Algunas propuestas para el aula en torno a la divisibilidad por 8

Rafael Aragón Cueto
Juan Manuel Delgado Sánchez

SUMA+ núm. 99
pp. 27-35
Artículo recibido en *Suma* en agosto de 2020 y aceptado en marzo de 2021

El objetivo principal de este trabajo es el de presentar algunos aspectos sobre algunos criterios de divisibilidad (en especial, del criterio de divisibilidad del 8), a partir de los cuales puedan proponerse actividades en el aula ya sean de tipo lúdico, de profundización en las propiedades de divisibilidad de los números o, incluso, que incentiven la reflexión sobre las estrategias utilizadas al resolver problemas.

Palabras clave: Criterios de divisibilidad, Descomposición factorial en primos, Resolución eficiente de problemas, Propuestas para el aula, Actividades lúdicas.

Some didactic proposals concerning divisibility by 8 // The main purpose of this article is to show some topics related to several divisibility rules (specially, the divisibility rule of 8) from which some activities could be proposed in the class, whether ludic type, or to deepen properties of divisibility of numbers, or even, to encourage the discussion of the strategies in problem solving.

Keywords: Divisibility rules, Factorial decomposition into prime numbers, Efficient problem solving, Strategies in the classroom, Ludic activities.

Los criterios de divisibilidad aparecen en los contenidos tanto del bloque de «Números» del currículo de tercer ciclo de Educación Primaria como en el de «Números y álgebra» de los primeros cursos de la ESO. Por ese motivo es habitual trabajar en el aula de los primeros cursos de la educación secundaria el uso de criterios de divisibilidad sencillos, fundamentalmente como herramienta para conseguir la descomposición en factores primos de números naturales.

Un criterio de divisibilidad será tanto más popular cuanto más fácil sea de recordar y cuanto menor sea la cantidad de cálculos necesarios para emitir una respuesta sobre el número de partida. La dificultad para recordar alguna de las reglas hace que muchos de estos criterios estén en desuso. Si, además de la dificultad de recordar algunos de los criterios, añadimos la rapidez de cálculo que permite el uso de la tecnología en el aula desde tempranas edades, es muy posible que nos cuestionemos la utilidad práctica de los criterios de divisibilidad, exceptuando quizá los más conocidos (2, 3, 5, 10). Sin embargo, es necesario romper una lanza a favor de los mismos y, tal y como se afirma en Jordan (1965:709):

> [los tests de divisibilidad] se pueden presentar como información aritmética intrigante con la certeza de que muchos docentes pueden encontrar en los mismos una fuente de recursos para la discusión en el aula y de ejercicios valiosos para familiarizar a los estudiantes con la manipulación y propiedades de los números enteros [1].

En este sentido, este trabajo pretende mostrar algunos aspectos de los criterios de divisibilidad que pueden ayudar a los docentes a incentivar y desarrollar en el alumnado actitudes inherentes en el quehacer matemático, como son la toma de decisiones en la resolución de problemas, la reflexión sobre la conveniencia de los procesos utilizados y la perseverancia en la búsqueda de estrategias más eficientes. En particular, en el currículo de Educación Primaria, el tercer objetivo del área de Matemáticas hace referencia a

> […] la necesidad de usar los números en distintos contextos, identificar las relaciones básicas entre ellos, las diferentes formas de representarlas, desarrollando estrategias de cálculo mental y aproximativo, que lleven a realizar estimaciones razonables, alcanzando así la capacidad de enfrentarse con éxito a situaciones reales que requieren operaciones elementales.

Dicho objetivo se cumple de manera efectiva al desarrollar esta propuesta.

Este artículo consta de varios apartados bien diferenciados. Tras esta introducción, realizamos un breve repaso de algunos criterios de divisibilidad, prestando especial atención a la técnica que permite deducirlos. A continuación, nos centramos en el criterio de divisibilidad del 8 y mostramos algunas propiedades que pueden complementar dicho criterio. Finalmente, se reflexiona sobre las posibilidades de experimentar en el aula con algunas de las reglas de divisibilidad mencionadas.

Aunque es ampliamente utilizada, comentamos la notación del artículo. Dados dos números enteros $a \neq 0$ y b, si la división euclídea (con resto) de b entre a es exacta, se dice que b es *divisible* por a (o que b es *múltiplo* de a; o también que a es *divisor* de b); esto será denotado por $a \mid b$ o bien $b = \dot{a}$. Si a no es divisor de b se denotará $a \nmid b$. Consideramos que el número 0 es múltiplo de cualquier número entero [2].

Utilizaremos las letras U, D y C para designar la cifra de las unidades, las decenas y las centenas, respectivamente, del número al que nos estemos refiriendo. Otra de las descomposiciones que consideramos reiteradamente para un número natural n es de la forma $10\,t + U$ en la que, obviamente, t designa al número que resulta de considerar al número n sin la cifra de las unidades.

Las siguientes propiedades básicas son de uso recursivo a lo largo de todo el artículo pues en ellas se fundamentan muchos de los criterios de divisibilidad que se muestran:

Propiedad 1
Si $a \mid b$, entonces $a \mid b \cdot t$, cualquiera que sea el número entero t.

Propiedad 2
Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b \pm c)$.

Repasando algunas técnicas para obtener criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad por 2, 5 y 10 se basan en que dichos números son divisores de 10. Así, si escribimos un número natural cualquiera n de la forma $10\,t + U$ las propiedades 1 y 2 permiten afirmar que la divisibilidad de n por 2, 5 o 10 solo depende de la divisibilidad de su cifra de las unidades U.

Puesto que $4 \nmid 10$, no puede obtenerse un criterio de divisibilidad por 4 que dependa exclusivamente de la cifra de las unidades del número. Sin embargo, 4 sí es divisor de 100; por lo tanto, si escribimos el número n como $100\,t + 10\,D + U$, las propiedades 1 y 2 garantizan que $4 \mid n$ cuando $4 \mid (10\,D + U)$ lo es, esto es, cuando el número constituido por las dos últimas cifras es divisible por 4. En consecuencia, la divisibilidad de un número cualquiera por 4 se reduce a conocer los múltiplos de 4 entre 0 y 100, algo bastante asequible.

En el criterio de divisibilidad por 3 es clave tener en cuenta que la división de cualquier potencia de 10 entre 3 da como resto 1. Esta regularidad permite escribir cada potencia de 10 como un múltiplo de 3 más una unidad. En efecto, pongamos que

$$n = a_r 10^r + a_{r-1} 10^{r-1} + \cdots + a_1 10 + a_0.$$

Teniendo en cuenta las propiedades 1 y 2,

$$\begin{gathered} n = a_r(\dot{3}+1) + a_{r-1}(\dot{3}+1) + \cdots + a_1(\dot{3}+1) + a_0 = \\ = a_r\dot{3} + a_{r-1}\dot{3} + \cdots + a_1\dot{3} + a_r + a_{r-1} + \cdots + a_1 + a_0 = \\ = \dot{3} + a_r + a_{r-1} + \cdots + a_1 + a_0 . \end{gathered}$$

De donde se deduce que se puede expresar n como un múltiplo de 3 más la suma de sus cifras. Nuevamente, la propiedad 2 permite afirmar que n es divisible por 3 precisamente cuando lo es la cantidad resultante de sumar todas sus cifras. La justificación del criterio de divisibilidad por 9 es completamente análoga. En el criterio para el 11, la única variante es que, al dividir las potencias de 10 entre 11, la sucesión de restos es –1, 1, –1, 1, ...; a partir de aquí, se deduce el conocido criterio: un número es divisible por 11 si lo es el número resultante de sumar sus cifras con signos alternados.

Cuando se intenta emular la técnica anterior para la obtención de un criterio de divisibilidad por 7, nos encontramos con el hecho de que los restos de dividir las potencias de 10 entre 7 no muestran la misma regularidad[3], por lo que el criterio resultante es difícil de memorizar e incluso de aplicar para números de cierta entidad. Una técnica alternativa consiste en encontrar alguna propiedad de divisibilidad por 7 operando con un múltiplo concreto suyo y aplicar luego propiedades de divisibilidad que reduzcan la magnitud del número. Por ejemplo, el criterio de divisibilidad por 7 más conocido[4] se basa en la propiedad que afirma que un número natural $n = 10t + U$ es divisible por 7 precisamente si lo es la cantidad $t - 2U$ (por ejemplo, 658 es divisible por 7 porque lo es $65 - 2 \cdot 8 = 49$). La clave de la propiedad anterior reside en que 21 es múltiplo de 7. En efecto, en virtud de las propiedades 1 y 2, tenemos que:

$$7 \mid (10t + U) \Leftrightarrow 7 \mid (10t + U - 21U) \Leftrightarrow 7 \mid [10(t - 2U)].$$

Y, puesto que 7 es primo con 10, la última condición en la cadena anterior es equivalente a que $7 \mid (t - 2U)$.

El criterio de divisibilidad por 7 no es más que una aplicación recursiva de la propiedad anterior, que permite ir trasladando el carácter de «ser divisible por 7» del número inicial a números cada vez menores. Si en el procedimiento anterior cambiamos la resta de $21U$ por la adición de $49U$ se obtiene una propiedad de la misma naturaleza que afirma que $n = 10t + U$ es divisible por 7 precisamente si lo es la cantidad $t + 5U$.

El criterio de divisibilidad por 8

Como potencia que es de 2, la técnica para obtener el conocido criterio de divisibilidad por 8 es análoga a la del 4. Puesto que 8 es divisor de 1000 pero $8 \nmid 10$ y $8 \nmid 100$, se deduce que un número natural n es divisible por 8 precisamente cuando el número constituido por las tres últimas cifras es divisible por 8. Aunque el criterio supone un ahorro más que notable, sobre todo para números con muchas cifras, no termina de ser tan satisfactorio como el del 4, pues el conocimiento de los múltiplos de 8 de tres cifras no es inmediato. Como alternativa a la división de tal número de tres cifras entre 8, podemos utilizar alguna de las siguientes propiedades:

> **Propiedad 3**
> Un número $n = 100C + 10D + U$ es divisible por 8 precisamente cuando lo es $4C + 2D + U$.

Por ejemplo, el número 336 es divisible por 8 porque $4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 6 = 24$ es divisible por 8. La justificación de esta propiedad es inmediata teniendo en cuenta que los restos de dividir 100, 101 y 102 entre 8 son 1, 2 y 4.

Propiedad 4
Un número $n = 10t + U$ es divisible por 8 precisamente cuando lo es $2t + U$.

Por ejemplo, el número 336 es divisible por 8 porque $2 \cdot 33 + 6 = 72$ es divisible por 8. Para deducir esta propiedad, basta escribir $10t = 8t + 2t$ y aplicar propiedades de divisibilidad. En efecto,

$$8 \mid (10t + U) \Leftrightarrow 8 \mid (8t + 2t + U) \Leftrightarrow 8 \mid (2t + U).$$

Para números de tres cifras altos, es posible que necesitemos aplicar esta propiedad un par de veces. Así, para averiguar si el número 914 es divisible por 8, utilizamos la propiedad y nos preguntamos si $2 \cdot 91 + 4 = 186$ es divisible por 8; aplicamos la propiedad por segunda vez a 186 y nos preguntamos si $2 \cdot 18 + 6 = 42$ es divisible por 8, a lo que respondemos negativamente.

El criterio expuesto en la propiedad 4 puede presentarse de forma alternativa si tenemos en cuenta que, para que un número sea divisible por 8, ha de ser necesariamente par.

Propiedad 4.bis
Un número par $n = 10t + 2s$ (siendo $U = 2s$) es divisible por 8 precisamente cuando $t + s$ es divisible por 4.

Como aplicación, el número 914 no es divisible por 8 porque $91 + 2 = 93$ no lo es por 4. Ahora, se puede obtener una respuesta con una única aplicación de la propiedad, pues basta conocer los múltiplos de 4 hasta 103 (máximo valor posible de $t + s$). Aunque este criterio puede demostrarse de forma inmediata utilizando la regla dada en la propiedad 4, puede obtenerse una justificación directa emulando la de la prueba del criterio del 7. En efecto, si escribimos $2s = 10s - 8s$ y observamos que:

$$8 \mid (10t + 2s) \Leftrightarrow 8 \mid [10(t + s) - 8s] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8 \mid 10(t + s) \Leftrightarrow 4 \mid 5(t + s).$$

Puesto que 4 es primo con 5, la última condición que aparece en la cadena anterior es equivalente a afirmar que $4 \mid (t + s)$.

Conocer cómo se generan los criterios de divisibilidad habilita para formular nuevas propuestas. Así, por ejemplo, tenemos:

Propiedad 5
Un número $n = 100C + 10D + U$ es divisible por 8 si y solo si lo es $4C + 10D + U$, es decir, si lo es el resultado de sumar el cuádruple de las cifras de las centenas con el número formado por las dos últimas cifras de n (Epebinu, 2017).

La justificación es análoga a la de la propiedad anterior sin más que descomponer $100C = 96C + 4C$ y teniendo en cuenta que 96 es múltiplo de 8.

En este caso, una única aplicación de la propiedad garantiza en la mayoría de los casos que podremos decidir sobre la divisibilidad por 8: el número 914 no es divisible por 8 porque no lo es $4 \cdot 9 + 14 = 50$.

Las propiedades expuestas en todas las opciones anteriores pueden extenderse a los restos distintos de cero. Así, por ejemplo, para la propiedad 4, el resto de dividir el número $n = 10t + U$ entre 8 coincide con el resto de dividir $2t + U$ entre 8.

Análogamente, para la propiedad 4.bis, el resto de dividir el número $n = 10t + 2s$ entre 8 coincide con el doble del resto de dividir $t + s$ entre 4

¿Es aconsejable tratar en el aula tantos criterios de divisibilidad?

Tal y como hemos comentado en la introducción, la dificultad para recordar algunos de los criterios expuestos anteriormente (sobre todo si se proporcionan sin justificar) puede hacer que nos cuestionemos su planteamiento en el aula.

En este apartado, se exponen un cuantas ideas para generar actividades que pueden realizarse en el aula en las que la enseñanza de tales criterios, más que un fin en sí mismo, sirve como vehículo para inculcar ciertos aspectos formativos de las matemáticas o, simplemente, para captar la atención del alumnado de forma lúdica.

ESTRATEGIAS EFICIENTES EN LA DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Entre los contenidos de «Divisibilidad», la descomposición en factores primos se trata en el aula en los últimos cursos de primaria o en los primeros de secundaria obligatoria. En una aproximación inicial, la estrategia exclusiva para la descomposición en factores primos de un número natural suele ser la de ir comprobando en orden creciente cuáles son los divisores primos del número. Es en dicha comprobación en la que entran en liza los criterios de divisibilidad y, dado que en este primer estadio la magnitud de los números a descomponer es pequeña (tres o cuatro cifras a lo sumo), los más utilizados por su sencillez son los del 2, 3 y 5.

En la Educación Secundaria Obligatoria y una vez que el alumnado adquiere suficiente destreza en el uso del algoritmo mencionado en el párrafo anterior, parece natural propiciar el análisis crítico de estrategias complementarias que busquen mayor eficiencia en la descomposición en factores primos de un número. Por ejemplo, al descomponer el número 2200, puede ser interesante comparar el esfuerzo invertido al aplicar directamente dicho algoritmo con el que se realiza si, previamente a la aplicación del mismo, se escribe 2200 como producto de 22 y de 100. Es en esta segunda etapa de búsqueda de estrategias más adecuadas y alternativas al algoritmo en la que pueden ser útiles los criterios de divisibilidad de números no necesariamente primos, como son los del 4, 8, 9, 10.

El hecho de que el alumnado utilice inicialmente apenas cuatro o cinco criterios no debería ser óbice para informar del resto de criterios. La aplicación de criterios de divisibilidad cada vez más complejos puede plantearse como un proceso gradual en el que, a partir de unos mínimos, cada estudiante marque su ritmo de avance a medida que se familiariza con ellos y descubre sus ventajas. Por ejemplo, al sumar las cifras del número 567 para averiguar si es divisible por 3, tan solo parte del alumnado se percatará de que la suma de sus cifras, 18, es divisible no solo por 3 sino también por 9, por lo que establecerán que 3^2 es uno de los factores que aparecen en la descomposición de 567 y se ahorrarán una división. Algo similar puede plantearse con los criterios relativos a las potencias de 2. En definitiva, una vez que el alumnado ha asimilado los comúnmente considerados «criterios básicos», podemos plantearnos la posibilidad de proponer actividades de profundización que permitan introducir los criterios por «familias» (por ejemplo, la familia de los criterios del 2, 4 y 8; la de los criterios del 3 y 9) en vez de enunciar los criterios como simples listados. En la figura 1 se presenta un diagrama que concreta esta idea para la comprobación (progresiva) de la divisibilidad de un número *n* por 8 (el último paso utiliza la propiedad 4.bis del apartado anterior). En el mismo, se utiliza la siguiente notación: $n = \overline{\ldots a_3 a_2 a_1 a_0}$ significa que a_0 es la cifra de las unidades de n, a_1 la de las decenas, a_2 la de las centenas, etc. Las líneas de flujo discontinuas indican que el alumno opta por no utilizar todos los criterios de la familia o, dicho de otro modo, ha obtenido una respuesta afirmativa y prefiere realizar la división correspondiente para continuar el procedimiento de descomposición en la parte superior del diagrama, aunque esto suponga realizar más divisiones.

Así, al descomponer el número 3696, en cuya descomposición aparece 2^4, además de disponer del procedimiento habitual de realizar cuatro divisiones por 2, lo que equivale a quedarse en el primer nivel del

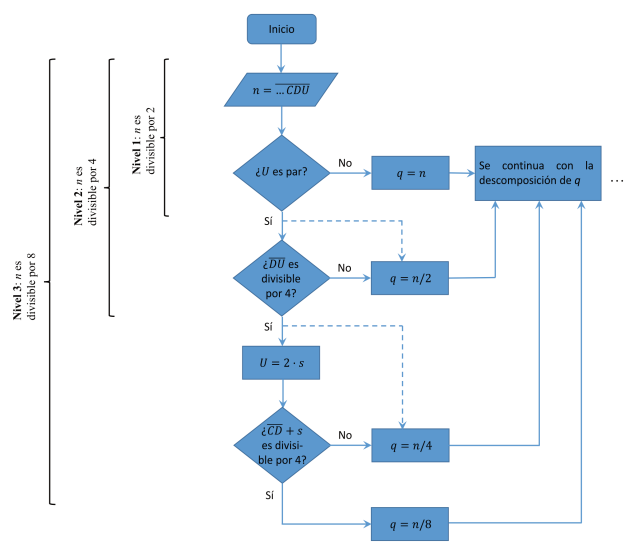

Figura 1. Procedimiento para averiguar si un número *n* es divisible por 2, 4 u 8.

procedimiento anterior y repetirlo cuatro veces, los criterios expuestos posibilitan que se profundice hasta el tercer nivel del mismo y se efectúe tan solo una división por 8 y otra por 2.

La idea esquematizada en el diagrama de la figura 1 puede presentarse al alumnado en forma de actividad dirigida. La siguiente secuencia muestra un posible esquema de dicha actividad para los cursos iniciales de la ESO. Partimos de la premisa de que los alumnos manejan con soltura los criterios de divisibilidad más conocidos (2, 3, 5 y 10):

- Se pide como ejercicio que descompongan en factores primos el número $1\,232=2^4\cdot 7\cdot 11$. Para ello, necesitarán hacer un total de seis divisiones.
- A continuación, se muestra el criterio de divisibilidad por 4. Tras realizar varios ejemplos, podemos volver a pedir que descompongan 1 232 pero teniendo en cuenta el criterio que acaba de introducirse.
- Seguidamente, se expone [5] el criterio clásico de divisibilidad por 8. Tras mencionar las dificultades para detectar los múltiplos de 8 de tres cifras, enunciamos y verificamos mediante ejemplos la regla que aparece como propiedad 4.bis en el apartado anterior.
- Explicamos un par de ejemplos para mostrar el procedimiento descrito a través del algoritmo de la figura 1. Por ejemplo, el número $504=2^3\cdot 3^2\cdot 7$, que permite llegar hasta el tercer nivel del diagrama; y $396=2^2\cdot 3^2\cdot 11$, que permite llegar tan solo al segundo nivel.
- Proponemos, a continuación, algunos ejercicios para que los alumnos entrenen el procedimiento al nivel que deseen. Por ejemplo, el número $936=2^3\cdot 3^2\cdot 13$, que permite llegar al tercer nivel; $1\,404=2^2\cdot 3^3\cdot 13$, que permite llegar al segundo nivel pero no al tercero; un posible último ejemplo, $5\,280=2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$.

Tal y como hemos mencionado en un ejemplo al principio del apartado, puede elaborarse un procedimiento análogo que aglutine los criterios del 3 y del 9.

UNA PROPUESTA MÁS AMENA

Existe una gran diversidad de actividades lúdicas relacionadas con los contenidos de la divisibilidad entre números naturales. Entre ellas, son especialmente populares los «trucos de adivinación». Basada en otras del mismo estilo, la siguiente pretende ser una actividad de este tipo destinada a atraer la atención del alumnado. En nuestro caso, la clave reside en una de las propiedades observadas al final del apartado anterior sobre el criterio de divisibilidad por 8: el resto de dividir el número $n=10t+U$ entre 8 coincide con el resto de dividir $2t+U$ entre 8.

El material de la actividad es simple: papel, lápiz y una tabla similar a la que se muestra en la figura 2.

- Se pide a un alumno que escriba en un papel, sin enseñarlo, un número, M, de dos cifras.
- A continuación, le indicamos que sume la cifra de las unidades con el doble de la cifra de las decenas de M.
- El alumno debe repetir el paso anterior con el número obtenido hasta que obtenga un número de una única cifra, S.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
★	◆	⦸	□	★	✔	∧	∨	★	□
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
⦸	★	✔	∧	◆	∨	★	◆	⦸	◆
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
∧	□	⦸	□	★	∞	⦸	★	∧	◆
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
□	◆	★	⦸	∧	∨	◆	□	✔	⦸
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
★	□	∧	★	◆	∧	⦸	∨	★	□
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
★	◆	∞	□	⦸	□	★	✔	∧	∨
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
□	★	✔	◆	★	∨	⦸	◆	∨	★
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
◆	⦸	★	□	✔	◆	∧	∞	⦸	∨
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
★	✔	◆	∨	∞	□	∞	◆	★	∧
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
□	⦸	★	✔	◆	∨	★	∧	□	⦸

Figura 2

— Seguidamente, le decimos que calcule la resta $M-S$ (puesto que el resto de dividir tanto M como S entre 8 es el mismo, al restar ambos números obtenemos como resultado un múltiplo de 8) y le pedimos que identifique el símbolo correspondiente al resultado de dicha resta en la figura 2.

— La última fase corre de nuestra cuenta: mientras le exigimos que se concentre en la imagen que ha identificado en el paso anterior y, tras cierta dosis de interpretación, hacemos un esbozo del símbolo que hayamos colocado en todas y cada una de las casillas correspondientes a los múltiplos de 8.

UNA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DIVISIBILIDAD POR 8

Terminamos con una propuesta que permite avanzar un poco más de lo expuesto hasta ahora en aspectos de divisibilidad.

Podemos encontrarnos problemas en los que no es suficiente saber si una división es o no exacta, sino que además es necesario averiguar el resto de dicha división. Dicho problema puede resolverse de forma «gráfica» utilizando lo que se conoce como grafo de divisibilidad. La idea de visualizar la divisibilidad de un número natural como «un paseo por un grafo» hay que atribuírsela a David Wilson, que utiliza dicho recurso para encontrar los restos de las divisiones entre 7 (Wilson, 2010; véase también Morales, 2021). Comentamos a continuación el fundamento de dicha idea para el caso de la divisibilidad por 8.

Al realizar una división euclídea entre dos números naturales para obtener el cociente y el resto, es fundamental conocer la tabla de multiplicar del divisor (o sea, tomamos como referencia los múltiplos de dicho divisor para ir aproximándonos al dividendo). Pero, si tan solo necesitamos conocer el resto de tal división, se puede razonar de otra forma. Así, si el dividendo es un número natural de dos cifras, es suficiente con fijarnos en el resto que resulta al dividir la decena entre el divisor y acumular este resto a la cifra de las unidades. Por ejemplo, para conocer el resto de 31 entre 8, podemos averiguar, en primer lugar, el resto de 30 entre 8 y luego sumar tal resto a la cifra de las unidades ($6+1=7$); es decir, tomamos como referencia la decena inmediatamente inferior (en vez del múltiplo inmediatamente inferior como se hace en la división euclídea). Para sistematizar el primero de los dos pasos anteriores, es útil confeccionar una tabla de restos de las primeras decenas entre el divisor. En el caso del 8:

10 entre 8 sobran 2
20 entre 8 sobran 4
30 entre 8 sobran 6
40 entre 8 sobran 0
50 entre 8 sobran 2
60 entre 8 sobran 4
70 entre 8 sobran 6
80 entre 8 sobran 0.

El procedimiento utilizado puede diseñarse de forma gráfica a través del esquema que comentamos a continuación. Se disponen los posibles restos entre 8 como vértices o nodos de un grafo y se une cada resto con el siguiente mediante una flecha (trazos continuos en la figura 3); puesto que la lista de restos es cíclica, se considera que el resto siguiente al 7 es el 0. Además de las anteriores, se utiliza la tabla de restos para unir mediante una flecha (trazos discontinuos en la figura 3) cada nodo *r* con el resto que resulta de dividir la decena correspondiente entre 8 (por ejemplo, se une el nodo 5 con el nodo 2 mediante una flecha discontinua pues el resto de 50

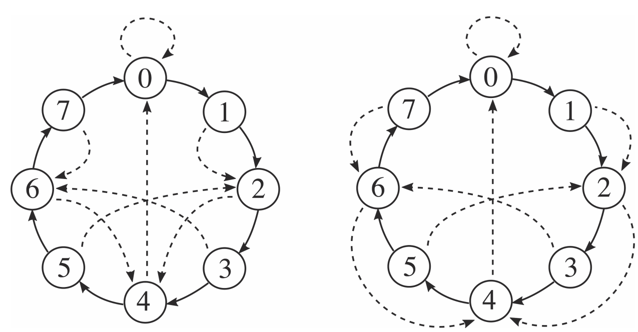

Figura 3. Dos formatos del grafo de divisibilidad del 8

entre 8 es 2). El resultado tiene el aspecto de cualquiera de los dos grafos que aparecen en la figura 3.

De esta forma, para averiguar el resto de un número de dos cifras entre 8 procedemos así:

— Nos fijamos en la cifra de las decenas y, empezando en el nodo 0, damos tantos saltos como nos indique esta cifra a través de las flechas continuas (en el ejemplo del 31, nos situamos en el nodo 3).
— A continuación, nos trasladamos desde este nodo a aquel al que nos lleve la flecha discontinua (al 6, en nuestro ejemplo), que nos indica cuántas unidades nos han sobrado al dividir la decena correspondiente entre 8.
— Nos fijamos ahora en la cifra de las unidades del número de partida y, desde donde terminamos antes, damos tantos saltos como nos indique la cifra de las unidades a través de las flechas continuas (en el ejemplo, desde el nodo 6 damos 1 salto que nos lleva al nodo 7, resto de la división). Este último paso es una traducción gráfica de acumular o sumar las unidades que han sobrado en el paso anterior con la cifra de las unidades del número.

El algoritmo anterior es extensible a números de tres (o más) cifras: tan solo requiere del movimiento adicional correspondiente a la cifra de las centenas por las flechas continuas y, acto seguido, el movimiento hacia el nodo al que nos lleve la flecha discontinua. La justificación es análoga a la expuesta anteriormente, cambiando «decenas» por «centenas» y «unidades» por «decenas». Por ejemplo, para averiguar el resto de 731 entre 8 procederíamos así:

— Movimiento para la centena (7): comenzamos en 0 y llegamos al nodo 7 a través de las flechas continuas y, desde aquí, al nodo 6 a través de la flecha discontinua.
— Movimiento para la decena (3): desde el nodo 6, damos 3 saltos y llegamos al nodo 1 a través de las flechas continuas y, desde aquí, al nodo 2 a través de la flecha discontinua.
— Movimiento para la unidad (1): desde el nodo 2, damos 1 salto y llegamos al nodo 3, que es el resto de la división.

Según se ha comentado al exponer los criterios de divisibilidad por 8, el resto de dividir el número $n = 10t + U$ entre 8 coincide con el resto de dividir $2t + U$ entre 8. Por tanto, el procedimiento en el último ejemplo podría optimizarse algo más aplicando el grafo de divisibilidad a $2 \cdot 73 + 1 = 147$ en vez de a 731.

Conclusiones

Hemos mostrado diversas reglas que permiten averiguar fácilmente cuándo un número de tres cifras es divisible por 8, lo que complementa el criterio ya existente para dicho número. Consideramos que las mismas pueden ser una fuente interesante de ejercicios y actividades para familiarizar a los alumnos con los conceptos de divisibilidad. Como ejemplo, hemos incorporado una de esas reglas a un procedimiento estructurado en tres niveles para averiguar si un número natural es divisible por 2, 4 u 8. Entendemos que la aplicación del procedimiento anterior, si se realiza en los cursos finales de Educación Primaria, debe estar orientada más al sentido lúdico y motivador a disposición del profesorado; si nos referimos a los primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria, el procedimiento expuesto debe ser considerado como una opción para ampliar los recursos matemáticos de nuestros alumnos, siempre atendiendo a la madurez intelectual del grupo de clase.

Desde el punto de vista de su aplicabilidad a largo plazo por parte de los alumnos, es muy posible que el procedimiento descrito en la figura 1 no perdure en su memoria. La experiencia dice que los criterios que sí recuerdan son el del 2, 3, 5 y 10. De lo que sí podemos convencer a algunos de ellos a través del procedimiento descrito es de algo fundamental que siempre se persigue en matemáticas: analizar con profundidad los procedimientos con el objetivo de hacerlos más eficientes[6].

CITA EN GÉNERO FEMENINO

Las referencias a personas o colectivos figuran en el presente texto en género masculino como género gramatical no marcado. Cuando proceda, será válida la cita en género femenino.

Referencias bibliográficas

DICKSON, L. E. (2005) [1919], *History of the theory of numbers*, Dover Publications, Nueva York.

EPEBINU, J. (2017), «New rule for divisibility of 8», *Janetbmath*, disponible en: <http://janetbmath.com/new-rule-for-divisibility-of-8/> (25 de octubre de 2021).

JORDAN, J. Q. (1965), «Divisibility tests of the non-congruence type», *The Mathematics Teacher*, n.º 58 (8), 709–712.

MORALES, G. (2021), *La estructura de los números*, Editorial SM, España.

WILSON, D. (2010), «Divisibility by 7 is a walk on a graph II», *Tanya Khovanova's Math Blog,* disponible en: <https://blog.tanyakhovanova.com/2010/08/divisibility-by-7-is-a-walk-on-a-graph-ii-2/> (25 de octubre de 2021).

Rafael Aragón Cueto
Colegio Balcón de Sevilla
<raarcue@gmail.com>

Juan Manuel Delgado Sánchez
Universidad de Sevilla
<jmdelga@us.es>

1 Traducción de los autores.

2 El caso particular de 0 no es necesario destacarlo si te toma como definición de *múltiplo* la siguiente: *b* es múltiplo de *a* si *b* se obtiene de multiplicar *a* por algún numero entero.

3 La sucesión de restos de dividir 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, … entre 7 son 1, 3, 2, –1, –3, –2, …

4 Según Dickson (2005: 339), la propiedad se atribuye al ruso A. Zbikovski en 1861.

5 Los alumnos pueden deducir de forma progresiva el criterio de divisibilidad del 4. Para ello, basta que comprueben mediante ejemplos que cualquier número acabado en doble cero es múltiplo de 4 y que deduzcan, a partir de esto, que la divisibilidad de un número por 4 únicamente depende del número constituido por sus dos últimas cifras. La misma idea es válida para el criterio del 8.

6 Es posible que hayan visto ya un ejemplo de esto en clase al estudiar el procedimiento para descubrir si un número es o no primo.