# Aprender a usar el álgebra en secundaria mediante la resolución de problemas

Abraham de la Fuente Pérez

SUMA+ núm. 99
pp. 49-60
Artículo recibido en *Suma* en abril de 2021 y aceptado en noviembre de 2021

Este artículo tiene como objetivo una propuesta de secuencia de problemas que puede servir para construir el lenguaje algebraico, poniendo el acento en las grandes ideas matemáticas que se trabajan en cada uno de ellos, de manera que si los problemas, la secuencia o el orden se varían, se puedan distinguir igualmente los puntos importantes a trabajar con los alumnos.

**Palabras clave:** Álgebra, Resolución de problemas, Secundaria, Aprendizaje significativo, Investigación didáctica.

**Learn to use algebra in high school through problem solving** // This article aims to propose a sequence of problems that can be used to build the algebraic language, emphasizing the great mathematical ideas that are worked on in each of them, so that if the problems, the sequence or the order are varied, the important points to work with the students can also be distinguished.

**Keywords:** Algebra, Problem solving, Secondary, Meaningful learning, Didactic research.

Podríamos intentar captar en una sola frase qué entendemos por álgebra escolar diciendo que el álgebra es aquella parte de las matemáticas que estudia las relaciones entre objetos matemáticos (números, funciones, figuras geométricas…) y las expresa usando simbolismos. Aunque esta sentencia no deja del todo clara la multidimensionalidad de este lenguaje, sí que pone de relieve la importancia que tiene el significado (versus la sintaxis) dentro de este lenguaje que queremos que nuestros alumnos aprendan a utilizar. También debemos tener en cuenta que el lenguaje algebraico deberá jugar un papel crucial como transmisor de las ideas entre profesor y alumno durante el proceso de resolución de problemas (Vila y Callejo, 2004).

Si conseguimos que nuestros alumnos no ignoren el significado de los símbolos que emplean, conseguiremos también que vean este lenguaje como una herramienta apta para comprender y expresar generalizaciones, captar conexiones estructurales y para argumentar en matemáticas. En este sentido, lo que queremos es conseguir un equilibrio entre las diferentes concepciones de los símbolos que vayan asumiendo a través de situaciones significativas variadas que ayuden a los alumnos a comprender la pertinencia del lenguaje algebraico, su estructura y el significado de los conceptos fundamentales con el objeto de que sean capaces de movilizar el razonamiento algebraico para resolver problemas.

De acuerdo con las ideas anteriores, en este artículo se propone una secuencia de problemas que podría servir para diseñar un itinerario para el aprendizaje del álgebra en secundaria. Esta secuencia es resultado de la tesis doctoral del autor de este artículo (de la Fuente, 2016), donde se hace un estudio de cuáles son los conocimientos que necesita un profesor o una profesora para ayudar a sus alumnos a aprender a utilizar el lenguaje algebraico en un ambiente de aula de resolución de problemas.

## Categorías del álgebra escolar

Una visión tradicional de la enseñanza del álgebra incluye simplificar y factorizar expresiones, resolver ecuaciones realizando la misma operación a ambos lados de la igualdad y manipular parámetros de ecuaciones funcionales como, por ejemplo, $y = mx + 2$ para estudiar familias de funciones (Kieran, 1992). Además, los capítulos introductorios al lenguaje algebraico de muchos libros de texto enfatizan las conexiones del álgebra con la aritmética. Aunque los currículums oficiales han cambiado en favor de una enseñanza enfocada a la adquisición de competencias y de una visión más rica de una herramienta matemática tan potente como es el lenguaje simbólico, hay que tener en cuenta que la educación de los profesores y profesoras que hoy en día enseñan a nuestros alumnos se ha basado en currículos anteriores y que muchos libros de texto siguen teniendo la misma estructura. Por lo tanto, esta visión tradicional continúa imperando.

Consideramos que esta visión del álgebra es demasiado simplista y que por lo tanto no genera un aprendizaje competencial. Debido a que nuestro enfoque de la enseñanza es la construcción del lenguaje algebraico en un ambiente de resolución de problemas, hemos caracterizado las categorías de este lenguaje en términos de capacidades, atendiendo así a un lenguaje que nos ayude también a mostrar el enfoque competencial del aprendizaje.

Así pues, y de acuerdo con Kaput (2000) y NCTM (2000), a partir de ahora nos referiremos a las categorías del álgebra escolar de la siguiente forma: el álgebra escolar será un lenguaje simbólico que tiene que servir para:

- Generalizar y formalizar.
- Representar estructuras abstractas y hacer cálculos con ellas.
- Estudiar relaciones y funciones.
- Modelizar.

Nuestra elección de estas categorías se basa en la idea de que para poder construir el conocimiento necesario para desarrollar las habilidades de la siguiente dimensión será necesaria una cierta habilidad en los procesos implicados en las anteriores categorías. Es decir, estas cuatro formas de razonamiento algebraico se relacionan y se superponen entre ellas, hasta el punto que en la resolución de algunos problemas es difícil su distinción (figura 1). Esto quedará claro y justificado con los problemas de ejemplo que iremos considerando en los siguientes apartados, donde veremos con más detalle a qué hace referencia cada una de las categorías del lenguaje algebraico.

### GENERALIZAR Y FORMALIZAR

Creemos que el lenguaje algebraico se debe comenzar a construir como un conjunto de tareas de generalización. El lenguaje algebraico necesario para generalizar surge en el momento en que se tiene la necesidad de comunicar patrones, ya sean numéricos o algebraicos, o cuando intentamos expresar las leyes que gobiernan las relaciones numéricas.

Es por esto que creemos que las tareas que el profesor propone en clase tienen que animar a los alumnos y alumnas a interaccionar entre ellos, a exponer los resultados en pequeños grupos y después con todo el grupo-clase. De esta manera podremos conseguir que para comunicarse tengan la necesidad de tener un lenguaje prealgebraico o algebraico común. Esta emergencia se dará las primeras veces en la fase sincopada de este lenguaje. Y por eso es muy importante que las alumnas y alumnos, además de comunicar los razonamientos oralmente, deban escribirlos, porque así será más fácil que tengan la necesidad de utilizar diferentes símbolos y representaciones para hacerse entender.

Por ejemplo, consideremos el siguiente problema (Mason, Burton y Stacey 1992):

| *Sumas consecutivas* |
| --- |
| Algunos números se pueden expresar como suma de una sucesión de números positivos consecutivos.<br>¿Exactamente qué números tienen esta propiedad? Por ejemplo, observa que:<br>$9=2+3+4$<br>$11=5+6$<br>$18=3+4+5+6$ |

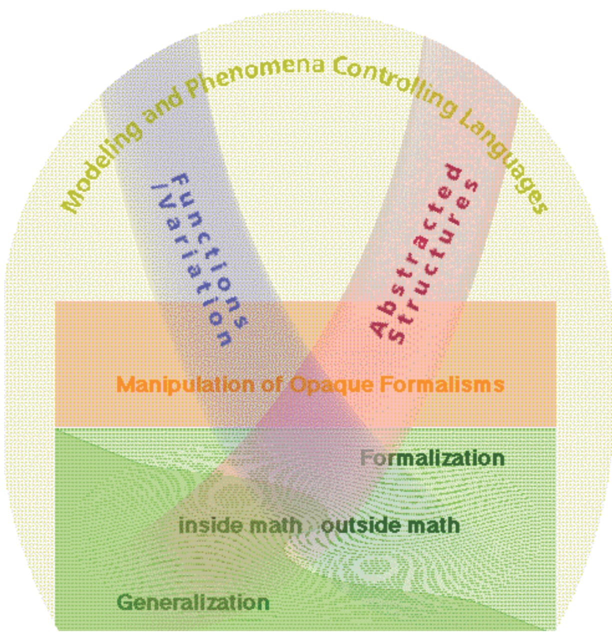



Figura 1. La superposición e interrelación de las cuatro formas de razonamiento algebraico según Kaput (2000: 5)

Este problema así propuesto ya es de por sí un problema muy rico que dará mucho juego y que se podría proponer a muchos niveles diferentes. A nosotros lo que nos interesa es cómo lo podemos utilizar para ayudar a nuestras alumnas y alumnos a construir el lenguaje algebraico necesario para generalizar. Si proponemos este problema en el aula, los alumnos convencionalmente querrán hacer unas cuantas pruebas que les servirán para entender el enunciado. Si la atención sobre el problema se mantiene el tiempo suficiente, es muy probable que algún alumno acabe haciendo la siguiente conjetura: «con los números impares siempre se puede». Este alumno está intentando generalizar, ya que está observando ciertos aspectos comunes a diferentes casos particulares y está ignorando, en cambio, otros aspectos. Ahora, una vez formulada, esta conjetura tiene que ser investigada para ver si la podemos confirmar o no (Mason, Burton y Stacey, 1992).

Para demostrar esta conjetura el alumno tendrá que referirse a todos los números impares a la vez de alguna manera. Y aquí será donde el profesor tendrá que jugar su papel e intentar que los alumnos lleguen a escribir la expresión $2n+1$ como generalización de los números impares. Incluso se puede aprovechar para ofrecer otra representación de los números pares e impares (figura 2), que a su vez podría combinar el trabajo con los alumnos de la segunda dimensión del álgebra escolar, la que trataremos en el siguiente apartado. Es fácil apreciar, por tanto, cómo el esquema de Kaput que ya hemos apuntado anteriormente (figura 1) sigue teniendo validez.

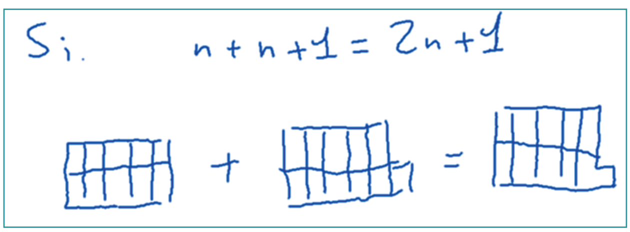
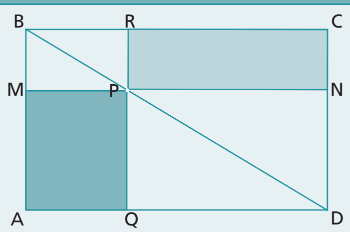



Figura 2. Representación geométrica de los números pares e impares

Por otro lado, si tenemos puesto el foco en las argumentaciones de los alumnos, será fácil convencerles de que el lenguaje algebraico también les tiene que servir para formalizar sus argumentaciones. Por ejemplo, cuando proponemos a nuestros alumnos que resuelvan el siguiente problema de demostración (Azcárate y Deulofeu, 1998):

*Rectángulos diferentes pero de áreas iguales*




Está claro que los rectángulos sombreados de la figura no son iguales pero, en cambio, tienen la misma área. Arguméntalo.

Después de trabajar un buen rato con la argumentación de forma oral, si queremos hacer la siguiente parte de la tarea y así aprovechar para ayudarles a construir el lenguaje necesario para formalizar, podríamos pedir a los alumnos que escriban sus argumentaciones con sus propias palabras. Una vez nos hemos asegurado de que un alumno tiene su argumentación bien escrita, la segunda parte de la tarea consiste en ordenar las frases de la figura 3 para volver a escribir una argumentación que sea correcta.

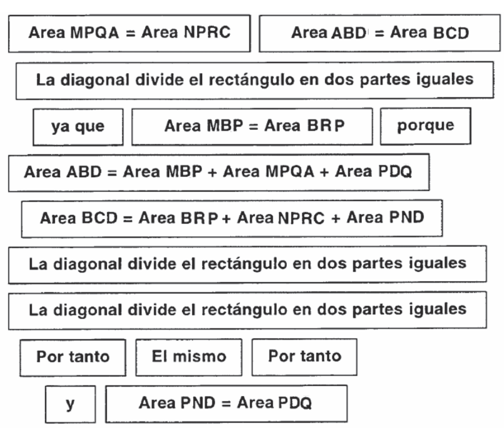



Figura 3. Frases para ordenar y construir con ellas una argumentación formal (Azcárate y Deulofeu, 1998)

## REPRESENTAR ESTRUCTURAS ABSTRACTAS Y HACER CÁLCULOS CON ELLAS

«El significado que tienen los objetos matemáticos se encuentra determinado más por los contextos en los que se usan que no por las reglas formales con los que se usan» (Schoenfeld y Arcavi, 1988). Si lo que queremos es conseguir que el álgebra tenga un significado subyacente para nuestros alumnos, tenemos que conseguir que tengan muchas experiencias usándola como un lenguaje que sirva para representar objetos matemáticos. Es difícil que los alumnos se apropien de estos objetos abstractos sin haber experimentado con una diversidad de representaciones de los mismos.

Nuestro primer ejemplo de cambio de representación ya lo hemos visto en la tarea sugerida por la figura 2, es decir, el álgebra constituye un lenguaje que, además de servir para formalizar generalizaciones, tiene que ayudar a nuestros alumnos a comprender cómo relacionar patrones geométricos con expresiones simbólicas. Otro ejemplo de tarea podría ser proponer a nuestros alumnos que utilicen la figura 4 para argumentar la siguiente igualdad algebraica:

$$1+3+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Por lo tanto necesitamos que nuestros alumnos aprendan a cambiar la representación de objetos matemáticos (en este caso una figura) y los símbolos con cierta fluidez.

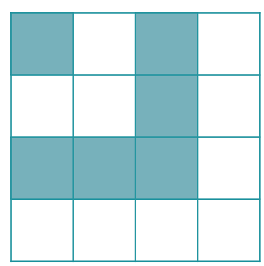
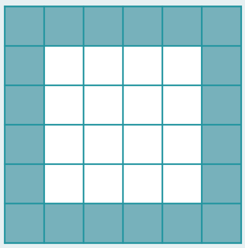


Figura 4. Demostración visual de que $1+3+5+7=4^2$

Pero está claro que necesitamos también que los alumnos aprendan a hacer cálculos con estos símbolos, por ejemplo, para comprobar la equivalencia entre diferentes expresiones. El siguiente problema (Sessa, 2005) es un buen ejemplo de cómo a través de la resolución de un problema se puede conseguir crear la necesidad de construir esta dimensión del lenguaje algebraico.

> *Contar cuadraditos*
>
> 
>
> ¿Cuántos cuadraditos tiene la figura en su zona perimetral?
>
> ¿Cuántos cuadraditos tendría en su zona perimetral la figura análoga que tiene 37 cuadraditos de lado? Escribe en forma de operación combinada los cálculos que has necesitado y argumenta la respuesta.
>
> ¿Podrías proponer una fórmula que sirva para calcular el número de cuadraditos de la zona perimetral de cualquier figura como esta?

Las primeras preguntas son dos casos particulares que sirven para asegurar que los alumnos entienden el problema y que son capaces de realizar un cálculo concreto y de particularizar el problema en un caso mayor. Es muy importante pedir la estrategia que han usado para hacer el cálculo. Así es como fácilmente podremos pedir que generalicen y que nos digan cómo harían el cálculo para un cuadrado de cualquier tamaño. Es muy probable que, al respecto del lenguaje algebraico, las argumentaciones las hagan usando el álgebra retórica como medio. Es en estos momentos cuando tenemos que compartir los diferentes métodos de cálculo y así podremos escribir las diferentes expresiones algebraicas que hemos ido obteniendo (figura 5).

Una vez hemos recogido todas las generalizaciones, será el momento en que saldremos de la categoría de generalización y podremos entrar en el cálculo usando estructuras abstractas. Podemos mantener vivo el significado de las letras durante mucho rato y además podremos ir introduciendo a los alumnos en la manipulación de las letras y las operaciones con ellas. Por ejemplo, este es un problema para empezar a poner en común diferentes formas de expresar un producto en álgebra: $2 \cdot n$, $2 \times n$ o $2n$.

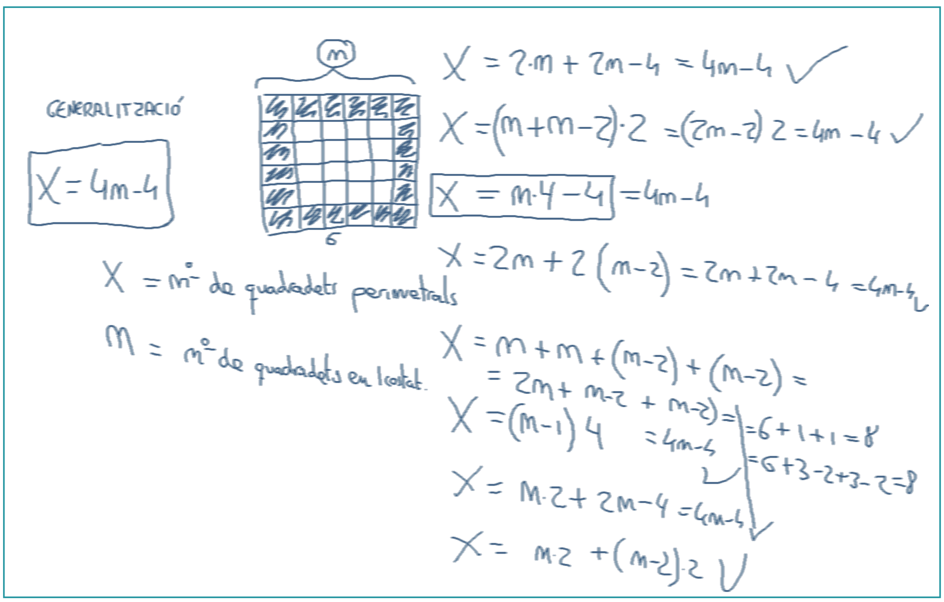
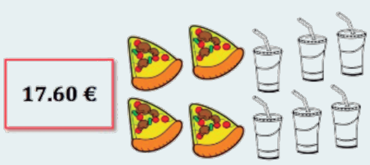



Figura 5. Diferentes generalizaciones y representaciones del problema

Este problema tiene todavía una contribución más al desarrollo del lenguaje algebraico: la respuesta al problema es una fórmula, una expresión algebraica no cerrada, y no una cantidad concreta. También podremos aprovechar este problema para trabajar el concepto de variable y evitar así acabar trabajando las letras sin tener en cuenta los múltiples significados que estas tienen (Schoenfeld y Arcavi, 1988). Esto nos permitirá conectar el problema fácilmente con la siguiente categoría del lenguaje algebraico: el estudio de relaciones y funciones.

Otro problema a caballo entre esta categoría y la siguiente es el que plantea el grupo Vilatzara (Cobo y otros, 2005) partiendo de una situación representada de manera icónica. En él se llega a plantear la resolución de sistemas de ecuaciones utilizando lenguaje algebraico. La primera tarea consiste en analizar la información dada en la figura y expresarla utilizando diversas representaciones. Para ello, se pueden plantear preguntas como las que aparecen en el recuadro y otras parecidas.

*El precio de la pizza*




1. Argumenta si con la información proporcionada en la figura podemos saber el precio de una porción de pizza y una bebida.
2. ¿Qué podemos saber del precio de 4 bebidas y 2 porciones de pizza?
3. Escribe cinco cosas diferentes que puedas garantizar con esta información.
4. ¿Puedes saber el precio de 8 porciones de pizza y 12 bebidas?
5. Di cinco posibles precios de bebidas y los precios de pizza correspondientes. ¿Podrías generalizar?

Las cuatro primeras preguntas pueden servir para que los alumnos se familiaricen con la representación icónica de la información y para darle sentido a los símbolos de esta. Es muy importante dejar claro que los dibujos no representan los objetos, sino una de sus características, su precio. La quinta pregunta nos puede conducir a representar la información en una tabla de valores y también a escribir una fórmula que nos relacione el precio de uno de los objetos con el precio del otro, por ejemplo:

$$P_{\text{pizza}} = \frac{17{,}6 - 6 \cdot P_{\text{bebida}}}{4}.$$

La manipulación de las diferentes representaciones de la información de parejas de datos como las que se muestran en la figura 6 es también uno de los procedimientos que se pueden trabajar con este conjunto de tareas. Se espera que las manipulaciones que hagan los alumnos de esta representación icónica de la información sea similar a la que harían si utilizasen letras para representar los precios de los productos y expresiones algebraicas para representar la información.

Es muy importante que los profesores insistamos en el abanico de posibilidades que existe a la hora de resolver este problema y que si algún alumno decidía recurrir al uso del lenguaje algebraico para resolverlo, que dejen claro que esta no es más que otra forma de resolver este problema, ya que el objetivo no es solo que los alumnos aprendan a resolver sistemas de ecuaciones lineales, sino que también es importante trabajar las diferentes representaciones de esta información y cómo todas ellas pueden servir para encontrar los

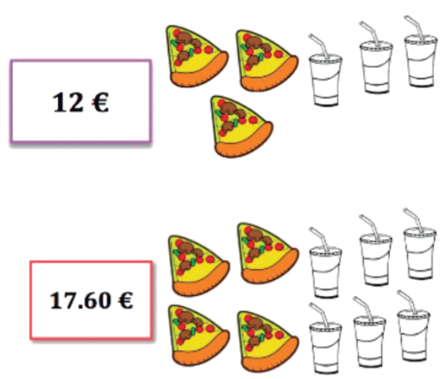



Figura 6. Representación icónica de un problema con dos condiciones de la actividad *El precio de la pizza*

dos precios que se buscaban. En la figura 7 se pueden ver diversas producciones de alumnos que resuelven esta situación de maneras diferentes.

Como este tipo de problemas genera de manera natural el uso de estrategias y representaciones diferentes para resolverlos, estos problemas facilitan a los profesores generar diálogos en los que se conecten diferentes estrategias de resolución y diversas representaciones. Además, las estrategias que van aprendiendo mientras resuelven este tipo de problemas sirven a los alumnos para resolver problemas puramente algebraicos (de la Fuente, Deulofeu y Rowland, 2016).

## ESTUDIAR RELACIONES Y FUNCIONES

El lenguaje algebraico también tiene que servir como medio para comunicar y entender la relación entre dos o más variables. En particular, el estudio de funciones tendría a su vez que ayudar a los alumnos a desarrollar este lenguaje.

La geometría nos puede proporcionar contextos ricos para que nuestros alumnos construyan el lenguaje simbólico necesario para entender relaciones entre dos o más variables, por ejemplo, mientras estudiamos las fórmulas de las áreas de las figuras planas. El siguiente problema es un ejemplo de ello.

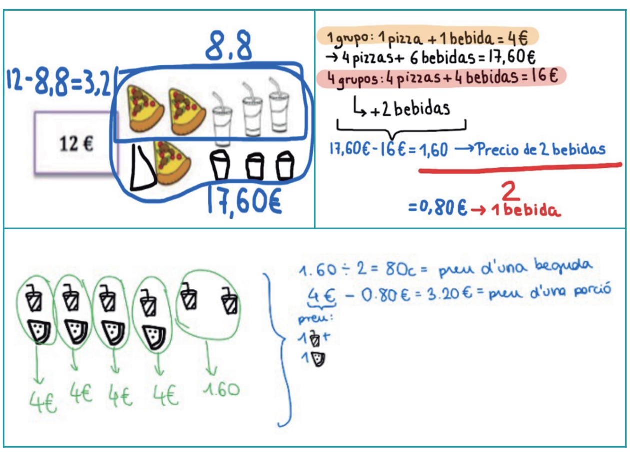



Figura 7. Tres alumnos usan estrategias y representaciones diferentes para resolver el mismo problema

> *El área del trapecio*
>
> Seguramente ya sabes que el área del trapecio es:
>
> $$A=\frac{B+b}{2}\cdot h.$$
>
> Deduce esta fórmula suponiendo que solo sabes las fórmulas del área del rectángulo, el triángulo y el paralelogramo. Hazlo al menos de tres maneras diferentes.

La figura 8 muestra un ejemplo de resolución del problema que hemos planteado por una alumna de 1.º de ESO. Podemos observar cómo esta alumna es capaz de manipular los símbolos para obtener diferentes fórmulas equivalentes del área del trapecio para luego comprobar que efectivamente todas llevan a la misma expresión si se manipula adecuadamente.

El estudio de fenómenos que implican cambios son los que generan el estudio de las funciones. Este estudio se puede expresar usando diferentes representaciones: descripciones verbales, gráficas, tablas de valores o expresiones algebraicas. Por lo tanto, ya queda claro que la expresión algebraica de una función no es la única forma en la que nos podemos referir a ella y si nuestro objetivo es construir el lenguaje algebraico nos podemos apoyar en el resto de representaciones para dotar de significado a los símbolos.

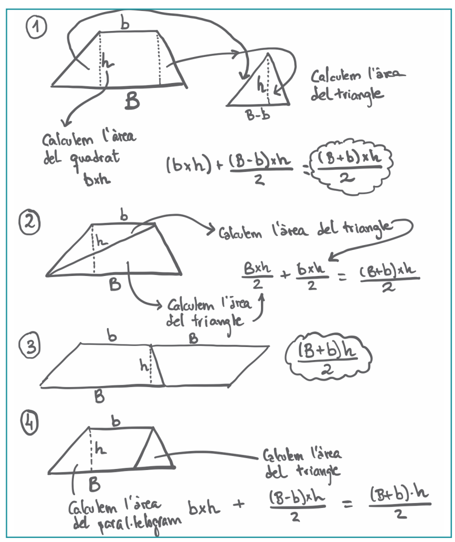



Figura 8. Resolución del problema del trapecio por una alumna de 1.º de ESO

Ahora bien, nos gustaría remarcar que para que la propuesta de actividades relacionadas que sugerimos sea lo más útil posible, es importante que los alumnos hayan vivido experiencias previas con gráficas de funciones, tablas, etc. El hecho de trabajar con gráficas de funciones y no necesariamente con las expresiones algebraicas de las mismas, nos permitirá poder trabajar con una amplia variedad de funciones, sin necesidad de limitarnos a aquellas que tengan una expresión algebraica sencilla.

Un ejemplo de problema que podemos plantear en clase, adaptado del artículo de Arcavi (2008), nos servirá para explicitar la conexión entre las diferentes representaciones de una función.

*Ahorros*

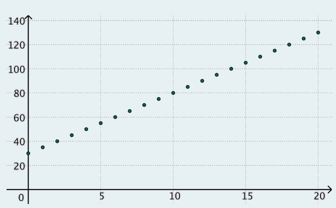
Los ahorros de Helena, Xavier, Andrea y Joan han cambiado durante el último año tal y como está descrito bajo estas líneas. Los números indican las cantidades de dinero en euros y al final de cada semana.

**Helena:** La tabla muestra cuánto dinero ha ahorrado al final de cada semana. La tabla continúa de la misma forma durante todo el año.

| Semana | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ahorro | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | … |

**Xavier:** Durante todo el año ha tenido ahorrados 300€.

**Andrea:** El gráfico describe sus ahorros durante las primeras veinte semanas. El gráfico continúa de la misma manera durante el resto del año.




**Joan:** Los ahorros de Joan se pueden describir mediante la siguiente expresión algebraica

$$y = 300 - 5x,$$

siendo $x$ el número de semanas e $y$ los ahorros en euros.

Escoge una de las representaciones (verbal, gráfica, tabla o algebraica) que se plantean aquí para comunicar cómo son los ahorros de estas personas y expresa todos los ahorros en la forma elegida.

Otro ejemplo que nos permite continuar con la construcción del lenguaje algebraico a partir de la necesidad de comunicar relaciones entre variables y funciones, también adaptado del artículo Arcavi (2008), es el que aparece en el siguiente cuadro.

*Ahorros de los nietos de Joan*

Las siguientes expresiones describen los ahorros de los diferentes nietos del abuelo Joan ($x$ denota el número de semana):

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Mónica** | $7x$ | **Gus** | 300 |
| **Anna** | $10x$ | **Pere** | $60+3x$ |
| **Javi** | $30+5x$ | **Helena** | $-20+4x$ |
| **Laura** | $300-5x$ | **Gerard** | $-70+7x$ |

Todos los nietos viven bastante cerca, y han descubierto que hay una forma muy divertida de poder comunicarse entre ellos: el *walkie-talkie*. Para eso tienen que comprar un transmisor para cada dos de ellos. Así que juntarán sus ahorros para poder llegar a los 400 € que cuesta ese modelo de *walkie-talkie.*

1. Encuentra expresiones, tan cortas como sea posible, para describir la cantidad de ahorros que se pueden conseguir juntando los ahorros por pareja de todas las parejas posibles. Haz una descripción tanto verbal como algebraica.
2. ¿Cuál de las parejas sería la primera en conseguir ahorrar los 400 € que cuestan los *walkie-talkie*?
3. ¿Podrías sugerir una agrupación de parejas que beneficie a todo el grupo?

Con este problema podemos conseguir trabajar la traducción de una expresión algebraica a lenguaje verbal dentro de un contexto con un significado cercano a los alumnos como pueden ser los ahorros y además propiciamos que este lenguaje, el verbal, pueda ser útil para la propia construcción de expresiones algebraicas simbólicas.

En el artículo de Arcavi (2008) podemos encontrar el siguiente diálogo entre dos alumnas mientras discuten los ahorros producidos por las parejas Mónica ($7x$)–Anna ($10x$) y Mónica ($7x$)–Javi ($30+5x$):

**Natally** Mónica consigue 7 cada semana, y Anna gana 10 cada semana, por lo tanto juntas consiguen 17 cada semana, 17*x*.

**Eli** Ellas conseguirán la máxima cantidad de ahorros.

**Natally** Mónica y Javi. Si Mónica consigue 7, y Javi 5, ¡espera un momento! Javi tiene 30 € inicialmente, ¿no? Por lo tanto, 5 + 7 = 12, OK. 30 + 12*x*.

Es decir, que con este tipo de actividades los alumnos pueden ser capaces de sumar dos expresiones algebraicas (cosa que no habían aprendido a hacer cuando se realizó esta experiencia) sin recurrir a las reglas sintácticas del álgebra. Podríamos además aprovechar este problema para, por ejemplo, hablar sobre la pendiente de una recta y comenzar así a ver cómo el modelo dado por la función lineal $y = mx + b$ nos ayuda a resolver algunos problemas.

## MODELIZAR

Queremos que nuestros alumnos se muestren flexibles a la hora de describir e interpretar el mundo de los fenómenos que les rodean. Y, de acuerdo con Azcárate y Deulofeu (1998):

> […] todo el mundo docente coincide en considerar el papel esencial del estudio de funciones en las Matemáticas, a partir del siglo XVIII, como fuente de modelos e instrumentos que permiten describir e interpretar tanto el mundo físico como los fenómenos y las relaciones sociales.

Así pues, creemos que la modelización matemática ha de permitir desarrollar esta sensibilidad. Lo que pretendemos en este apartado es ver cómo el lenguaje algebraico puede servir para presentar y entender los modelos que nos permiten interpretar nuestro entorno.

En consonancia con estos principios, esta categoría del lenguaje algebraico debe incluir ser capaz de construir significado a partir de diferentes representaciones (gráficos, tablas, fórmulas, etc.) de un mismo fenómeno y ser capaz de transformar diferentes representaciones en otras equivalentes para comprenderlas y extraer conclusiones. Pero fijémonos que si solo hablamos de estos aspectos, no tendremos una necesidad clara de decir que el álgebra tiene que servir para modelizar y distinguir a su vez esta categoría de la del estudio de funciones. Por ejemplo, podríamos decir que cuando un alumno traduce del lenguaje verbal un problema y escribe una ecuación que servirá para resolverlo también está cambiando de representación y por lo tanto, ya estaría modelizando. Ciertamente, también podríamos decir que este proceso pertenece a la dimensión de modelización. Entonces, ¿para qué nos interesa mantener una categoría separada para el proceso de modelización?

De acuerdo con Solar, Deulofeu y Azcárate (2015) la modelización será el conjunto de fases necesarias para resolver un problema proveniente de una situación real por medio de un modelo matemático:

> El proceso de modelización se inicia generalmente con una situación extramatemática, se simplifica a un modelo real y se matematiza para obtener un modelo matemático; se resuelve la situación dentro del modelo y se interpreta la solución de una forma coherente con la situación inicial; finalmente se evalúa si responde con la situación original.

Así, volviendo a la cuestión anterior, los procesos que generan una necesidad esencialmente diferente al respecto del uso del lenguaje algebraico del resto de categorías son los que hemos llamado matematizar e interpretar en la figura 9.

Cerrar el círculo de la modelización completo y llegar hasta este punto de motivación con nuestros alumnos puede ser costoso en cuanto al tiempo necesario para hacerlo, pero creemos que vale la pena que esto pase

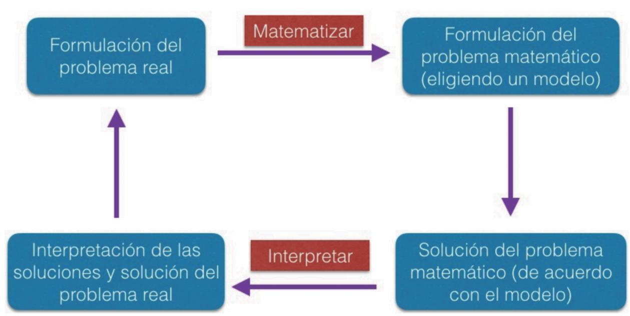



Figura 9. El proceso de modelización

aunque sean unas pocas veces durante su educación obligatoria. Por lo tanto, habría que buscar contextos donde se den estas situaciones y la complejidad de las mismas esté al alcance de nuestros alumnos.

Un ejemplo de tarea que podríamos llevar a cabo con nuestros alumnos para hacer emerger las diferentes fases del proceso de modelización en nuestras aulas es el estudio de la relación existente entre la frecuencia del sonido obtenido tocando una cuerda de una guitarra y la longitud de la misma. La relación entre estas dos variables es de proporcionalidad inversa y, concretamente, si llamamos $L$ a la longitud de la cuerda, y $F$ a la frecuencia, tenemos que $F = K/L$, siendo $K$ una constante que depende de la cuerda particular. Podemos usar esta idea en el aula midiendo la frecuencia con cualquier medidor digital (por ejemplo, usando una aplicación para teléfono móvil) y viendo cómo varía la frecuencia en función de dónde estemos pulsando la cuerda de la guitarra. Así los alumnos podrán acabar encontrando la relación anterior con una cuerda concreta. Luego les podríamos pedir que, ya sin usar el medidor de frecuencias digitales, hagan el mismo proceso con otra cuerda y que representen la información que relaciona frecuencia y longitud de forma verbal, gráficamente, en una tabla de valores y también a través de una expresión algebraica. Solo habrá que darles un dato, por ejemplo la frecuencia que corresponde a la cuerda de la guitarra al sonar suelta. En la figura 10 podemos ver el resultado de esta tarea planteada en una clase de 2.º de ESO. En mi opinión es en esta parte del experimento donde el profesor tiene la oportunidad de convencer a los alumnos del interés que tiene el uso de este modelo matemático, en el momento en que gracias a las matemáticas podemos estudiar el fenómeno sin tener que repetir el experimento.

Consideremos ahora la familia de rectángulos que tienen área $K$ cm$^2$ (rectángulos equivalentes). Si consideramos la relación entre la base ($b$) y la altura ($a$) de estos rectángulos, de nuevo obtenemos la relación $a = K/b$.

En la figura 11 vemos la representación gráfica que se hizo implementando esta actividad en la misma aula de 2.º de ESO en la que se propuso el trabajo que hemos mostrado anteriormente. Se pidió que se construyesen muchos rectángulos equivalentes de área 36 cm$^2$ para luego juntarlos todos y estudiar la relación que se obtenía entre área y altura observando el vértice del rectángulo que queda más alejado del origen de coordenadas si los colocamos tal y como vemos en la imagen.

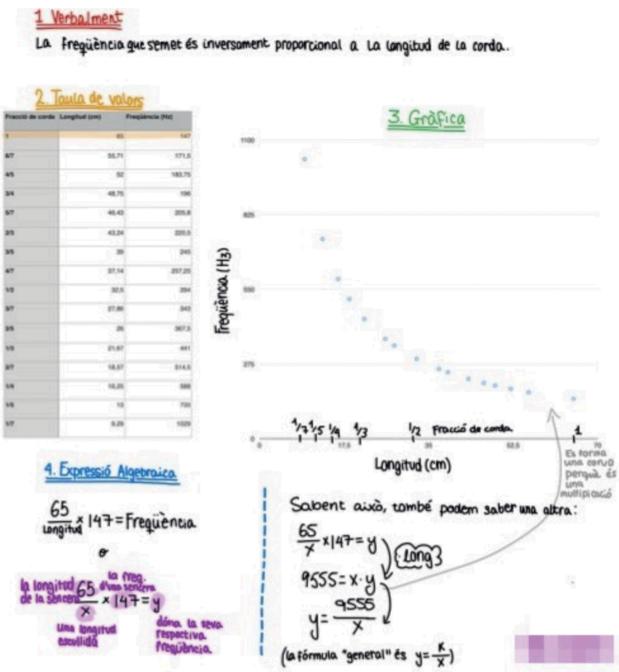



Figura 10. Diferentes representaciones de la relación entre la longitud de una cuerda de una guitarra y la frecuencia que emite al tocarla

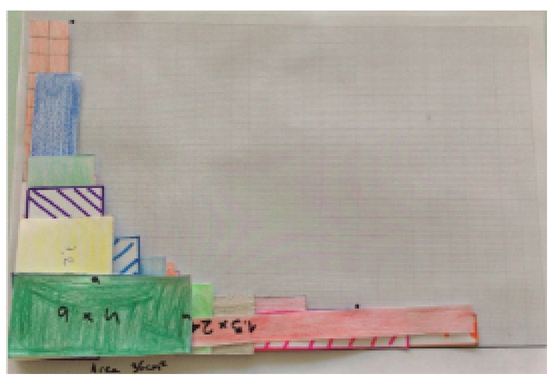


Figura 11. Rectángulos equivalentes de 36 cm$^2$ de área representando una función de proporcionalidad inversa

Por último, dentro de un contexto tradicional de una clase de Tecnología (o en la propia aula de Matemáticas) se podría hablar de la ley de Ohm, $V = I \cdot R$, donde $I$ es la intesidad de la corriente (cantidad de electrones que circulan en un punto por unidad de tiempo), $R$ es la resistencia de los materiales que forman parte del circuito y $V$ es el voltaje que proporciona la fuente de energía. Nótese que, manteniendo constante el voltaje $V$, las variables $I$ y $R$ son inversamente proporcionales. Entonces, si en un enchufe que proporciona un voltaje constante de 220 V, ¿qué pasará si metemos los dedos? Resulta que nuestro cuerpo no ofrece casi ninguna resistencia al circuito, por lo que si la resistencia tiende a cero, la intensidad tenderá a infinito, produciendo el consecuente chispazo en el cable debido al elevado número de electrones que intentan pasar a través del mismo. De nuevo el estudio de la función de proporcionalidad inversa nos ofrece un buen modelo matemático para hacer este estudio.

Seguro que la gran mayoría de los profesores están convencidos de que el estudio la función de proporcionalidad inversa ($y = k / x$) es importante en clase de matemáticas, pero todo este recorrido por el proceso de modelización es lo que en realidad dotará de razones a los alumnos para que ellos también crean que es importante estudiar este modelo matemático y permanecer en la abstracción estudiando cómo varía la función según los diferentes valores del parámetro $k$ de este modelo funcional.

## Conclusiones

Un aspecto que cabe destacar de las diferentes categorías que hemos querido evidenciar en el aprendizaje del álgebra, es el orden que hemos escogido para su formulación. Siempre que diseñamos un proceso de enseñanza-aprendizaje tenemos que determinar una secuencia. Esto se da con un carácter más general cuando se secuencia un curso completo o incluso una etapa educativa, y con un carácter más específico cuando lo que se secuencia es solo una unidad didáctica o una tarea concreta. Entendemos que el desarrollo de la competencia algebraica exige una determinada secuenciación. Por eso, el orden que hemos seguido a la hora de determinar cuáles son las habilidades que debemos desarrollar para que los alumnos construyan el álgebra no es aleatorio. Así, para que un alumno pueda comprender el proceso de resolución de ecuaciones, debe en primer lugar ser capaz de dar significado a letras y símbolos, y para ello tiene que haberlos usado para comunicar generalizaciones. De la misma manera, difícilmente un alumno podrá darle significado a un modelo matemático en el que necesite comprender los parámetros de una determinada función si antes no ha tenido experiencias con el lenguaje algebraico para expresar funciones. Esta secuencia de habilidades es la que hemos querido ejemplificar en este artículo. Sin embargo, es importante repetir que esta secuenciación no tiene por qué ser única. Podría haber otras igualmente válidas, siempre que tengan en cuenta las características del diseño que hemos señalado.

Por otro lado, y con respecto a la secuenciación de la que hablábamos, es habitual argumentar que los problemas que los alumnos pueden resolver mediante operaciones aritméticas no son buenos problemas para introducir el uso del álgebra (Puig y Cerdan, 1990). En esta investigación hemos demostrado lo contrario: hay problemas que se pueden resolver sin usar el álgebra pero que, sin embargo, dotan a los alumnos de las habilidades necesarias para desarrollar el lenguaje algebraico (de la Fuente, Deulofeu y Rowland, 2016).

## Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2008), «Modelling with graphical representations», *For the Learning of Mathematics,* n.º 28, (2), FLM Publishing Association, Edmonton.

Azcárate, C., y J. Deulofeu (1998). *Matemáticas ESO. Guías Praxis para el profesorado*, Praxis, Barcelona.

Cobo, P., J. Comellas, J. Giménez, J. Serra, M. Sol y X. Vilella (2005), «Algebra a l'ESO per tothom. Reinventant a partir del context», *NouBiaix*, n.º 24, 41-47.

de la Fuente, A. (2016), *Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del profesor*, Tesis Doctoral, UAB.

de la Fuente, A., J. Deulofeu y T. Rowland (2016), «Developing algebraic language in a problem solving environment: the role of teacher knowledge», *Proceedings of the Bristish Society for Research into Learning Mathematics*, vol. 36, n.º 1, Manchester, 25-30.

Kaput, J. (2000), *Teaching and learning a new algebra with understanding,* University of Massachussets-Dartmouth.

Kieran, C. (1992), «The learning and teaching of school algebra», en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Investigation on mathematics teaching and learning*, Macmillan, Nueva York, 390-419.

Mason, J., L. Burton y K. Stacey (1992), *Pensar matemáticamente*, Editorial Labor, Barcelona.

Nacional Council of Teachers of Mathematics (2003), *Principios y estándares para la Educación Matemática*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla.

Puig, L., y F. Cerdán (1990), *Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales*, Conferencia invitada al grupo de Álgebra del Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática, Cuernavaca, Morelos, México, 12-14 de julio de 1990.

Schoenfeld, A. H., y A. Arcavi (1988), «On the Meaning of Variable», *Mathematics Teacher*, septiembre 1988, 420-427.

Sessa, C. (2005), *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra: orígenes y perspectivas*, Libros del Zorzal, Argentina, Buenos Aires.

Solar, H., J. Deulofeu y C. Azcárate (2015), «Competencia de modelización en interpretación de gráficas funcionales», *Enseñanza de las ciencias* n.º 33.2, 191-210.

Vila, A., y M. L. Callejo (2004), *Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas*, Editorial Narcea, Madrid.

**Abraham de la Fuente Pérez**
Universitat Autònoma de Barcelona
Institut-Escola Costa i Llobera, Barcelona
<abrahamfp@gmail.com>