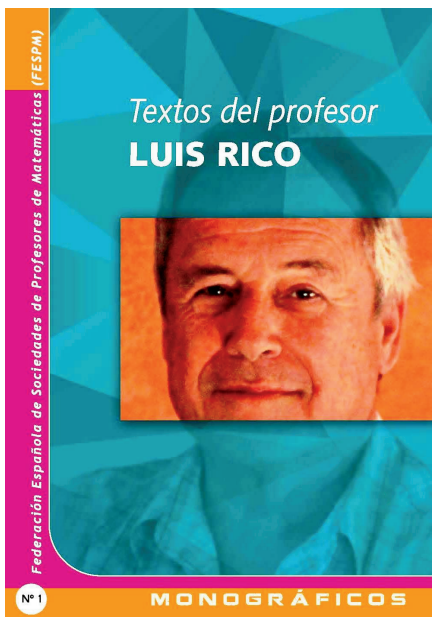


Figura 8

## DESDE MI CONFINAMIENTO: IDEAS Y RECURSOS PARA APRENDER MATEMÁTICAS

Autor: Luis Balbuena Castellano.

Lo que más llama la atención del libro es que cada capítulo comienza con un «sorbito de Mates», donde

el autor de forma amena nos descubre que las matemáticas están en todo lo cotidiano, en lo que todo el mundo ve y pocos miran, ámbito en el que él es todo un referente (figura 9).

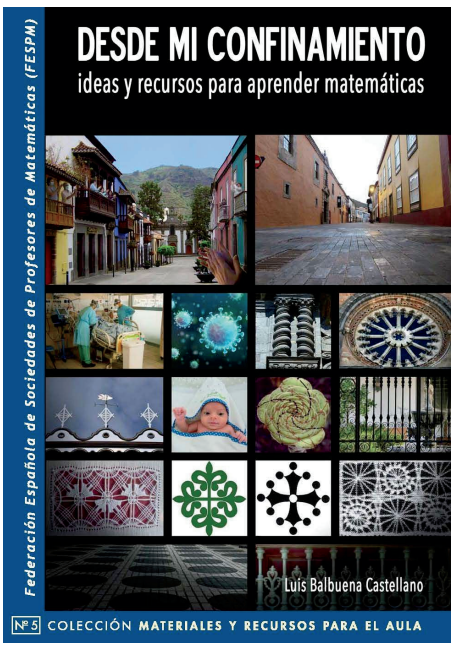



Figura 9




Figura 10

Cada «chupito» o sorbito como él los llama, viene acompañado de dos retos a los que el lector tiene la oportunidad de enfrentarse poniendo a prueba distintas estrategias como contar, generalizar, iterar, imaginar…, para llegar a la solución o soluciones. El autor consigue llamar nuestra atención para profundizar más en los temas tratados (rectángulos, banderas, frisos, cruces, calendarios…) y nos invita a usar los sorbitos y los retos como recursos didácticos que lleguen a las aulas para acabar de una vez por todas con «¿y eso para qué sirve?».

Todo ello se puede adaptar a los distintos niveles educativos y sorprender a nuestros alumnos, poniéndolos en guardia y receptivos. ¿Existen mejores condiciones para abordar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?

## *MIRAR LA CIUDAD CON OJOS MATEMÁTICOS. ITINERARIOS MATEMÁTICOS POR BADAJOZ*

Autor: Lorenzo J. Blanco Nieto.

Los paseos o rutas matemáticas son un recurso didáctico útil y conveniente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, en particular, en la resolución de problemas. La transversalidad e interdisciplinariedad necesaria en la preparación y desarrollo de la actividad le da una dimensión integradora de saberes a la educación matemática, que ayuda a comprender el papel de esta materia en la evolución de las sociedades (figura 10).

Por otra parte, factores afectivos y de motivación, que provocan las actividades que se proponen, abren una puerta para el estudio de una disciplina que se considera abstracta, difícil y sobre la que algunos estudiantes sienten cierta animadversión.

## *OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL 1990-2004*

Autores: Luisa M. Almazán Álvarez, Francisco Miguel González Ternero y Francisco Haro Laguardia

En esta publicación presentamos los problemas propuestos en las pruebas individuales de las treinta pri-

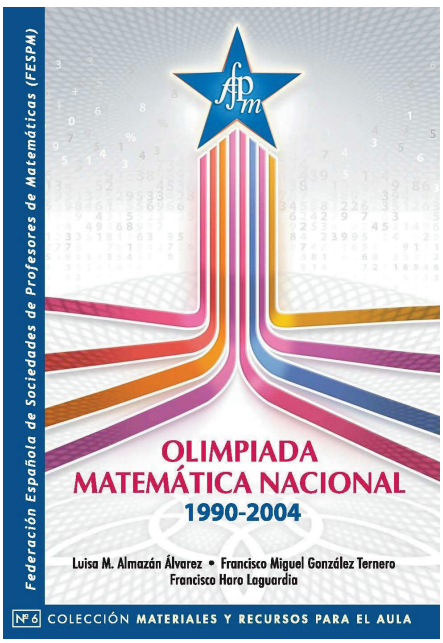



Figura 11

meras ediciones de la Olimpiada Matemática Nacional (OMN) de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), gracias al arduo trabajo de recopilación llevado a cabo por Luisa Almazán, Francisco González y Francisco Haro. Este es un primer volumen que abarca del año 1990 al año 2004 (figura 11).

## Colección Miradas Matemáticas

En la escuela la matemática es vista muy habitualmente como una ciencia sin usos prácticos, como una colección de reglas que parecen surgir por arte de magia de un sombrero; como un cuerpo de conocimiento estanco, sin evolución en el tiempo que se inventaron hace siglos y que, desde entonces poco ha cambiado. Por ello, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y el Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT) junto a la editorial Libros de la Catarata lanzan la colección de libros Miradas Matemáticas, que combina la divulgación con la didáctica de las matemáticas (figura 12).

El público principal de estas obras son los profesores de matemáticas en niveles de secundaria a bachillerato, con el objetivo de dotarles de nuevas ideas para desarrollar materiales que acerquen las matemáticas de una forma interesante y atractiva en sus aulas, llevando la investigación al aula, con una perspectiva histórica, conectándolos con otras ciencias y los desarrollos tecnológicos. Sin embargo, todas las obras pueden ser disfrutadas por un público más amplio como un texto de divulgación, en el que los ejercicios propuestos se convierten en retos para todas las edades, de forma que el libro ofrece una experiencia participativa, más allá de la lectura pasiva.

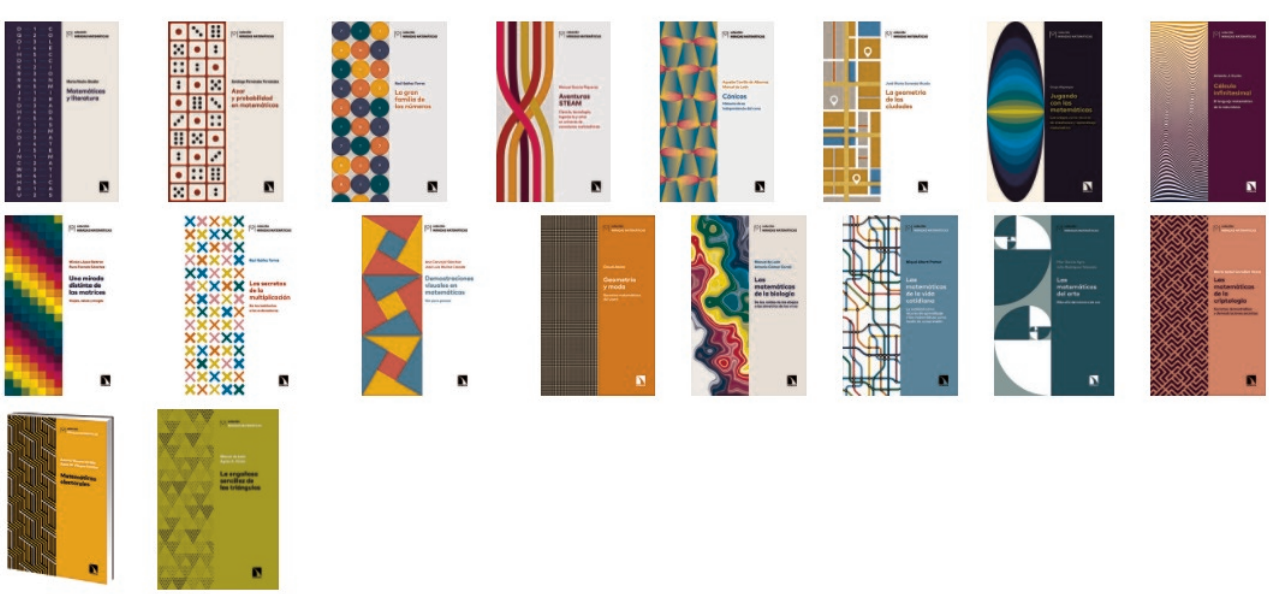


Figura 12

Hasta el momento se llevan publicados 18 libros:

— *Matemáticas y Literatura*, Marta Macho-Stadler (UPV/EHU), septiembre 2021, ISBN: 978-84-1352-301-9.
— *Azar y Probabilidad en matemáticas*, Santiago Fernández Fernández, julio 2021, ISBN: 978-84-1352-274-6.
— *La gran familia de los números*, Raúl Ibáñez Torres (UPV-EHU), mayo 2021,ISBN: 978-84-1352-225-8.
— *Aventuras STEAM*, Manuel García Piqueras (consultor, profesor de secundaria y asociado de la UCLM), febrero 2021, ISBN: 978-84-1352-153-4.
— *Cónicas. Historia de su independencia del cono*, Agustín Carrillo de Albornoz Torres (FESPM) y Manuel de León (ICMAT-CSIC), octubre 2020, ISBN: 978-84-9097-989-1.
— *La Geometría de las Ciudades*, José María Sorando Muzás (Universidad de Zaragoza), agosto 2020. ISBN: 978-84-1352-059-9.
— *Jugando con las matemáticas. Los juegos como recurso de enseñanza y aprendizaje matemático*, José Muñoz Santoja, Juan Antonio Hans Martín, Antonio Fernández-Aliseda Redondo (Grupo Alquerque), junio de 2020. ISBN: 978-84-9097-989-1.
— *Cálculo infinitesimal. El lenguaje matemático de la naturaleza,* Antonio J. Durán (Universidad de Sevilla), febrero de 2020, ISBN: 978-84-9097-926-6.
— *Una mirada distinta de las matrices. Viajes, retos y magia*, Mireia López Beltran y Pura Fornals Sánchez (FESPM), noviembre 2019, ISBN: 978-84-9097-732-3.
— *Los secretos de la multiplicación*, Raúl Ibáñez (UPV-EHU), septiembre 2019, ISBN: 978-84-9097-826-9.
— *Demostraciones visuales en Matemáticas. Ver para pensar,* Ana Carvajal Sánchez y José Luis Muñoz Casado (FESPM), junio 2019, ISBN:978-84-9097-714-9.
— *Geometría y moda. Secretos matemáticos del vestir*, Claudi Alsina, enero 2019. ISBN: 978-84-9097-593-0.
— *Las matemáticas de la Biología*, Manuel de León (ICMAT) y Antonio Gómez Corral (UCM-ICMAT), enero 2019, ISBN: 978-84-9097-576-3.
— *Las matemáticas de la vida cotidiana*, Miquel Albertí Palmer (FESPM), noviembre 2018, ISBN: 978-84-9097-565-7.
— *Las matemáticas del arte,* Julio Rodríguez Taboada y Pilar García Agra (FESPM), septiembre 2018, ISBN: 978-84-9097-479-7.
— *Las matemáticas de la criptología,* María Isabel González Vasco (Universidad Rey Juan Carlos), julio 2018. ISBN: 978-84-9097-505-3.
— *Matemáticas electorales. Claves para interpretar sondeos y elecciones*, Antonio Moreno Verdejo y Adela M.ª Villegas Escobar (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas), octubre 2017, ISBN: 978-84-9097-363-9.
— *La engañosa sencillez de los triángulos*, Manuel de León (CSIC-ICMAT) y Ágata Timón (CSIC-ICMAT), julio 2017, ISBN: 978-84-9097-344-8.

## Coeditado con Catarata

### DISPARATES Y GAZAPOS MATEMÁTICOS

Autor: José María Sorando Muzás

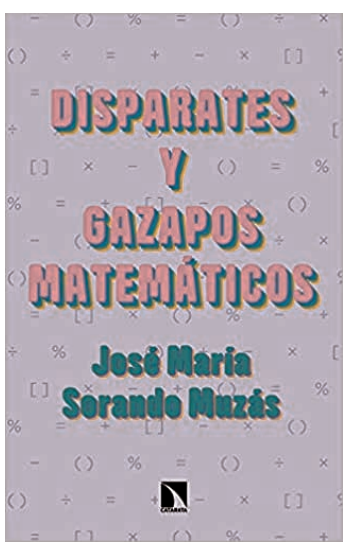



Figura 13

El error matemático atraviesa fronteras, ideologías y actividades: lo cometen tanto personajes célebres como Donald Trump, Cristiano Ronaldo o Enrique Iglesias como periodistas, publicistas y otros profesionales de la comunicación, al igual que una gran parte de la población.

Con frecuencia, la ignorancia matemática, conocida como anumerismo, campa a sus anchas y se exhibe sin complejos. Es incluso motivo de broma y de disculpa social. Ni su rectificación siempre llega ni se la espera, ni su persistencia es solo fruto del desconocimiento, también puede denotar voluntad de engaño. Con un toque de humor y de crítica mordaz, el autor señala y esclarece habituales errores matemáticos que aparecen en radio, prensa o redes sociales.

## Pedidos de libros

Todos los libros reseñados y anteriores de los que hay stock se pueden solicitar en la página web: <https://fespm.es/index.php/category/servicio-de-publicaciones/>. Los socios de cualquier sociedad adherida a la FESPM gozan de precios especiales. De momento solamente nos es posible hacer envíos dentro de España. En breve también dispondremos de la mayoría de estos libros en formato electrónico.

Juan Martínez-Tébar Giménez
IES Alto de los Molinos, Albacete
<juanmtg1@gmail.com>

# SUMA

Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje
de las matemáticas · **diciembre 2021**

– núm. 98 –

**Consejo de Dirección**
<direccion@revistasuma.es>

Iolanda Guevara Casanova
Departament d'Ensenyament
de la Generalitat de Catalunya
Universitat Autònoma de Barcelona

Daniel Sierra Ruiz
CPI El Espartidero, Zaragoza

**Administración**
<administracion@revistasuma.es>

Miguel Latorre García

**Edita**
*Federación Española de Sociedades*
*de Profesores de Matemáticas*
*(FESPM)*

**Web**
<www.revistasuma.es>

Gloria Colás Bueno

**Cubierta**

Mercè Cassanyes i Caballeria
<mercecassanyes@gmail.com >

**Diseño**

Mercè Cassanyes i Caballeria

**Maquetación y corrección**

Ricardo Alonso Liarte
IES Salvador Victoria, Monreal del Campo (Teruel)

Iolanda Guevara Casanova

Julio Sancho Rocher
IES Avempace, Zaragoza
Universidad de Zaragoza

Daniel Sierra Ruiz

**Consejo de Redacción**

Maite Navarro Moncho
Centre Especific d'Eduació a Distància de la Comunitat
Valencian (València)
Universitat de València
<teresa.navarro-moncho@uv.es>

Maria Àngels Portilla Rueda
CEIP Son Anglada, Palma
<manangels@gmail.com>

Julio Rodríguez Taboada
CPI Dos Dices, Rois (A Coruña)
<juliortab@gmail.com>

Juan Antonio Trevejo Alonso
IES Universidad Laboral, Gijón
<juanantral@gmail.com>

M.ª Teresa Valdecantos Dema
SIPEP Entre dos aguas, Algeciras, Cádiz
<matevalde@hotmail.com>

Santi Vilches Latorre
INS Vilamajor, Sant Pere de Vilamajor (Barcelona)
<svilches@xtec.cat>

**Consejo Editorial**

Miquel Albertí Palmer
<alberti.miquel@gmail.com >

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
<agustincarrillo@fespm.es>

Juan Martínez-Tébar Giménez
IES Alto de los Molinos, Albacete
<juanmtg1@gmail.com>

Onofre Monzó del Olmo
IES Veles e Vents, Torrent (Valencia)
Universitat de València
<onofre.monzo@uv.es>

**Revista Suma**
Tirada: 5 500 ejemplares
Depósito legal: Gr 752-1988
ISSN: 1130-488X
Twitter: @suma_fespm

**Consejo Asesor**

David Arnau Vera
Universitat de València
<david.arnau@uv.es>

Carmen Azcárate Giménez
Universitat Autònoma de Barcelona
<carmen.azcarate@uab.es>

Javier Bergasa Liberal
IES Navarro Villoslada, Pamplona
<jbergasl@educacion.navarra.es>

Salvador Caballero Rubio
IES Gaia, Sant Vicent del Raspeig (Alicante)
<salvador.caballero@gmail.com

Neila Campos González
Universidad de Cantabria
<camposn@unican.es>

Encarnación Castro Martínez
Universidad de Granada
<encastro@ugr.es>

Abilio Corchete González
IES Suárez de Figueroa, Zafra (Badajoz)
<acorchete@gmail.com>

Olimpia Figueras Mourut de Montppellier
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN
México, México D.F. (México)
<figuerao@cinvestav.mx>

M.ª José Fuente Somavilla
IES Augusto González de Linares, Santander
<mj.fuente@yahoo.es>

Maria Luisa Girondo
Universitat Rovira i Virgili (Tarragona)
<marialuisa.girondo@urv.net>

Arturo Mandly Manso
IES José Manzano, Don Benito (Badajoz)
<armandly@gmail.com>

Rafael Martínez Calafat
IES La Plana, Castelló de la Plana
<rmartinez@vila-real.uned.es>

Ricardo Moreno Castillo
Profesor de matemáticas, Santiago de Compostela
<moreno_castillo@hotmail.es>

Pascual Pérez Cuenca
IES Figueras Pacheco, Alacant
<pascual.prz@gmail.com>

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí, Madrid
<aperez.sanz@gmail.com>

Ana Belén Petro Balaguer
Universitat de les Illes Balears, Palma
<anabelen.petro@uib.es>

Luis Puig Mosquera
IES Sofía Casanova, Ferrol (A Coruña)
<luispuig@edu.xunta.es>

Mariano Real Pérez
Centro de Profesorado, Sevilla
<mariano31415@gmail.com>

Francesc Andreu Rosselló Llompart
Universitat de les Illes Balears, Palma
<cesc.rossello@uib.es>

Manuel José Sastre Álvarez
IES La Corredoria, Oviedo
<mjsastre@telecable.es>

Manuel Sol Puig
Profesor de Matemáticas, Vilassar de Mar
(Barcelona)
<msol@xtec.cat>

Carlos Oswaldo Suarez Alemán
Universidad de Cádiz
<carlososwaldo.suarez@uca.es>

Francisco Villegas Martín
IES Fuente Nueva, El Ejido (Almería)
<pvillegas@thales.cica.es>

98 Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

*Suma* es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral cuyo objetivo es tratar sobre los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje y destinada, sobre todo, al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista *Suma* se edita en
Badalona (Barcelona) — España

SUMA+

*no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas*

# Normas de publicación

1. Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de *Suma* <articulos@revistasuma.es> o la dirección postal de la co-directora:

   Iolanda Guevara Casanova
   c/ Temple n.º 26, 2º, 2ª
   08911 Badalona

2. Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5 Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CD-ROM, DVD-ROM o *pen drive*).
3. Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato .TXT, .ODT, .RTF, .DOC, .DOCX, adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:
   a) El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

   Y a efectos de comunicación:
   b) El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.
4. Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (por ejemplo, institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión se reemplazarán las citas y referencias bibliográficas por «Autor, 2012» o «Autor y otros, 2012». En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
5. Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…
6. Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, y cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

   *Ejemplo:* Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.
7. El texto irá una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25 000 caracteres sin contar espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.
8. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes serán enviados preferentemente en formato TIF o EPS, aunque será admisible el formato JPEG, de modo que, a una resolución mínima de 300 ppp, la imagen tenga un tamaño mínimo de 8 × 8 cm, y en color original. Se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo estará claramente identificado y se indicará en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
9. Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto. Si esto no fuera posible, se incorporará como imagen. En tales casos se indicará el lugar que ocupan las fórmulas en el texto, haciendo referencia al nombre del archivo que las contiene.
10. Las referencias bibliográficas se dispondrán al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición.

    Ejemplos:

    Gómez, E. (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E. (1990*a*), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., y J. Pérez (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., J. Pérez y D. Hernández (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.

    En los artículos de revistas y capítulos de libro se seguirá la pauta que se muestra a continuación:

    Gómez, E. (1990), «Título», *Revista,* n.º 31, 35-56.
    Gómez, E. (1990), «Título», en J. Pérez (ed.), *Título,* Editorial, Lugar de edición, 13-23.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: «[…] supone un gran avance (Hernández, 1992)». Si el autor aparece explícitamente en el texto, tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: «[…] según Rico (1993)».
12. Si se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión *y otros.* Por ejemplo: «Bartolomé y otros (1982)», «Gelpi y otros (1987)». Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.
13. Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.
14. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
15. A la recepción del trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.
16. Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser evaluado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo, aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo o recomendarán posibles modificaciones acordes con las normas y criterios de *Suma*.
17. Si los dos informes son positivos, el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos, se desestimará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o no.
18. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
19. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

# Boletín de suscripción

| Tarifas | Suscripción anual | Número suelto | Monografía |
|---|---|---|---|
| Particulares | 25 € | 10 € | 15 € |
| Centros | 40 € | 15 € | 15 € |
| Europa | 50 € | 20 € | 15 € |
| Resto del mundo | 60 € | 22 € | 15 € |

Fotocopiar esta hoja y enviar:
por correo a: Encarni Amaro Parrado (Tesorería de la FESPM)
C/ La Palma nº1, 1ºB,
23740, Andújar-Jaén.
por correo-e a: admin@fespm.es

Deseo suscribirme a la revista *Suma*:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) _____

☐ N.os sueltos _____

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (IBAN ES79 2100 2153 3802 0010 9089)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM

Fecha y firma:

---

Nombre y apellidos:

IBAN: ⌊⌊⌊⌊ Entidad:⌊⌊⌊⌊ Oficina:⌊⌊⌊⌊ DC⌊⌊ Cuenta⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista *Suma*.

Atentamente (fecha y firma):

Conforme a lo establecido en el art. 5 de la Ley Orgánica 15/1999 de Protección de Datos de Carácter personal, le informamos que los datos de carácter personal que Usted ha facilitado de forma voluntaria se incorporarán a un fichero automatizado cuyo responsable es la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), con el fin de llevar a cabo la gestión integral de nuestra relación comercial, cobrar tarifas, contactarle y enviarle información que pueda ser de su interés, estando prevista la comunicación de los mismos a aquellos profesionales y/o empresas que intervienen en la gestión del servicio solicitado, descritos en el Documento de Seguridad. Si no nos manifiesta lo contario entenderemos que Usted consiente el tratamiento indicado. Puede ejercitar sus derechos de acceso, cancelación, rectificación y oposición, mediante escrito dirigido a la dirección postal de SUMA junto con una fotocopia del DNI.