suma+

Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje
de las matemáticas · **abril 2022**

– núm. 99 –



SUMA+ 99
Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas · abril 2022

3 Educación matemática con sentido

Artículos

9 Estrategias de co-enseñanza: matemáticas y economía
Mónica Maldonado Devis y Víctor Manuel Ortiz Sotomayor

17 Luces y sombras del álgebra temprana en el currículo español (3-12 años)
Ángel Alsina Pastells y Nataly Pincheira Hauck

27 Algunas propuestas para el aula en torno a la divisibilidad por 8
Rafael Aragón Cueto y Juan Manuel Delgado Sánchez

37 Destilando el currículo de Educación Primaria
Teresa Serra Santasusana y Carme Burgués Flamarich

49 Aprender a usar el álgebra en secundaria mediante la resolución de problemas
Abraham de la Fuente Pérez

Secciones

63 MUJERES MATEMÁTICAS: ROMPIENDO MOLDES
Anne Lucy Bosworth Focke, la primera y brillante alumna de David Hilbert
Marta Macho Stadler

67 DEL MMACA AL AULA
Creatividad y tareas. Una dialéctica necesaria
MMACA

73 EL RINCÓN DE ESTALMAT
(coord. Rafael Ramírez Uclés)
Modelización matemática con grafos en Maxima
Esperanza López Centella

83 SÍ A LAS CALCULADORAS
¿Qué hay de la calculadora en la legislación educativa?
Eva García Cabañas, M.ª Cristina Naya Riveiro y María Sotos Serrano

91 DIARIO DE EXPERIENCIAS MATEMÁTICAS
(coord. Maria Àngels Portilla Rueda)
Tic-tac
Aina Maria González Juan, Magdalena Martí Pons, Susanna Morell Torrens y Catalina Maria Pizà Mut

101 MATEMÁTICAS A UN CLIC
(coord. José Luis Muñoz Casado)
Manipuladores virtuales para pequeños aprendices de matemáticas
Blanca Arteaga-Martínez

109 VERSIÓN INGLESA
Las matemáticas de educación infantil y primaria
Maite Aranés Maza

FESPM & Cía

117 20 JAEM. Matemáticas para construir el mundo
Comité organizador local

125 Seminario Federal Matemáticas inclusivas
María Teresa Navarro Moncho

135 Seminario Federal Sentidos Matemáticos en los nuevos currículos
Juana M.ª Navas Pleguezuelo

Suma digital <revistasuma.fespm.es>

Enlaces referenciados en este número

EDITORIAL

Educación matemática con sentido

Una vez más, y son ya muchas en unas pocas décadas, nos encontramos ante un momento de cambio en la legislación educativa. Un cambio siempre implica un cierto grado de incertidumbre, incomodidad, resistencia y, en este caso, puede que cansancio y hasta frustración. Sin embargo, todo cambio supone a su vez una oportunidad para la reflexión, el análisis, la mejora y la esperanza.

Una vez publicados los Reales Decretos que regulan los contenidos mínimos en las enseñanzas no universitarias, comprobamos que el diseño curricular de las materias de matemáticas supone un importante cambio de enfoque en relación a la normativa en vigor. Este cambio se alinea con la propuesta realizada por el grupo de trabajo del CEMat (Comité Español de Matemáticas) en su documento *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en educación no universitaria*. Esta propuesta se estructuraba a partir de un conjunto de grandes ideas matemáticas, claves para la alfabetización del alumnado en las etapas no universitarias, organizadas en torno a la idea de sentido matemático, entendido este como «el conjunto de capacidades relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos y algebraicos, geométricos, métricos y estocásticos, que permiten emplear estos contenidos de una manera funcional y con confianza en las propias habilidades». El protagonismo del sentido matemático es una de las principales novedades que presenta el contenido de los Reales Decretos, que desplaza el foco de la educación matemática de «saber matemáticas» a «pensar matemáticamente», de los contenidos a los procesos. A pesar de que esta terminología es nueva en nuestro currículum de matemáticas, si analizamos el término empleado para describir las capacidades matemáticas que pretendemos que desarrolle nuestro alumnado, sentido matemático, veremos que su elección resulta de lo más acertado.

Una de las acepciones del término sentido en el diccionario de la RAE es «capacidad para reconocer la realidad circundante y relacionarse con ella», definición que encaja perfectamente con el objetivo de la nueva propuesta curricular. Una parte importante de la actividad matemática es reconocer elementos de la realidad que nos rodea:

formas, cantidades, patrones, gráficos, relaciones, cambio..., todos ellos están presentes a nuestro alrededor y su reconocimiento debe ser el punto a partir del cual comience la construcción del saber matemático de nuestro alumnado. Pero la definición anterior no habla solo de reconocer la realidad, sino de relacionarse con ella, lo que nos conecta directamente con procesos y tareas propias de la matemática: medir, clasificar, representar, describir, deducir, generalizar, ordenar..., son acciones propias de la actividad matemática, que deben formar parte del día a día de las aulas, acciones que llevarán al alumnado a resolver situaciones propias de la realidad, relacionándose con ellas a través de las matemáticas.

La siguiente acepción del término sentido en el diccionario encaja con aspectos que deben estar muy presentes en la educación matemática: «capacidad de entender, apreciar o juzgar algo». La competencia matemática y la resolución de problemas deben perseguir no solo el reconocimiento de la realidad, de los elementos matemáticos de la misma, sino también su comprensión. Reconocer un patrón es el primer paso en el camino de entenderlo, de ser capaz de expresarlo adecuadamente en términos propios de las matemáticas, de la búsqueda de generalizaciones o de conexiones con el conocimiento anterior. El sentido matemático debe proporcionar al individuo la capacidad para «juzgar», es decir, para tomar decisiones ante una situación determinada. La educación matemática debe proporcionar al alumnado herramientas y capacidades para procesar los datos e informaciones recibidas en diferentes representaciones (numéricas, gráficas, funcionales, algebraicas), para matematizar situaciones de diferentes contextos, obtener resultados y comunicarlos adecuadamente. El desarrollo del sentido matemático resulta esencial no solo para reconocer y comprender la realidad, sino también para evaluar razonadamente distintas opciones y tomar decisiones sobre la misma, tanto en el contexto académico como fuera de él.

Paralelamente a los cinco sentidos que nos permiten percibir información proporcionada por estímulos externos, la propuesta del CEMat distinguía cinco sentidos matemáticos alrededor de los que organizar el currículo: algebraico, espacial, estocástico, de la medida y numérico. Además de los cinco citados anteriormente, el RD recoge un sexto sentido, el sentido socioafectivo. A pesar de la polémica inicial acerca de si este último puede ser considerado o no un sentido matemático, la investigación en didáctica de la matemática coincide en la existencia de algunos problemas, obstáculos y bloqueos que no proceden de la dimensión cognitiva, sino que están estrechamente relacionados con ideas preconcebidas, con dificultades para procesar el error, con tradiciones sobre la relación entre género y matemáticas y otros aspectos de la dimensión socioafectiva.

El RD aborda por primera vez de manera específica estos problemas, definiendo competencias específicas que integran esta dimensión de manera explícita en el currículo, al mismo nivel que las competencias asociadas al sentido matemático. Existen estudios contrastados que avalan la importancia de la dimensión socioafectiva en el aprendizaje de las matemáticas, independientes en muchas ocasiones del contenido matemático trabajado. El docente de matemáticas ha de tener presentes estos resultados a la hora de diseñar e implementar su práctica, tratando el error como parte

inherente al proceso de aprendizaje, diseñando situaciones y tareas que faciliten una enseñanza realmente inclusiva, siendo conscientes de la fuerza del éxito como elemento motivador, haciendo nuestras las palabras de Anton Aubanell y dando «a todas las personas la posibilidad de tener una experiencia matemática feliz».

Retomando las diferentes acepciones del término, han de ser los responsables de implementar esta reforma, administración y docentes, quienes doten de sentido a la norma escrita, entendido esta vez como «razón de ser, finalidad o justificación de algo». Resulta imprescindible un programa de calidad de formación continua del profesorado, adecuado al cambio de enfoque promovido desde los reales decretos, así como una dotación de recursos y materiales que permita poner en práctica aspectos fundamentales del currículo como la inclusión, la atención a las necesidades diversas del alumnado o el trabajo con distintos recursos manipulativos y digitales.

El diccionario de la RAE recoge también que sentido es el «modo particular de entender, enfocar o juzgar algo», definición que ilustra la diversidad existente entre los docentes a la hora de entender nuestro trabajo. Necesitamos espacios y foros en los que coincidir, no solo para compartir materiales, sino para desarrollar un trabajo colaborativo real, buscar soluciones conjuntas a los problemas que nos plantea la práctica diaria y sentirnos acompañados al afrontar los retos que implica este cambio educativo. La administración y las sociedades de profesorado de matemáticas han de participar activamente a la hora de facilitar estos espacios de reunión, de debate y de colaboración.

El diccionario contempla otro significado de sentido que los matemáticos empleamos con frecuencia, sentido es «cada una de las orientaciones opuestas en una misma dirección». Este cambio curricular marca una nueva orientación en los objetivos y las prioridades de la educación matemática, cambio que los profesores y profesoras de matemáticas debemos entender como una oportunidad de avanzar, de movernos hacia una educación moderna, adaptada a las necesidades de la sociedad del siglo XXI. La ciencia nos dice que es necesario aplicar una fuerza para vencer la inercia e iniciar un movimiento o cambiar el sentido del mismo. La experiencia, la formación y el trabajo colaborativo nos proporcionarán la fuerza necesaria para avanzar en este camino y trasladar a las aulas este nuevo sentido de la educación matemática.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Onofre Monzó del Olmo**
Secretario General: **Agustín Carrillo de Albornoz Torres**
Vicepresidente: **Juan A. Martínez Calvete**
Tesorera: **Encarnación Amaro Parrado**
Secretaría técnica adjunta: **Bienvenido Espinar Cepas**
Secretaría de relaciones internacionales: **M.ª Claudia Lázaro del Pozo**
Revista Suma: **Iolanda Guevara Casanova**
Servicio de publicaciones: **Juan Martínez-Tébar Giménez**
Secretaría de actividades y formación del profesorado: **Juana M.ª Navas Pleguezuelos**
Secretaría de actividades con alumnos: **Francisco Haro Laguardia**
Secretaría de divulgación: **Juan Carlos Toscano Grimaldi**

Sociedades Federadas

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán»
Presidenta: **M.ª Encarnación Reyes Iglesias**
IES Comuneros de Castilla, C/Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: **Julio Rodríguez Taboada**
CPI Dos Dices, C/ Dos Dices, s/n. 15911 Rois (A Coruña)

Euskadiko Matematika Irakasleen Elkartea «EMIE 20+11»
Presidenta: **Ana Fernández de Betoño Sáenz de Olamendi**
IES Miguel de Unamuno BHI, c/ Vicente Gonzalez de Etxabarri, s/n 01009 Vitoria-Gasteiz. 01009 Vitoria-Gasteiz (Araba)

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)
Presidente: **Bernat Ancochea Millet**
C/ Itàlia, 84B. 08320 El Masnou (Barcelona)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Centro de Documentacion SAEM Thales, Facultad de Ciencias, Dpto Matemáticas, Campus Río San Pedro s/n, Torre Central 4º planta 11510 Puerto Real (Cádiz)

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas
Presidente: **Daniel Sierra Ruiz**
IUMA, Edificio de Matemáticas, 1.ª planta, Universidad de Zaragoza, C/ Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: **Rubén Pérez Zamanillo**
IES Mata Jove, Plaza Club Patín Gijón Solimar, 33213 Gijón (Asturias)

Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas
Presidenta: **Agar Arrocha Reyes**
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa. 38205 La Laguna (Santa Cruz de Tenerife)

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: **Serapio García Cuesta**
IES Universidad Laboral, Avda. de la Mancha s/n, 02006 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidenta: **Catalina Ayala Molina**
Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia. Campus de Espinardo. 30100 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: **José Pedro Martín Lorenzo**
Centro Educativo Municipal, 2,ª planta, C/ San Juan nº 3A, 06400 Don Benito (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidente: **José Luis Muñoz Casado**
Facultad de CC. Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, Plaza de las Ciencias, 3, 28040 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: **Carmen Espeso Ortiz**
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: **Jesús Diego Rodríguez García**
IES Enrique Nieto. Departamento de Matemáticas, C/ Avenida de la Juventud, 4. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»-Matematika Irakasleen Nafar Elkartea
Presidente: **J. Javier Jiménez Ibáñez**
IES Alhama, Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: **José Javier Etayo Gordejuela**
Facultad de Educación. Despacho 3215
C/ Rector Royo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima»
Presidenta: **Elena Ramírez Ezquerro**
Facultad de Ciencia y Tecnología Edificio Científico Tecnológico, CCT; C/ Madre de Dios, 53. 26006 Logroño

Sociedade de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA)
Coord. Sección Matemáticas: **Iria Fernández Fontenla**
Facultade de Ciencias, Rúa Alfonso X o Sabio, s/n. 27002 Lugo

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX
Presidente: **Daniel Ruiz Aguilera**
C/ Miquel Capllonch, 30, 3A. 07010 Palma (Illes Balears)

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: **Onofre Monzó del Olmo**
Departamento de Didáctica de la Matemática, Apdo. 22045. 46071 València



artículos

Estrategias de co-enseñanza: matemáticas y economía

Mónica Maldonado Devis
Víctor Manuel Ortiz Sotomayor

SUMA+ núm. 99
pp. 9-15
Artículo recibido en *Suma* en marzo de 2020 y aceptado en diciembre de 2020

En el presente trabajo describimos una experiencia de enseñanza cooperativa (*team teaching*) desarrollada en el grado en ADE para emprendedores del Centro Universitario EDEM (Valencia), con el fin de mostrar la estrecha relación existente entre el concepto matemático de derivada y el económico de elasticidad. El objetivo era mostrar cómo la abstracción de los conceptos matemáticos es precisamente lo que permite posteriormente su aplicación en diversos contextos económicos. También hicimos uso del software GeoGebra con el fin de motivar estos conceptos de una manera visual e interactiva.

Palabras clave: Enseñanza cooperativa, Derivadas, Elasticidad, Incrementos, GeoGebra.

Co-teaching strategies: mathematics and economics // In the present paper, we describe a cooperative teaching experience (team teaching) developed in the Degree in Business Administration from the EDEM University Center (Valencia) with the objective of showing the close relationship between the mathematical concept of derivative and the economic one of elasticity. The aim was to illustrate how the abstraction of mathematical concepts is precisely what allows later its application in several economic contexts. We also made use of the software GeoGebra for motivating these concepts in a visual and interactive way.

Keywords: Team teaching, Derivatives, Elasticity, Increments, GeoGebra.

La asignatura de Introducción a la Economía del grado en ADE para emprendedores del Centro Universitario EDEM (Valencia) pretende dar a conocer al estudiante los principios esenciales del análisis económico, proporcionándole una primera toma de contacto con el funcionamiento básico de los mercados, tanto a nivel microeconómico como macroeconómico. Por otro lado, la asignatura Matemáticas I proporciona los conceptos, técnicas e instrumentos matemáticos básicos que serán necesarios en el resto del grado. Generalmente a los estudiantes de un grado de ADE les cuesta mucho entender que los conceptos que se les explican en las asignaturas de matemáticas son necesarios para comprender los conceptos puramente económicos. Tienen tendencia a archivar lo visto en cada asignatura en compartimentos separados y no son capaces (en general) de relacionar las diferentes materias. Para un estudiante de economía es fundamental aprender que las matemáticas son una herramienta básica, son el lenguaje

con el que nos comunicamos generalmente los economistas. Como ocurre con cualquier lenguaje, es necesario comprender lo que se dice para que este sea eficaz.

En las primeras sesiones del curso fueron surgiendo entre los estudiantes las primeras dificultades en el aprendizaje de los conceptos económicos que implicaban conceptos matemáticos. Ante esta situación, aprovechando el hecho de que ambas asignaturas se imparten en el primer cuatrimestre del primer curso académico, tratamos de mitigar dicho problema. Los profesores de ambas asignaturas comenzamos a colaborar de manera informal tratando de ajustar la temporalización de las sesiones, unificando la notación empleada por ambos o consensuando los ejemplos que se iban a utilizar para ilustrar los diferentes conceptos.

[...] lo que supone la enseñanza colaborativa como metodología de enseñanza-aprendizaje. Se trata de una cooperación educativa en la que dos o más profesores se involucran conjuntamente en el proceso de planificación, enseñanza y evaluación.

Con el objetivo general de mostrar a los estudiantes que las asignaturas de Introducción a la Economía y Matemáticas I están estrechamente relacionadas, tras las primeras sesiones pensamos en iniciar una nueva aproximación pedagógica: la denominada enseñanza colaborativa y cooperar de manera regular en el diseño de los objetivos de aprendizaje, en la preparación de sesiones tanto individuales como conjuntas y en la evaluación de los resultados (Buckley, 1999).

Así, tras las primeras colaboraciones informales pasamos a diseñar una experiencia colaborativa concreta, utilizando para ello el concepto de derivada y su relación con el concepto económico de elasticidad. Con el objetivo de complementar la experiencia y conseguir que los estudiantes comprendieran mejor los conceptos a analizar introdujimos el *software* GeoGebra. Se trata de un *software* libre que ofrece geometría, álgebra y cálculo y que es ampliamente utilizado por estudiantes y profesores por su facilidad de uso, incluso en educación secundaria. La literatura sugiere que el uso de la tecnología en la enseñanza de los conceptos matemáticos presenta multitud de beneficios (Dravekova y Svecova, 2015; Majerek, 2014). En particular, el uso de las diferentes herramientas de GeoGebra puede ayudar a los estudiantes a tener una visión gráfica de conceptos abstractos (Hohenwarter y otros, 2008).

Qué es la enseñanza colaborativa (*team teaching*)

Se pueden encontrar en la literatura diferentes definiciones de lo que supone la enseñanza colaborativa como metodología de enseñanza-aprendizaje. Se trata de una cooperación educativa en la que dos o más profesores se involucran conjuntamente en el proceso de planificación, enseñanza y evaluación (Boulay, 2005; Buckley, 1999; Bauwens y Hourcade, 1991, 1995; Bauwens y otros, 1989).

La evidencia en la literatura sugiere que la enseñanza en equipo puede mejorar la participación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje y alejarlos de la concepción clásica de la acumulación de conocimientos (Donnison y otros, 2009; Shibley, 2006). Además, como parte del proceso, los profesores involucrados en el mismo aprenden unos de otros y como consecuencia tienden a ser más creativos a la hora de generar nuevo conocimiento (Kerin y Murphy, 2015; Murphy y Scantlebury, 2010; Roth y Tobin, 2002). La enseñanza colaborativa requiere de los profesores una serie de habilidades y características como el respeto, la empatía o la asertividad, fundamentales para el funcionamiento correcto y cohesionado del grupo (Mansell, 2006). La literatura, en definitiva, avala la enseñanza colaborativa como estrategia pedagógica para promover el aprendizaje en la educación superior (Anderson y Speck, 1998).

Objetivos

Como se ha comentado ya en la sección anterior, este año hemos elegido las asignaturas de Introducción a la Economía y Matemáticas I, ya que ambas asignaturas se imparten de manera paralela en el primer cuatrimestre del primer curso académico. Esta característica resulta fundamental, ya que de otra forma se dota al alumnado de unas técnicas matemáticas que suelen olvidar de un cuatrimestre a otro (o incluso de un curso a otro).

El principal concepto matemático en el que nos centramos fue el de la derivada. Grosso modo, la derivada de una función en un punto mide la proporción existente entre el cambio que sufre el valor de una función matemática cuando se modifica ligeramente el valor de una variable independiente en dicho punto. La definición formal matemática resulta, en general, bastante abstracta para el alumnado. Es por ello que también pretendíamos usar la tecnología existente para intentar realizar gráficas interactivas en 2D con algunas funciones, de manera que pudieran ver cómo se calcula la derivada en un punto gráficamente.

Por otro lado, la elasticidad fue el concepto estrella económico durante las sesiones conjuntas. La elasticidad mide también la proporción entre los cambios de los valores de una función y una variable independiente, pero de manera relativa. De esta forma, podemos cuantificar claramente si un determinado incremento es significativo o no. La elasticidad también se puede calcular de forma interactiva con GeoGebra, pudiendo por tanto proporcionar de una manera sencilla ejemplos de funciones (de demanda, de producción, etc.) con derivada constante en un punto, pero elasticidad variable y viceversa.

Los archivos creados con GeoGebra fueron puestos a disposición de los estudiantes en el aula virtual, con el fin de que ellos también pudiesen experimentar con el programa y los contenidos. De esta manera, el alumnado participa activamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, dejando atrás el clásico modelo de enseñanza de la clase magistral. A continuación, resumimos los objetivos concretos del equipo docente:

— Mostrar al alumnado la estrecha relación entre los conceptos matemáticos y económicos.
— Mejorar la comprensión de los conceptos de derivada y elasticidad mediante gráficas interactivas.
— Aumentar la participación e implicación de los estudiantes en la materia.

Descripción de la experiencia

Durante las primeras semanas del curso académico, en ambas asignaturas se fueron introduciendo de manera progresiva diferentes conceptos económicos y matemáticos que iban a ser necesarios posteriormente como funciones, incrementos, límites, incrementos porcentuales, derivadas, elasticidad, etc.

Durante esta primera fase se utilizaron algunas de las técnicas de la enseñanza colaborativa. Para comenzar, se fueron introduciendo los conceptos en ambas asignaturas de manera coherente y paralela, esto es, primero los incrementos, luego los incrementos porcentuales, posteriormente las derivadas y finalmente la elasticidad.

Otro detalle importante, aunque pueda no parecerlo, fue la unificación de la terminología y la notación utilizada. Esto se debe a que, en ocasiones, los estudiantes encuentran algunas dificultades en identificar como iguales dos notaciones distintas. A modo de ejemplo, en matemáticas es frecuente representar en una gráfica 2D la variable independiente en el eje OX, mientras que en economía se suele hacer en el eje OY, sobre todo con curvas de demanda (figura 1). Otro punto donde se hizo especial énfasis fue en la equivalencia de notación en las funciones; por ejemplo, una función de demanda en matemáticas se suele expresar $f(x) = -2x + 50$ o $y = -2x + 50$, mientras que en economía $X_d = -2P_x + 50$ Estos pequeños matices, aunque puedan parecer insignificantes, resultan realmente fundamentales en el inicio del curso. También se fueron mostrando ejemplos de algunas gráficas de funciones con GeoGebra, el cual no era conocido para los alumnos. De esta manera se iban familiarizando con el entorno del programa.

Una vez quedaron explicados los conceptos anteriormente mencionados, programamos una sesión conjunta de Matemáticas y Economía (MatEco), donde participamos ambos profesores. En dicha sesión se hizo especial hincapié en la relación entre ambos conceptos, en sus diferencias y similitudes, mostrando numerosos ejemplos. Se insistió también en la interpretación de ambos conceptos, dejando claro que la elasticidad mide valores porcentuales, lo cual nos ayuda a determinar si un cambio es significativo o no. En la figura 2 se muestra uno de los ejemplos utilizados en la sesión MatEco.

Una opción muy interesante del *software* GeoGebra es el deslizador, una herramienta que permite que una variable se pueda mover en un intervalo dado. Con esta técnica, que se puede apreciar en la figura 3, conseguíamos que el alumnado pudiese ver cómo varía la pendiente y la elasticidad en los puntos de un determinado intervalo. También mostramos la diferencia de elasticidad respecto del punto inicial y del punto medio.

Con esta herramienta del deslizador, también pudimos simular un límite y por tanto ver cómo la deri-

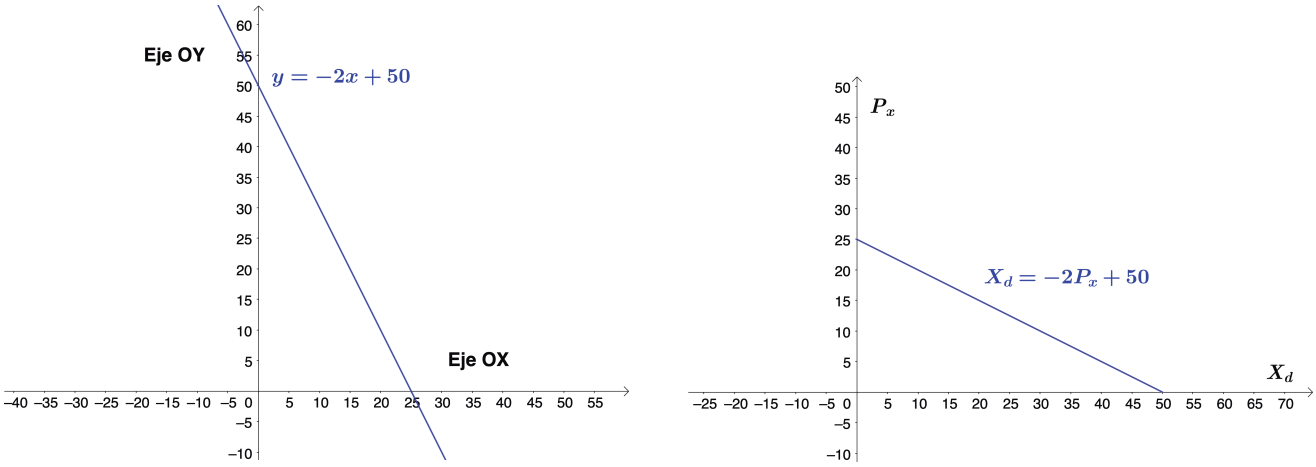


Figura 1. Ejemplos de notación utilizada en economía y en matemáticas, así como de las gráficas 2D donde la variable independiente cambia de eje de representación en una curva de demanda

Ejemplos entre dos puntos

EDEM
Escuela de Empresarios

$$Xd = -2Px + 50$$

Puntos	Pendiente		Elasticidad	
	Calcular	Interpretar	Calcular	Interpretar
P_0=8 ; X_0 =34 P_1=10 ; X_1=30	-4/2 =-2	Por cada unidad (€) que sube el precio las cantidades disminuyen en 2	$\frac{\Delta X}{\Delta P} * \frac{p_0}{x_0}$ -2*(8/34)=-0,47	Por cada 1% que sube el precio las cantidades disminuyen en 0,47% respecto al punto inicial.
			$\frac{\Delta X}{\Delta P} * \frac{p_0+p1}{x_0+x_1}$ -2*(18/64)=-0,56	Por cada 1% que sube el precio las cantidades disminuyen en 0,56% respecto a la media entre los dos puntos.
P_0=15 ; X_0 =20 P_1=17 ; X_1=16	4/-2 =-2	Por cada unidad (€) que sube el precio las cantidades disminuyen en 2	-2*(15/20)=-1,5	Por cada 1% que sube el precio las cantidades disminuyen en 1,5% respecto al punto inicial.

7

Figura 2. Ejemplos de interpretación del concepto de pendiente y de elasticidad entre dos puntos

vada en un punto nos da la pendiente de la recta tangente en dicho punto. Concretamente, hicimos que una variable *h* tendiese a 0 mediante el **deslizador**, tal y como se puede ver en la figura 4.

Como hemos visto en las imágenes, otra gran ventaja del *software* GeoGebra es que permite insertar en la misma pantalla gráfica una hoja de cálculo. De esta manera, introduciendo por ejemplo la fórmula de la elasticidad en un punto, el programa calcula automáticamente dicho número dependiendo del valor que esté tomando la variable en el **deslizador**. Esto supone un ahorro considerable de tiempo en clase, lo que permite mostrar una mayor cantidad de ejemplos.

Resultados

Hemos de señalar que el ambiente en clase y la experiencia han sido muy satisfactorios. El alumnado se ha mostrado en general muy motivado durante estas sesiones conjuntas. Tras finalizar dichas sesiones, rellenaron de manera anónima una encuesta, cuyos resultados permiten al profesorado analizar la experiencia de manera cuantitativa. A continuación, mostramos los resultados de dicho análisis.

El porcentaje de alumnos que participaron voluntariamente en las encuestas anónimas fue del 77,36%. A continuación, destacamos tres de las preguntas más

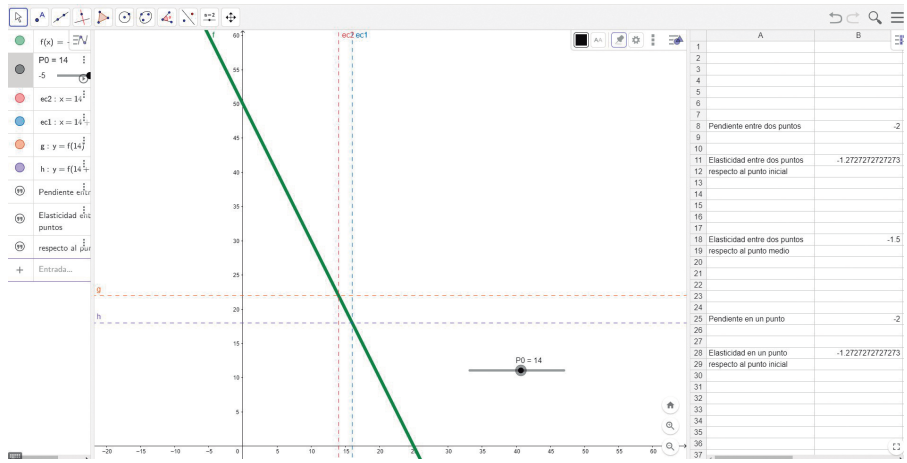


Figura 3. Ejemplo de la herramienta deslizador de GeoGebra. Simulación del valor de pendiente y elasticidad

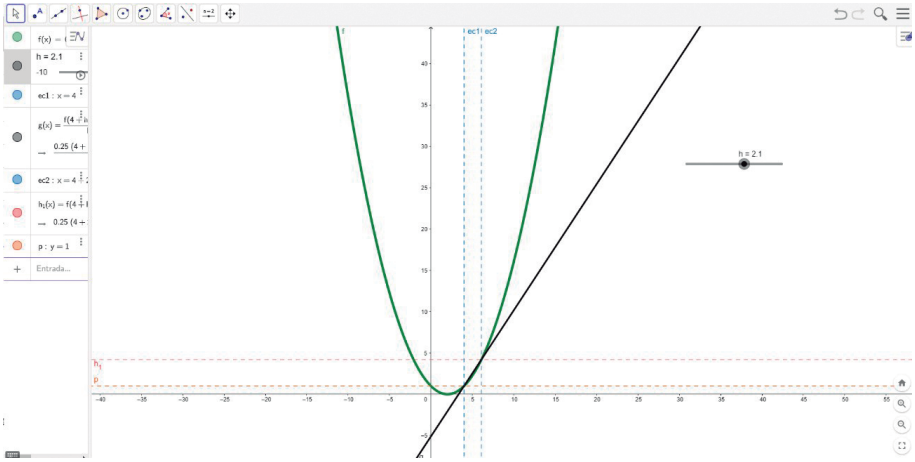


Figura 4. Ejemplo de la herramienta deslizador de GeoGebra. Simulación de un límite

importantes que se realizaron en dicho cuestionario. Los resultados a estas preguntas los resumimos en forma de diagrama circular en la figura 5.

Como podemos observar, los resultados evidencian las hipótesis que el profesorado se planteaba al inicio de estas actividades. Además, las encuestas disponían de un apartado para dejar comentarios o posibles mejoras para otros años. Destacamos a continuación un par de ellos:

> Están ambos profesores centrados en resolver las dudas, aportando a la vez un enfoque matemático y económico.

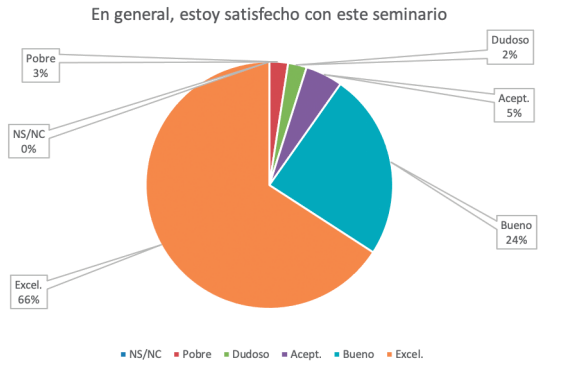
> La seguiría haciendo con otros cursos para así ir mejorando en que los alumnos entiendan la materia.

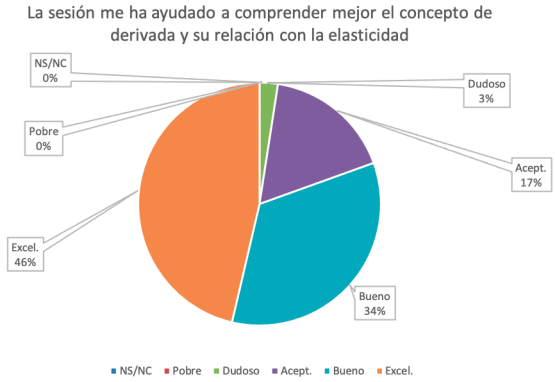
Conclusiones

A la vista de los resultados presentados en la sección anterior, podemos afirmar que los alumnos han comprendido mejor la relación existente entre las derivadas y la elasticidad. Asimismo, los estudiantes manifiestan que después de estas experiencias logran relacionar mejor las asignaturas de Matemáticas I e Introducción a la Economía, lo cual era uno de los principales objetivos que nos marcamos al inicio del curso académico.

Para la consecución del primer objetivo fue muy importante la visualización-representación de dichos conceptos, gracias al uso del *software* GeoGebra. Es importante recalcar nuevamente las múltiples aplicaciones y ventajas que presenta la herramienta **deslizador**, la cual permite realizar gráficas interactivas. Además, el propio alumnado participó activamente durante las clases, ya que ellos mismos podían modificar las gráficas con el deslizador y ver simultáneamente el resultado. Por tanto, podemos afirmar que se obtuvieron de manera satisfactoria tanto el segundo como el tercer objetivo.

También podemos confirmar que el alumnado se siente más motivado y satisfecho después de esta experiencia. Este hecho junto con las sugerencias aportadas por los alumnos nos hace plantearnos la continuidad de esta estrategia docente en el curso siguiente. Es posible también relacionar otros conceptos como, por ejemplo, el excedente del consumidor y el exce-





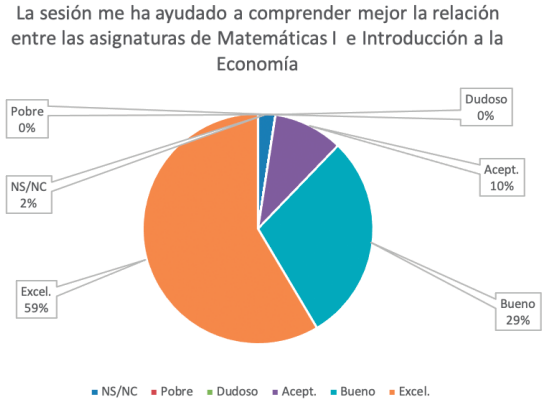


Figura 5. Principales resultados del cuestionario de satisfacción

dente del productor con el concepto de integral. Esta experiencia también puede ser aplicable a otros cursos académicos del grado y a otras asignaturas.

En resumen, las conclusiones que hemos obtenido el profesorado son altamente positivas. Creemos que la aplicación de experiencias colaborativas puede contribuir a mejorar significativamente el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Anderson, R. S., y B. W. Speck (1998), «Oh what a difference a team makes: Why team teaching makes a difference», *Teaching and teacher education*, n.º 14(7), 671-686.

Bauwens, J., y J. J. Hourcade (1991), «Making coteaching a mainstreaming strategy», *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth*, n.º 35(4), 19-24.

— (1995), *Cooperative teaching: Rebuilding the schoolhouse for all students*, Pro-Ed, Austin.

Bauwens, J., J. J. Hourcade y M. Friend (1989), «Cooperative teaching: A model for general and special education integration». *Remedial and Special Education*, n.º 10(2), 17-22.

Boulay, M. R. (2005), *Teacher content and pedagogical learning in secondary team teaching settings* (tesis doctoral), Boston University.

Buckley, F. J. (1999), *Team teaching: what, why, and how?*, Sage Publications, Thousand Oaks.

Crawford, R., y L. E. Jenkins (2018), «Making pedagogy tangible: Developing skills and knowledge using a team teaching and blended learning approach», *Australian Journal of Teacher Education*, n.º 43(1), 8.

Donnison, S., D. Edwards, D. Itter, D. Martin y Z. Yager (2009), «Reflecting on improving our practice: Using collaboration as an approach to enhance first year transition in higher education», *Australian Journal of Teacher Education*, n.º 34(3), 2.

Drabekova, J., y S. Švecova (2015), «Solving the Microeconomics Problems by Using the Tools of GeoGebra», en *Proceedings ICABR*, 235-240.

Hohenwarter, M., J. Hohenwarter, Y. Kreis y Z. Lavicza (2008), «Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra», en *11th International Congress on Mathematical Education,* Monterrey.

Kerin, M., y C. Murphy (2015), «Exploring the impact of coteaching on pre-service music teachers», *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, n.º 43(4), 309-323.

Majerek, D. (2014), «Application of GeoGebra for teaching mathematics», *Advances in science and technology research journal*, n.º 8(24), 51-54.

Mansell, J. (2006), «Team teaching in Further Education», *Educational Research*, 17(1), 19-26.

Murphy, C., y K. Scantlebury (2010), «Introduction to coteaching», en C. Murphy y K. Scantlebury, *Coteaching in International Contexts*, Springer, Dordrecht, 1-7.

Roth, W. M., y K. G. Tobin (2002), *At the elbow of another: Learning to teach by coteaching,* Peter Lang Pub Incorporated, Nueva York.

Shibley, I. A. (2006), «Interdisciplinary team teaching: Negotiating pedagogical differences», *College teaching*, n.º 54(3), 271-274.

Wenger, M. S., y M. J. Hornyak (1999), «Team teaching for higher level learning: A framework of professional collaboration», *Journal of Management Education*, n.º 23(3), 311-327.

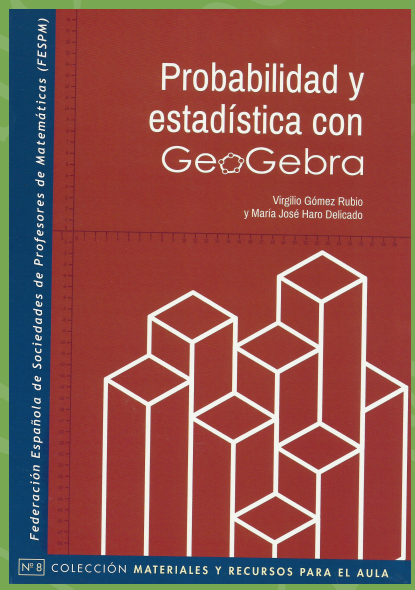
Mónica Maldonado Devis
Centro Universitario EDEM
<mmaldonado@edem.es>

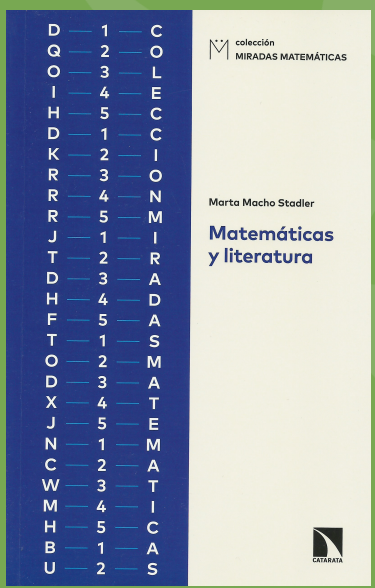
Víctor Manuel Ortiz Sotomayor
Centro Universitario EDEM
<vsotomayor@edem.es>

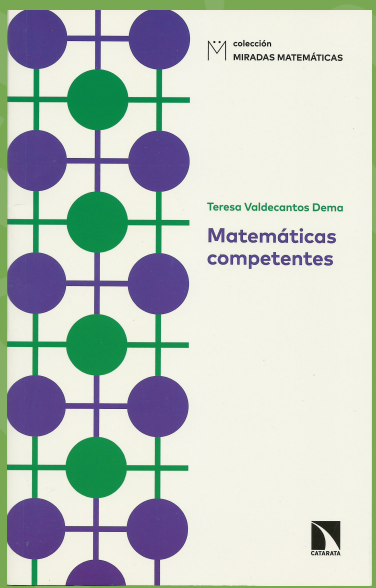
Servicio de Publicaciones de la FESPM

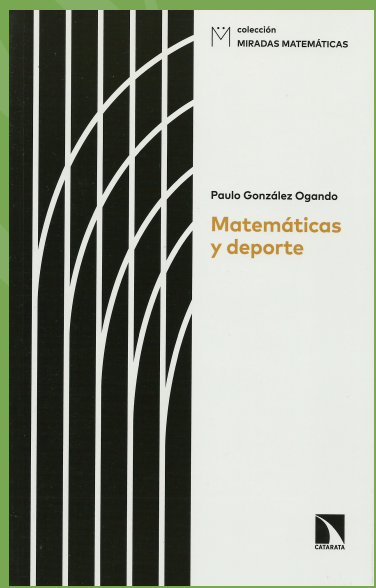
<publicaciones@fespm.es>











Luces y sombras del álgebra temprana en el currículo español (3-12 años)

Ángel Alsina Pastells
Nataly Pincheira Hauck

SUMA+ núm. 99
pp. 17-26
Artículo recibido en *Suma* en abril de 2020 y aceptado en diciembre de 2020

Se compara la presencia del álgebra temprana en los currículos españoles de Educación Infantil y Primaria derivados de las tres últimas leyes de educación (LOE, LOMCE y LOMLOE) con el currículo americano, por ser un referente internacional. Los resultados muestran que en Educación Infantil se incluyen relaciones y cambios, pero se omiten los patrones; mientras que en Educación Primaria se incluyen relaciones, patrones, uso de variables, uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos, pero se omite la comprensión del cambio. Se concluye que es necesario incorporar estos conocimientos y diseñar programas de formación para fomentar la alfabetización algebraica.

Palabras clave: Álgebra temprana, Currículo, Alfabetización algebraica, Educación Infantil, Educación Primaria.

Lights and shadows of early algebra in the Spanish curriculum (3-12 years) // The presence of early algebra in the Spanish curricula for Early Childhood and Primary Education derived from the last three education laws (LOE, LOMCE and LOMLOE) is compared with the American curriculum, as it is an international benchmark. The results show that relationships and changes are included in Early Childhood Education, but patterns are omitted; while in Primary Education relationships, patterns, use of variables are included, use of algebraic symbols and mathematical models, but the understanding of changes is omitted. It is concluded that it is necessary to incorporate this knowledge and design training programs to promote algebraic literacy.

Keywords: Early algebra, Curriculum, Algebraic literacy, Early Childhood Education, Primary Education.

En las últimas décadas se ha acuñado el término *Early-Algebra*, al que a partir de ahora nos referiremos como álgebra temprana, que intenta introducir modos de pensamiento algebraico desde los primeros niveles de escolarización (Carraher y Schliemann, 2019; Kaput, 2008). Esta nueva corriente no se considera como una asignatura, sino como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas (Carpenter, Franke y Levi 2003; Kaput, 2000).

Dada la importancia del álgebra temprana por su destacado papel en el desarrollo de habilidades como la generalización, los currículos de países como Estados Unidos, Australia, Singapur o Chile, entre otros, han ido incorporando conocimientos de naturaleza algebraica desde las primeras edades como un estándar de contenido más (Pincheira y Alsina, 2021).

En España, algunos autores han empezado a impulsar la presencia del álgebra temprana desde la Educación

Infantil y a lo largo de toda la Educación Primaria, con el propósito de que el alumnado de estas dos etapas vaya desarrollando su pensamiento algebraico y adquiera los conocimientos necesarios para abordar el álgebra propiamente dicha a partir de la Educación Secundaria (Alsina, 2019*a*, 2019*b*, 2019*c*; Molina, 2009; Zapatera, 2018). Considerando esta nueva realidad, nos preguntamos cómo se trata el álgebra temprana en el currículo español vigente de Educación Infantil y de Educación Primaria.

Desde este prisma, en este artículo se analiza la presencia del álgebra temprana en el currículo español en las primeras etapas y se establece una comparación con el currículo de Estados Unidos, por ser un referente a nivel internacional. A partir de los datos obtenidos se pretenden detectar las principales fortalezas y debilidades del planteamiento curricular español actual para hacer propuestas curriculares mejoradas en el futuro que contribuyan a desarrollar la alfabetización algebraica del alumnado.

El álgebra temprana

El álgebra temprana, como se ha indicado, emerge como resultado de diversos estudios que plantean la necesidad de introducir el desarrollo del pensamiento algebraico desde las primeras edades y eliminar así la tardía incorporación del estudio del álgebra en la Educación Secundaria (Carpenter y otros, 2003; Kaput 1998). Kaput (2000) denomina a este proceso como «la algebrización» del currículo, es decir, la integración del razonamiento o pensamiento algebraico a lo largo de toda la escolaridad. En la tabla 1 se observa que los conocimientos algebraicos se desarrollan en tres fases durante la Educación Infantil y Primaria:

	Pre-K-2 (3-8 años)	*3-5 (9-11 años)*
Comprender patrones, relaciones y funciones	Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por el tamaño, la cantidad y otras propiedades. Reconocer, describir y ampliar patrones tales como secuencias de sonidos y formas o sencillos patrones numéricos, y pasar de una representación a otra. Analizar cómo se generan patrones de repetición y de crecimiento.	Describir y extender patrones geométricos y numéricos y hacer generalizaciones acerca de ellos. Representar y analizar patrones y funciones, verbalmente y mediante tablas y gráficas.
Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos	Ilustrar los principios generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, usando números. Usar representaciones concretas, pictóricas y verbales, para desarrollar la comprensión de notaciones simbólicas inventadas y convencionales.	Identificar propiedades como la conmutatividad, la asociatividad y distributividad, y emplearlas en el cálculo con números naturales. Representar la idea de variable como cantidad desconocida, por medio de una letra o un símbolo. Expresar relaciones matemáticas mediante ecuaciones.
Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender las relaciones cuantitativas	Modelizar situaciones relativas a la adición y sustracción de números naturales, utilizando objetos, dibujos y símbolos.	Modelizar situaciones-problema con objetos, y usar representaciones como gráficas, tablas y ecuaciones para extraer conclusiones.
Analizar el cambio en diversos contextos	Describir cambios cualitativos, como «ser más alto». Describir cambios cuantitativos, como el aumento de estatura de un alumno en dos pulgadas en un año.	Investigar de qué manera el cambio que experimenta una variable se relaciona con el de una segunda variable. Identificar y describir situaciones con tasas de cambio constantes o variables, y compararlas.

Tabla 1. Estándares de contenido de álgebra temprana para Educación Infantil y Primaria (NCTM, 2003: 402)

— En los primeros niveles se introduce el trabajo con patrones y relaciones, a partir de la manipulación de objetos y posteriormente utilizando secuencias de sonidos y secuencias numéricas. Además, se da paso a las representaciones para desarrollar la comprensión de simbología y modelizar situaciones de adición y sustracción, hasta alcanzar la descripción de cambios tanto cualitativos como cuantitativos.
— En los niveles intermedios se fomenta la construcción de patrones numéricos y geométricos y el uso de funciones por medio de tablas y gráficas.
— Finalmente, en los últimos niveles se introduce el concepto de variable como cantidad desconocida y se exploran relaciones mediante ecuaciones. Además, se introduce la modelización de situaciones usando representaciones de tipo gráfico y tabular para extraer conclusiones, así como el análisis de situaciones de cambios que experimentan dos variables.

Alsina (2019*a*, 2019*b*), siguiendo estas directrices internacionales, organiza los contenidos vinculados al álgebra temprana en Educación Infantil a partir de una adaptación del criterio usado por Canals (1989) para los contenidos de «lógica» en Educación Infantil, y que se utilizó también en Alsina (2006) para los contenidos de «razonamiento lógico-matemático»:

— Identificar objetos algebraicos: se incluyen conocimientos asociados al álgebra temprana como por ejemplo la identificación de algunos atributos de objetos y materiales o bien las agrupaciones de elementos por distintos criterios.
— Relacionar objetos algebraicos: se incluyen los principales tipos de relaciones (de equivalencia y orden, principalmente, junto con las correspondencias) y los patrones.
— Operar objetos algebraicos: se incluye el análisis de los cambios, en un sentido amplio.

Como dice Alsina (2019*a*, 2019*b*), en esa categorización se asume una concepción pragmática (operacional) del significado de dichos conocimientos, que implica concebir a los objetos matemáticos como herramientas que surgen y se desarrollan a través de su uso.

Como continuidad, y con el propósito de presentar una progresión del álgebra temprana durante las etapas de Educación Infantil y Primaria, Alsina (2019*c*) presenta una propuesta de organización de los contenidos de álgebra temprana para la etapa de Educación Primaria (6-12 años) con base en tres grupos de conocimientos que denomina «conocimientos importantes de álgebra temprana de 6 a 12 años»:

— La comprensión de distintos tipos de relaciones (de equivalencia, de orden, etc.) y de patrones (de crecimiento, de decrecimiento, etc.).
— El uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas.
— La comprensión del cambio.

Posteriormente, Pincheira y Alsina (2021), a partir de un análisis comparativo de la presencia del álgebra temprana en los currículos de infantil y primaria de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile, proponen las categorías de conocimientos algebraicos que se detallan en la tabla 2.

Educación Infantil (3-6 años)	*Educación Primaria (6-12 años)*
Reconocimiento de atributos para establecer relaciones (de equivalencia, orden, etc.). Patrones de repetición: Identificación, construcción y representación del patrón. Descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.	Comprensión de distintos tipos de relaciones (de equivalencia, orden, etc.) y de patrones (de crecimiento, decrecimiento, etc.). Uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas. Comprensión del cambio. Uso de variables para determinar una constante o incógnita.

Tabla 2. Conocimientos de álgebra temprana para alumnado de 3 a 12 años (Pincheira y Alsina, 2021)

Considerando estos antecedentes, nos proponemos analizar el grado de presencia del álgebra temprana en los currículos españoles de Educación Infantil y Primaria y compararlo con el currículo americano para detectar fortalezas y debilidades y, sobre todo, para poder hacer propuestas curriculares mejoradas en el futuro a partir de las debilidades detectadas.

La presencia del álgebra temprana en el currículo español de Educación Infantil y Primaria

De acuerdo con el propósito de este artículo, se ha diseñado una investigación cualitativa a partir del análisis de contenido de los documentos curriculares españoles de Educación Infantil y Primaria. Krippendorff (1990: 28) define el análisis de contenido como «una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto». Así pues, esta técnica busca proporcionar conocimientos, nuevas interacciones y una representación de los hechos, en nuestro caso, el progreso del álgebra temprana a nivel curricular.

Para realizar el estudio se han considerado tres fases:

— Seleccionar las unidades de muestreo, en nuestro caso las orientaciones curriculares vigentes de matemáticas de Educación Infantil y Primaria de España.
— Identificar los contenidos u objetivos de aprendizaje que se encuentran vinculados de manera implícita o explícita al álgebra temprana.
— Sistematizar la información por medio de tablas y gráficos, cuya lectura permita:
  • analizar la presencia del álgebra temprana en los currículos analizados;
  • documentar y comprender su evolución;
  • establecer semejanzas y diferencias.

EL ÁLGEBRA TEMPRANA EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN INFANTIL

Tanto en la Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil como en el Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil, los contenidos matemáticos que se proponen para la Educación Infantil se sitúan prioritariamente en el área 2 del conocimiento del entorno, a través de la cual se espera que los niños interactúen e identifiquen elementos del medio físico, detectando semejanzas y diferencias, representando atributos de elementos y colecciones, estableciendo relaciones de agrupamiento, clasificación, orden y cuantificación, y pasando de este modo de la manipulación a la representación, desde donde se originan estas habilidades. Sin embargo, considerando que el currículo no pretende encasillar las asignaturas escolares tradicionales en una única área, los contenidos matemáticos se encuentran presentes también en las dos áreas restantes, aunque con una presencia algo inferior. Desde este punto de vista, en la tabla 3 se presentan los contenidos del 2.º ciclo de Educación Infantil (3-6 años) que, siguiendo el análisis de contenido, hacen alusión a conocimientos vinculados al álgebra temprana.

A partir del análisis de la tabla 3 se observa que dichos contenidos hacen referencia principalmente a la identificación de las características sensoriales de los objetos a partir de su exploración con los diferentes sentidos; la comparación de estas características sensoriales a partir de dos tipos de relaciones básicas: clasificaciones y ordenaciones; y la observación de los cambios que se producen en el propio cuerpo, los objetos y en el entorno inmediato. Sin embargo, no se hace ninguna alusión a los patrones.

EL ÁLGEBRA TEMPRANA EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

El Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, organiza las matemáticas en cinco bloques de contenido:

— Procesos, métodos y actitudes matemáticas, que pretende ser un pilar fundamental para los bloques restantes.
— Números.
— Medida.

— Geometría.
— Estadística y probabilidad.

En el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, en cambio, aparece un bloque denominado sentido algebraico, junto con los bloques de sentido numérico, de la medida, espacial y estocástico. Así, pues, para determinar la presencia del álgebra temprana, en el Real Decreto 126/2014 se han analizado los contenidos y en el Real Decreto 157/2022 los saberes básicos (ver tablas 4 y 5).

Los contenidos de la tabla 4 muestran que el estudio del álgebra se ve incorporado de forma tácita y superficial tanto en el primer bloque al planificar procesos de resolución de problemas, como en los otros cuatro bloques al promover relaciones de equivalencia y orden, principalmente. En relación a los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables vinculados con el álgebra temprana, se indica que el alumnado debe ser capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales. Sin embargo, si se compara esta finalidad con

	Orden ECI/3960/2007	*Real Decreto 95/2022*
Área 1	Percepción de los cambios físicos propios y de su relación con el paso del tiempo. Identificación y utilización de los sentidos, expresión verbal de sensaciones y percepciones. Gusto e interés por la exploración sensorio-motriz para el conocimiento personal, el de los demás y la relación con los objetos en situaciones de aula que favorezcan la actividad espontánea. Exploración y valoración de las posibilidades y limitaciones perceptivas, motrices y expresivas propias y de los demás. Juegos motores, sensoriales, simbólicos y de reglas.	Manejar diferentes objetos, útiles y herramientas en situaciones de juego y en la realización de tareas cotidianas, mostrando un control progresivo y de coordinación de movimientos de carácter fino. Imagen global y segmentaria del cuerpo: características individuales y percepción de los cambios físicos.
Área 2	Percepción de semejanzas y diferencias entre los objetos. Discriminación de algunos atributos de objetos y materias. Interés por la clasificación de elementos. Relaciones de pertenencia y no pertenencia. Identificación de cualidades y sus grados. Ordenación gradual de elementos. Detección de algunas características, comportamientos, funciones y cambios en los seres vivos. Observación, discriminación y clasificación de animales y plantas. Observación de los fenómenos del medio natural (alternancia de día y noches, lluvia…) y valoración de la influencia que ejercen en la vida humana.	Establecer distintas relaciones entre los objetos a partir de sus cualidades o atributos, mostrando curiosidad e interés. Cualidades o atributos de objetos y materiales. Relaciones de orden, correspondencia, clasificación y comparación. Influencia de las acciones de las personas en el medio físico y en el patrimonio natural y cultural. El cambio climático.
Área 3	Exploración de las propias posibilidades expresivas y comunicativas en relación con objetos y materiales. Ajuste corporal y motor ante objetos de diferentes características con finalidad expresiva o comunicativa.	

Tabla 3. Contenidos vinculados al álgebra temprana en la Orden ECI/3960/2007 y en el Real Decreto 95/2022

los contenidos de la tabla 4 se observa un desajuste, ya que dicha finalidad no se ve reflejada de manera inherente en los contenidos vinculados al álgebra temprana.

En el Real Decreto 157/2022, (tabla 5) el sentido algebraico se asocia al lenguaje en el que se comunican las matemáticas, sin explicitar su importante papel en el desarrollo de otras habilidades asociadas al pensamiento algebraico como la predicción, la generalización, etc. Por cuestiones organizativas, se incluyen también el modelo matemático y el pensamiento computacional, que no son exclusivas de este sentido. Si se analizan más detenidamente los saberes propios del sentido algebraico, se observa que se mencionan algunas actividades de modelado de patrones y diversas cuestiones vinculadas al pensamiento funcional, pero no se menciona explícitamente la idea de cambio.

En síntesis, pues, puede concluirse que en el currículo de Educación Primaria se observa un avance en el decreto 157/2022 al incluir de forma explícita el álgebra temprana y cultivar hábitos de pensamiento que respondan a la estructura que subyace a las matemáticas escolares como plantean Blanton y Kaput (2003), es decir, propiciar que los modos de pensamiento algebraico surjan a partir de las matemáticas propias que plantea el currículo, en este caso, desde los diversos ejes de contenido.

COMPARACIÓN DE LA PRESENCIA DEL ÁLGEBRA ENTRE EL CURRÍCULO DE ESPAÑA Y DE ESTADOS UNIDOS

Considerando las categorías de la tabla 2, seguidamente se realiza un breve análisis comparativo acerca de la presencia del álgebra en los currículos de España y Estados Unidos, con el propósito de detectar semejanzas y diferencias y, sobre todo, para poder mejorar la propuesta curricular española a partir de las debilidades detectadas, como ya se ha indicado.

La figura 1 muestra las diferencias respecto a la presencia de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en la Educación Infantil en España y Estados Unidos.

Bloque	
Números	Orden numérico. Utilización de números ordinales.
	Comparación de números.
	Ordenación de conjuntos numéricos.
	Proporcionalidad directa.
	Construcción de series ascendentes y descendentes.
Medida	Equivalencias entre medidas de capacidad y volumen.
	Comparación y ordenación de medidas de una misma magnitud.
	Comparación de superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición.
	Equivalencias y transformaciones entre horas minutos y segundos.
	Equivalencias entre monedas y billetes.
Geometría	Clasificación de triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos.
	Clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados. Clasificación de los paralelepípedos.
	Regularidades y simetría: reconocimiento de regularidades.
Estadística y probabiliad	Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos.

Tabla 4. Contenidos relacionados con el álgebra temprana para la Educación Primaria (Real Decreto 126/2014)

En ambos currículos se indican contenidos sobre el reconocimiento de atributos para establecer relaciones, con una presencia muy superior en el currículo español, y sobre la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos, con mayor presencia en el currículo americano. La principal diferencia, como ya se ha avanzado, es la ausencia de contenidos sobre patrones en el currículo español, mientras que en el americano su presencia es del 25 %.

	Primer ciclo	*Segundo ciclo*	*Tercer ciclo*
1. Patrones	Estrategias para la identificación, descripción oral, descubrimiento de elementos ocultos y extensión de secuencias a partir de las regularidades en una colección de números, figuras o imágenes.	Identificación, descripción verbal, representación y predicción razonada de términos a partir de las regularidades en una colección de números, figuras o imágenes.	Estrategias de identificación, representación (verbal o mediante tablas, gráficos y notaciones inventadas) y predicción razonada de términos a partir de las regularidades en una colección de números, figuras o imágenes. Creación de patrones recurrentes a partir de regularidades o de otros patrones utilizando números, figuras o imágenes.
2. Modelo matemático	Proceso guiado de modelización (dibujos, esquemas, diagramas, objetos manipulables, dramatizaciones...) en la comprensión y resolución de problemas de la vida cotidiana.	Proceso pautado de modelización usando representaciones matemáticas (gráficas, tablas...) para facilitar la comprensión y la resolución de problemas de la vida cotidiana.	Proceso de modelización a partir de problemas de la vida cotidiana, usando representaciones matemáticas.
3. Relaciones y funciones	Expresión de relaciones de igualdad y desigualdad mediante los signos = y ≠ entre expresiones que incluyan operaciones. Representación de la igualdad como expresión de una relación de equivalencia entre dos elementos y obtención de datos sencillos desconocidos (representados por medio de un símbolo) en cualquiera de los dos elementos.	Relaciones de igualdad y desigualdad, y uso de los signos = y ≠ entre expresiones que incluyan operaciones y sus propiedades. La igualdad como expresión de una relación de equivalencia entre dos elementos y obtención de datos sencillos desconocidos (representados por medio de un símbolo) en cualquiera de los dos elementos. Representación de la relación «mayor que» y «menor que», y uso de los signos < y >.	Relaciones de igualdad y desigualdad y uso de los signos < y >. Determinación de datos desconocidos (representados por medio de una letra o un símbolo) en expresiones sencillas relacionadas mediante estos signos y los signos = y ≠.
4. Pensamiento computacional	Estrategias para la interpretación de algoritmos sencillos (rutinas, instrucciones con pasos ordenados…).	Estrategias para la interpretación y modificación de algoritmos sencillos (reglas de juegos, instrucciones secuenciales, bucles, patrones repetitivos, programación por bloques, robótica educativa...).	Estrategias para la interpretación, modificación y creación de algoritmos sencillos (secuencias de pasos ordenados, esquemas, simulaciones, patrones repetitivos, bucles, instrucciones anidadas y condicionales, representaciones computacionales, programación por bloques, robótica educativa...).

Tabla 5. Saberes básicos correspondientes al sentido algebraico para la Educación Primaria (Real Decreto 157/2022)

La figura 2, muestra las diferencias relacionadas con la presencia de los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en Educación Primaria en los currículos de Estados Unidos y España.

La principal diferencia entre ambos currículos es que, mientras en Estados Unidos se tratan conocimientos algebraicos referentes a los cuatro grupos de conocimientos importantes que caracterizan este bloque, en el Real Decreto 126/2014 únicamente se tratan de forma colateral dos de ellos (distintos tipos de relaciones y patrones y el uso de variables) y en el Real Decreto 157/2022 se agrega el uso de símbolos y modelos matemáticos, lo cual pone de manifiesto algunas carencias. De forma más concreta, aunque los datos obtenidos muestran una presencia muy superior del conocimiento vinculado a la comprensión de distintos tipos de relaciones y patrones en el currículo de España que en el de Estados Unidos (92,9% y 62,4% frente al 23,1%), en el currículo español se hace una referencia escasa al uso de variables (7,1% y 18,8%) y los contenidos referentes al uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas (18,8%), omitiéndose los contenidos vinculados a la comprensión del cambio, lo que dificulta que los alumnos puedan abordar de manera comprensiva el álgebra cuando accedan a la Educación Secundaria.

Consideraciones finales

En este artículo se ha realizado un análisis de la evolución de la presencia del álgebra temprana en el currículo español de Educación Infantil y Primaria (3 a 12 años) en las tres últimas leyes de educación (LOE, LOMCE y LOMLOE) y se ha comparado con el currículo norteamericano (NCTM, 2003).

Para realizar dicho análisis se han considerado los conocimientos que caracterizan el álgebra temprana en Educación Infantil y Primaria, de acuerdo con el estudio preliminar de Pincheira y Alsina (2021) a partir del análisis de los currículos de Estados Unidos, Australia, Singapur y Chile, que son cuatro países en los que se trata explícitamente el álgebra temprana en los currículos de las primeras etapas.

En relación a la Educación Infantil, los conocimientos vinculados al álgebra temprana se organizan con base en las siguientes categorías:

a) Reconocimiento de atributos para establecer relaciones.
b) Patrones de repetición: Identificación, construcción y representación del patrón.
c) Descripción de cambios cualitativos y cuantitativos.

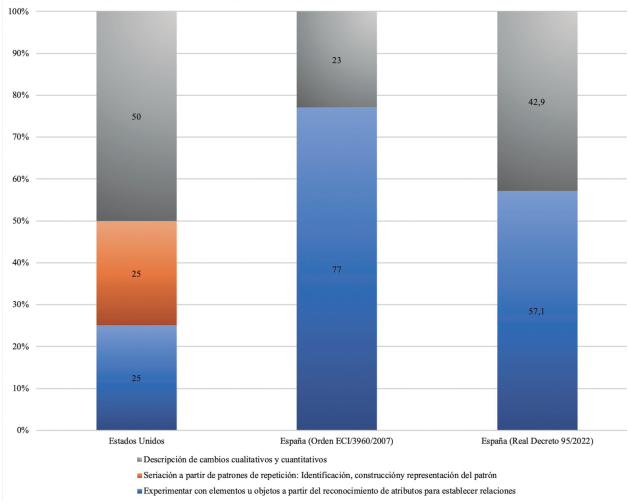


Figura 1. Comparación de los conocimientos del álgebra temprana en Educación Infantil entre Estados Unidos y España

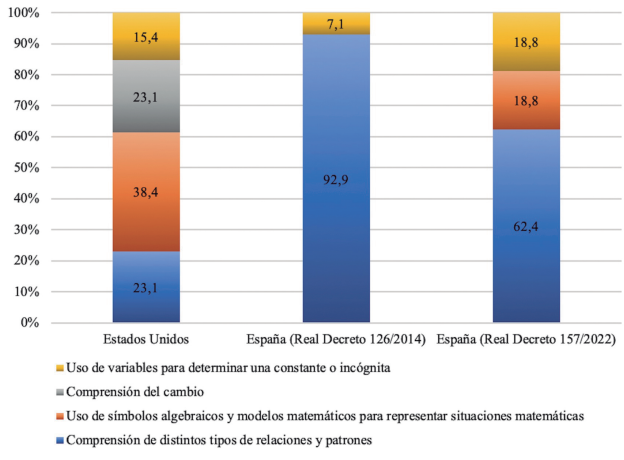


Figura 2. Comparación de los conocimientos del álgebra temprana en Educación Primaria entre Estados Unidos y España

El análisis de las orientaciones curriculares españolas de Educación Infantil ha puesto de manifiesto que los conocimientos referidos al álgebra temprana se vinculan con las categorías «a» y «c», pero se omiten los conocimientos de la categoría «b» que tiene relación con los patrones, a pesar de que diversos autores los consideran como un trampolín para promover la generalización, la anticipación, la conjetura, la justificación, la representación y el inicio del uso preciso del lenguaje matemático (Clements y Sarama, 2015; Papic, Mulligan y Mitchelmore, 2011; entre otros).

En Educación Primaria, los conocimientos vinculados con el álgebra temprana se organizan con base en las cuatro categorías siguientes:

a) La comprensión de distintos tipos de relaciones (de equivalencia, de orden, etc.) y de patrones (de crecimiento, de decrecimiento, etc.).
b) El uso de símbolos algebraicos y modelos matemáticos para representar situaciones matemáticas.
c) La comprensión del cambio.
d) El uso de variables para determinar una constante o incógnita.

Nuevamente, el análisis realizado ha permitido evidenciar ausencias importantes en el currículo español, puesto que únicamente se explicitan conocimientos vinculados a las categorías «a» y «d» en el Real Decreto 126/2014. En el Real Decreto 157/2022 se agregan conocimientos sobre la categoría «b», sin embargo, se siguen omitiendo los conocimientos en relación con la categoría «c», que sí están presentes en el currículo americano y en otras propuestas curriculares avanzadas. En este sentido, en los nuevos decretos se observa un esfuerzo por avanzar hacia el desarrollo de una estructura y desarrollo del currículo, no obstante, aún existe una falta de contenidos vinculados con el álgebra temprana.

En síntesis, estas sombras de los currículos españoles de Educación Infantil y Primaria repercuten directamente en lo que aprenden los alumnos de 3 a 12 años y, sobre todo, en lo que no aprenden. Desde este prisma, va a ser necesario ofrecer actividades de formación tanto a los futuros maestros como al profesorado en activo que permitan garantizar el dominio del conocimiento disciplinar necesario, es decir, los conocimientos importantes sobre álgebra temprana, junto con los conocimientos didácticos imprescindibles para promover su aprendizaje comprensivo y eficaz.

Consideramos que el dominio de los conocimientos didáctico-disciplinares del profesorado de Educación Infantil y Primaria en relación al álgebra temprana, son luces imprescindibles para dotar a los alumnos de estas etapas educativas de una alfabetización algebraica y, de este modo, poder acceder a la Educación Secundaria con una base sólida para abordar, comprender y usar de forma eficaz los conocimientos algebraicos.

Agradecimientos

Este artículo fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, folio n.º 72200447.

Referencias bibliográficas

Alsina, Á. (2006), *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*, Octaedro-Eumo, Barcelona.
— (2019*a*), «Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil», *EDMA 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, n.º 8(1), 1-19.
— (2019*b*), «Estableciendo niveles de adquisición de conocimientos matemáticos importantes de 3 a 6 años: Rúbrica ACMI 3-6», *EDMA 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, n.º 8(1), 1-19.
— (2019*c*), *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*, Graó, Barcelona.
— (2020), «Itinerario de enseñanza para el álgebra temprana», *Revista Chilena de Educación Matemática*, n.º 12(1), 5-20.
Blanton, M. L., y J. J. Kaput (2003), «Developing elementary teachers' algebra eyes and ears», *Teaching Children Mathematics*, n.º 10(2), 70-77.
Canals, M.ª A. (1989), *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola: I. Parvulari*, Eumo, Vic.

Carpenter, T. P., M. L. Franke y L. Levi (2003), *Thinking mathematically: Integrating arithmetic y algebra in elementary school*, Heinemann, Portsmouth.

Carraher, D. W., y A. D. Schliemann (2019), «Early algebraic thinking and the US mathematics standards for grades K to 5», *Estudio de Educación y Desarrollo*, n.º 42(3), 479-522.

Clements, H.D., y J. SARAMA (2015), *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*, Learning Tools LLC, Jonesborough.

FESPM (2014), *Informe sobre el currículo de la LOMCE*, recuperado de: <https://www.fespm.es/IMG/pdf/Conclusiones_GT_Primaria_FESPM.pdf>.

Kaput, J. (2000), *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by 'algebrafying' the K-12 curriculum*, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth.

— (2008), «What is algebra? What is algebraic reasoning?», en J. Kaput, D.W. Carraher y M. L. Blanton (eds.), *Algebra in the early grades*, Routledge, Nueva York, 5-17.

Krippendorff, K. (1990), *Metodología de análisis de contenido. Teoría y Práctica*, Ediciones Paidós Ibérica, Barcelona.

Molina, M. (2009), «Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria», *PNA*, n.º 3(3), 135-156.

National Council of Teachers of Mathematics (2003), *Principios y estándares para la educación matemática*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla.

Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Infantil, Boletín Oficial del Estado.

Papic, M. M., J. T. Mulligan y M. C. Mitchelmore (2011), «Assessing the development of preschoolers' Mathematical patterning», *Journal for Research in Mathematics Education*, n.º 42(3), 237-268.

Pincheira, N., y Á. Alsina (2021), «Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria», *Educación Matemática,* n.º 33(1), 153-180.

Real Decreto 119/2015, de 23 de junio, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas de Educación Primaria, Boletín Oficial del Estado.

Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas de Educación Infantil, Boletín Oficial del Estado.

Real Decreto 157/2022 de 1 de marzo, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas de Educación Primaria, Boletín Oficial del Estado.

Zapatera, A. (2018), «Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria», *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas*, n.º 97, 51-67.

Ángel Alsina Pastells
Universidad de Girona
<angel.alsina@udg.edu>

Nataly Pincheira Hauck
Universidad de Girona
<natalygoreti@gmail.com>

Algunas propuestas para el aula en torno a la divisibilidad por 8

Rafael Aragón Cueto
Juan Manuel Delgado Sánchez

SUMA+ núm. 99
pp. 27-35
Artículo recibido en *Suma* en agosto de 2020 y aceptado en marzo de 2021

El objetivo principal de este trabajo es el de presentar algunos aspectos sobre algunos criterios de divisibilidad (en especial, del criterio de divisibilidad del 8), a partir de los cuales puedan proponerse actividades en el aula ya sean de tipo lúdico, de profundización en las propiedades de divisibilidad de los números o, incluso, que incentiven la reflexión sobre las estrategias utilizadas al resolver problemas.

Palabras clave: Criterios de divisibilidad, Descomposición factorial en primos, Resolución eficiente de problemas, Propuestas para el aula, Actividades lúdicas.

Some didactic proposals concerning divisibility by 8 // The main purpose of this article is to show some topics related to several divisibility rules (specially, the divisibility rule of 8) from which some activities could be proposed in the class, whether ludic type, or to deepen properties of divisibility of numbers, or even, to encourage the discussion of the strategies in problem solving.

Keywords: Divisibility rules, Factorial decomposition into prime numbers, Efficient problem solving, Strategies in the classroom, Ludic activities.

Los criterios de divisibilidad aparecen en los contenidos tanto del bloque de «Números» del currículo de tercer ciclo de Educación Primaria como en el de «Números y álgebra» de los primeros cursos de la ESO. Por ese motivo es habitual trabajar en el aula de los primeros cursos de la educación secundaria el uso de criterios de divisibilidad sencillos, fundamentalmente como herramienta para conseguir la descomposición en factores primos de números naturales.

Un criterio de divisibilidad será tanto más popular cuanto más fácil sea de recordar y cuanto menor sea la cantidad de cálculos necesarios para emitir una respuesta sobre el número de partida. La dificultad para recordar alguna de las reglas hace que muchos de estos criterios estén en desuso. Si, además de la dificultad de recordar algunos de los criterios, añadimos la rapidez de cálculo que permite el uso de la tecnología en el aula desde tempranas edades, es muy posible que nos cuestionemos la utilidad práctica de los

criterios de divisibilidad, exceptuando quizá los más conocidos (2, 3, 5, 10). Sin embargo, es necesario romper una lanza a favor de los mismos y, tal y como se afirma en Jordan (1965:709):

> [los tests de divisibilidad] se pueden presentar como información aritmética intrigante con la certeza de que muchos docentes pueden encontrar en los mismos una fuente de recursos para la discusión en el aula y de ejercicios valiosos para familiarizar a los estudiantes con la manipulación y propiedades de los números enteros[1].

En este sentido, este trabajo pretende mostrar algunos aspectos de los criterios de divisibilidad que pueden ayudar a los docentes a incentivar y desarrollar en el alumnado actitudes inherentes en el quehacer matemático, como son la toma de decisiones en la resolución de problemas, la reflexión sobre la conveniencia de los procesos utilizados y la perseverancia en la búsqueda de estrategias más eficientes. En particular, en el currículo de Educación Primaria, el tercer objetivo del área de Matemáticas hace referencia a

> […] la necesidad de usar los números en distintos contextos, identificar las relaciones básicas entre ellos, las diferentes formas de representarlas, desarrollando estrategias de cálculo mental y aproximativo, que lleven a realizar estimaciones razonables, alcanzando así la capacidad de enfrentarse con éxito a situaciones reales que requieren operaciones elementales.

Dicho objetivo se cumple de manera efectiva al desarrollar esta propuesta.

Este artículo consta de varios apartados bien diferenciados. Tras esta introducción, realizamos un breve repaso de algunos criterios de divisibilidad, prestando especial atención a la técnica que permite deducirlos. A continuación, nos centramos en el criterio de divisibilidad del 8 y mostramos algunas propiedades que pueden complementar dicho criterio. Finalmente, se reflexiona sobre las posibilidades de experimentar en el aula con algunas de las reglas de divisibilidad mencionadas.

Aunque es ampliamente utilizada, comentamos la notación del artículo. Dados dos números enteros $a \neq 0$ y b, si la división euclídea (con resto) de b entre a es exacta, se dice que b es *divisible* por a (o que b es *múltiplo* de a; o también que a es *divisor* de b); esto será denotado por $a \mid b$ o bien $b = \dot{a}$. Si a no es divisor de b se denotará $a \nmid b$. Consideramos que el número 0 es múltiplo de cualquier número entero[2].

Utilizaremos las letras U, D y C para designar la cifra de las unidades, las decenas y las centenas, respectivamente, del número al que nos estemos refiriendo. Otra de las descomposiciones que consideramos reiteradamente para un número natural n es de la forma $10t + U$ en la que, obviamente, t designa al número que resulta de considerar al número n sin la cifra de las unidades.

Las siguientes propiedades básicas son de uso recursivo a lo largo de todo el artículo pues en ellas se fundamentan muchos de los criterios de divisibilidad que se muestran:

Propiedad 1
Si $a \mid b$, entonces $a \mid b \cdot t$, cualquiera que sea el número entero t.

Propiedad 2
Si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (b \pm c)$.

Repasando algunas técnicas para obtener criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad por 2, 5 y 10 se basan en que dichos números son divisores de 10. Así, si escribimos un número natural cualquiera n de la forma $10t + U$ las propiedades 1 y 2 permiten afirmar que la divisibilidad de n por 2, 5 o 10 solo depende de la divisibilidad de su cifra de las unidades U.

Puesto que $4 \nmid 10$, no puede obtenerse un criterio de divisibilidad por 4 que dependa exclusivamente de la cifra de las unidades del número. Sin embargo, 4 sí es divisor de 100; por lo tanto, si escribimos el número n como $100t + 10D + U$, las propiedades 1 y 2 garantizan que $4 \mid n$ cuando $4 \mid (10D + U)$ lo es, esto es, cuando el número constituido por las dos últimas

cifras es divisible por 4. En consecuencia, la divisibilidad de un número cualquiera por 4 se reduce a conocer los múltiplos de 4 entre 0 y 100, algo bastante asequible.

En el criterio de divisibilidad por 3 es clave tener en cuenta que la división de cualquier potencia de 10 entre 3 da como resto 1. Esta regularidad permite escribir cada potencia de 10 como un múltiplo de 3 más una unidad. En efecto, pongamos que

$$n = a_r 10^r + a_{r-1} 10^{r-1} + \cdots + a_1 10 + a_0.$$

Teniendo en cuenta las propiedades 1 y 2,

$$\begin{gathered} n = a_r(\dot{3}+1) + a_{r-1}(\dot{3}+1) + \cdots + a_1(\dot{3}+1) + a_0 = \\ = a_r\dot{3} + a_{r-1}\dot{3} + \cdots + a_1\dot{3} + a_r + a_{r-1} + \cdots + a_1 + a_0 = \\ = \dot{3} + a_r + a_{r-1} + \cdots + a_1 + a_0 . \end{gathered}$$

De donde se deduce que se puede expresar n como un múltiplo de 3 más la suma de sus cifras. Nuevamente, la propiedad 2 permite afirmar que n es divisible por 3 precisamente cuando lo es la cantidad resultante de sumar todas sus cifras. La justificación del criterio de divisibilidad por 9 es completamente análoga. En el criterio para el 11, la única variante es que, al dividir las potencias de 10 entre 11, la sucesión de restos es $-1, 1, -1, 1, \ldots$; a partir de aquí, se deduce el conocido criterio: un número es divisible por 11 si lo es el número resultante de sumar sus cifras con signos alternados.

Cuando se intenta emular la técnica anterior para la obtención de un criterio de divisibilidad por 7, nos encontramos con el hecho de que los restos de dividir las potencias de 10 entre 7 no muestran la misma regularidad[3], por lo que el criterio resultante es difícil de memorizar e incluso de aplicar para números de cierta entidad. Una técnica alternativa consiste en encontrar alguna propiedad de divisibilidad por 7 operando con un múltiplo concreto suyo y aplicar luego propiedades de divisibilidad que reduzcan la magnitud del número. Por ejemplo, el criterio de divisibilidad por 7 más conocido[4] se basa en la propiedad que afirma que un número natural $n = 10t + U$ es divisible por 7 precisamente si lo es la cantidad $t - 2U$ (por ejemplo, 658 es divisible por 7 porque lo es $65 - 2 \cdot 8 = 49$). La clave de la propiedad anterior reside en que 21 es múltiplo de 7. En efecto, en virtud de las propiedades 1 y 2, tenemos que:

$$7 \mid (10t + U) \Leftrightarrow 7 \mid (10t + U - 21U) \Leftrightarrow 7 \mid [10(t - 2U)].$$

Y, puesto que 7 es primo con 10, la última condición en la cadena anterior es equivalente a que $7 \mid (t - 2U)$.

El criterio de divisibilidad por 7 no es más que una aplicación recursiva de la propiedad anterior, que permite ir trasladando el carácter de «ser divisible por 7» del número inicial a números cada vez menores. Si en el procedimiento anterior cambiamos la resta de $21U$ por la adición de $49U$ se obtiene una propiedad de la misma naturaleza que afirma que $n = 10t + U$ es divisible por 7 precisamente si lo es la cantidad $t + 5U$.

El criterio de divisibilidad por 8

Como potencia que es de 2, la técnica para obtener el conocido criterio de divisibilidad por 8 es análoga a la del 4. Puesto que 8 es divisor de 1000 pero $8 \nmid 10$ y $8 \nmid 100$, se deduce que un número natural n es divisible por 8 precisamente cuando el número constituido por las tres últimas cifras es divisible por 8. Aunque el criterio supone un ahorro más que notable, sobre todo para números con muchas cifras, no termina de ser tan satisfactorio como el del 4, pues el conocimiento de los múltiplos de 8 de tres cifras no es inmediato. Como alternativa a la división de tal número de tres cifras entre 8, podemos utilizar alguna de las siguientes propiedades:

Propiedad 3
Un número $n = 100C + 10D + U$ es divisible por 8 precisamente cuando lo es $4C + 2D + U$.

Por ejemplo, el número 336 es divisible por 8 porque $4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 6 = 24$ es divisible por 8. La justificación de esta propiedad es inmediata teniendo en cuenta que los restos de dividir 100, 101 y 102 entre 8 son 1, 2 y 4.

Propiedad 4
Un número $n=10t+U$ es divisible por 8 precisamente cuando lo es $2t+U$.

Por ejemplo, el número 336 es divisible por 8 porque $2\cdot 33+6=72$ es divisible por 8. Para deducir esta propiedad, basta escribir $10t=8t+2t$ y aplicar propiedades de divisibilidad. En efecto,

$$8 \mid (10t+U) \Leftrightarrow 8 \mid (8t+2t+U) \Leftrightarrow 8 \mid (2t+U).$$

Para números de tres cifras altos, es posible que necesitemos aplicar esta propiedad un par de veces. Así, para averiguar si el número 914 es divisible por 8, utilizamos la propiedad y nos preguntamos si $2\cdot 91+4=186$ es divisible por 8; aplicamos la propiedad por segunda vez a 186 y nos preguntamos si $2\cdot 18+6=42$ es divisible por 8, a lo que respondemos negativamente.

El criterio expuesto en la propiedad 4 puede presentarse de forma alternativa si tenemos en cuenta que, para que un número sea divisible por 8, ha de ser necesariamente par.

Propiedad 4.bis
Un número par $n=10t+2s$ (siendo $U=2s$) es divisible por 8 precisamente cuando $t+s$ es divisible por 4.

Como aplicación, el número 914 no es divisible por 8 porque $91+2=93$ no lo es por 4. Ahora, se puede obtener una respuesta con una única aplicación de la propiedad, pues basta conocer los múltiplos de 4 hasta 103 (máximo valor posible de $t+s$). Aunque este criterio puede demostrarse de forma inmediata utilizando la regla dada en la propiedad 4, puede obtenerse una justificación directa emulando la de la prueba del criterio del 7. En efecto, si escribimos $2s=10s-8s$ y observamos que:

$$8 \mid (10t+2s) \Leftrightarrow 8 \mid [10(t+s)-8s] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8 \mid 10(t+s) \Leftrightarrow 4 \mid 5(t+s).$$

Puesto que 4 es primo con 5, la última condición que aparece en la cadena anterior es equivalente a afirmar que $4 \mid (t+s)$.

Conocer cómo se generan los criterios de divisibilidad habilita para formular nuevas propuestas. Así, por ejemplo, tenemos:

Propiedad 5
Un número $n=100C+10D+U$ es divisible por 8 si y solo si lo es $4C+10D+U$, es decir, si lo es el resultado de sumar el cuádruple de las cifras de las centenas con el número formado por las dos últimas cifras de n (Epebinu, 2017).

La justificación es análoga a la de la propiedad anterior sin más que descomponer $100C=96C+4C$ y teniendo en cuenta que 96 es múltiplo de 8.

En este caso, una única aplicación de la propiedad garantiza en la mayoría de los casos que podremos decidir sobre la divisibilidad por 8: el número 914 no es divisible por 8 porque no lo es $4\cdot 9+14=50$.

Las propiedades expuestas en todas las opciones anteriores pueden extenderse a los restos distintos de cero. Así, por ejemplo, para la propiedad 4, el resto de dividir el número $n=10t+U$ entre 8 coincide con el resto de dividir $2t+U$ entre 8.

Análogamente, para la propiedad 4.bis, el resto de dividir el número $n=10t+2s$ entre 8 coincide con el doble del resto de dividir $t+s$ entre 4

¿Es aconsejable tratar en el aula tantos criterios de divisibilidad?

Tal y como hemos comentado en la introducción, la dificultad para recordar algunos de los criterios expuestos anteriormente (sobre todo si se proporcionan sin justificar) puede hacer que nos cuestionemos su planteamiento en el aula.

En este apartado, se exponen un cuantas ideas para generar actividades que pueden realizarse en el aula en las que la enseñanza de tales criterios, más que un fin en sí mismo, sirve como vehículo para inculcar ciertos aspectos formativos de las matemáticas o, simplemente, para captar la atención del alumnado de forma lúdica.

ESTRATEGIAS EFICIENTES EN LA DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Entre los contenidos de «Divisibilidad», la descomposición en factores primos se trata en el aula en los últimos cursos de primaria o en los primeros de secundaria obligatoria. En una aproximación inicial, la estrategia exclusiva para la descomposición en factores primos de un número natural suele ser la de ir comprobando en orden creciente cuáles son los divisores primos del número. Es en dicha comprobación en la que entran en liza los criterios de divisibilidad y, dado que en este primer estadio la magnitud de los números a descomponer es pequeña (tres o cuatro cifras a lo sumo), los más utilizados por su sencillez son los del 2, 3 y 5.

En la Educación Secundaria Obligatoria y una vez que el alumnado adquiere suficiente destreza en el uso del algoritmo mencionado en el párrafo anterior, parece natural propiciar el análisis crítico de estrategias complementarias que busquen mayor eficiencia en la descomposición en factores primos de un número. Por ejemplo, al descomponer el número 2 200, puede ser interesante comparar el esfuerzo invertido al aplicar directamente dicho algoritmo con el que se realiza si, previamente a la aplicación del mismo, se escribe 2 200 como producto de 22 y de 100. Es en esta segunda etapa de búsqueda de estrategias más adecuadas y alternativas al algoritmo en la que pueden ser útiles los criterios de divisibilidad de números no necesariamente primos, como son los del 4, 8, 9, 10.

El hecho de que el alumnado utilice inicialmente apenas cuatro o cinco criterios no debería ser óbice para informar del resto de criterios. La aplicación de criterios de divisibilidad cada vez más complejos puede plantearse como un proceso gradual en el que, a partir de unos mínimos, cada estudiante marque su ritmo de avance a medida que se familiariza con ellos y descubre sus ventajas. Por ejemplo, al sumar las cifras del número 567 para averiguar si es divisible por 3, tan solo parte del alumnado se percatará de que la suma de sus cifras, 18, es divisible no solo por 3 sino también por 9, por lo que establecerán que 3^2 es uno de los factores que aparecen en la descomposición de 567 y se ahorrarán una división. Algo similar puede plantearse con los criterios relativos a las potencias de 2. En definitiva, una vez que el alumnado ha asimilado los comúnmente considerados «criterios básicos», podemos plantearnos la posibilidad de proponer actividades de profundización que permitan introducir los criterios por «familias» (por ejemplo, la familia de los criterios del 2, 4 y 8; la de los criterios del 3 y 9) en vez de enunciar los criterios como simples listados. En la figura 1 se presenta un diagrama que concreta esta idea para la comprobación (progresiva) de la divisibilidad de un número n por 8 (el último paso utiliza la propiedad 4.bis del apartado anterior). En el mismo, se utiliza la siguiente notación: $n = \overline{\ldots a_3 a_2 a_1 a_0}$ significa que a_0 es la cifra de las unidades de n, a_1 la de las decenas, a_2 la de las centenas, etc. Las líneas de flujo discontinuas indican que el alumno opta por no utilizar todos los criterios de la familia o, dicho de otro modo, ha obtenido una respuesta afirmativa y prefiere realizar la división correspondiente para continuar el procedimiento de descomposición en la parte superior del diagrama, aunque esto suponga realizar más divisiones.

Así, al descomponer el número 3 696, en cuya descomposición aparece 2^4, además de disponer del procedimiento habitual de realizar cuatro divisiones por 2, lo que equivale a quedarse en el primer nivel del

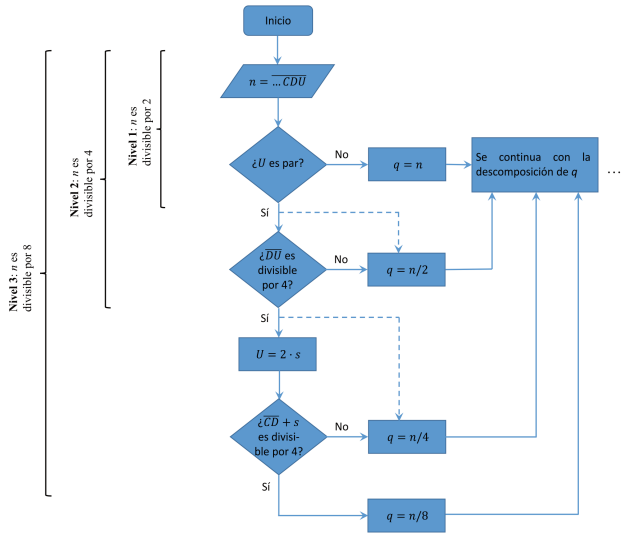


Figura 1. Procedimiento para averiguar si un número n es divisible por 2, 4 u 8.

procedimiento anterior y repetirlo cuatro veces, los criterios expuestos posibilitan que se profundice hasta el tercer nivel del mismo y se efectúe tan solo una división por 8 y otra por 2.

La idea esquematizada en el diagrama de la figura 1 puede presentarse al alumnado en forma de actividad dirigida. La siguiente secuencia muestra un posible esquema de dicha actividad para los cursos iniciales de la ESO. Partimos de la premisa de que los alumnos manejan con soltura los criterios de divisibilidad más conocidos (2, 3, 5 y 10):

- Se pide como ejercicio que descompongan en factores primos el número $1\,232 = 2^4 \cdot 7 \cdot 11$. Para ello, necesitarán hacer un total de seis divisiones.
- A continuación, se muestra el criterio de divisibilidad por 4. Tras realizar varios ejemplos, podemos volver a pedir que descompongan 1 232 pero teniendo en cuenta el criterio que acaba de introducirse.
- Seguidamente, se expone[5] el criterio clásico de divisibilidad por 8. Tras mencionar las dificultades para detectar los múltiplos de 8 de tres cifras, enunciamos y verificamos mediante ejemplos la regla que aparece como propiedad 4.bis en el apartado anterior.
- Explicamos un par de ejemplos para mostrar el procedimiento descrito a través del algoritmo de la figura 1. Por ejemplo, el número $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, que permite llegar hasta el tercer nivel del diagrama; y $396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$, que permite llegar tan solo al segundo nivel.
- Proponemos, a continuación, algunos ejercicios para que los alumnos entrenen el procedimiento al nivel que deseen. Por ejemplo, el número $936 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$, que permite llegar al tercer nivel; $1\,404 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 13$, que permite llegar al segundo nivel pero no al tercero; un posible último ejemplo, $5\,280 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$.

Tal y como hemos mencionado en un ejemplo al principio del apartado, puede elaborarse un procedimiento análogo que aglutine los criterios del 3 y del 9.

UNA PROPUESTA MÁS AMENA

Existe una gran diversidad de actividades lúdicas relacionadas con los contenidos de la divisibilidad entre números naturales. Entre ellas, son especialmente populares los «trucos de adivinación». Basada en otras del mismo estilo, la siguiente pretende ser una actividad de este tipo destinada a atraer la atención del alumnado. En nuestro caso, la clave reside en una de las propiedades observadas al final del apartado anterior sobre el criterio de divisibilidad por 8: el resto de dividir el número $n = 10t + U$ entre 8 coincide con el resto de dividir $2t + U$ entre 8.

El material de la actividad es simple: papel, lápiz y una tabla similar a la que se muestra en la figura 2.

- Se pide a un alumno que escriba en un papel, sin enseñarlo, un número, *M*, de dos cifras.
- A continuación, le indicamos que sume la cifra de las unidades con el doble de la cifra de las decenas de M.
- El alumno debe repetir el paso anterior con el número obtenido hasta que obtenga un número de una única cifra, *S*.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
★	◆	⦸	□	★	✔	∧	∨	★	□
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
⦸	★	✔	∧	◆	∨	★	◆	⦸	◆
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
∧	□	⦸	□	★	∞	⦸	★	∧	◆
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
□	◆	★	⦸	∧	∨	◆	□	✔	⦸
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
★	□	∧	★	◆	∧	⦸	∨	★	□
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
★	◆	∞	□	⦸	□	★	✔	∧	∨
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
□	★	✔	◆	★	∨	⦸	◆	∨	★
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
◆	⦸	★	□	✔	◆	∧	∞	⦸	∨
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
★	✔	◆	∨	∞	□	∞	◆	★	∧
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
□	⦸	★	✔	◆	∨	★	∧	□	⦸

Figura 2

— Seguidamente, le decimos que calcule la resta $M-S$ (puesto que el resto de dividir tanto M como S entre 8 es el mismo, al restar ambos números obtenemos como resultado un múltiplo de 8) y le pedimos que identifique el símbolo correspondiente al resultado de dicha resta en la figura 2.
— La última fase corre de nuestra cuenta: mientras le exigimos que se concentre en la imagen que ha identificado en el paso anterior y, tras cierta dosis de interpretación, hacemos un esbozo del símbolo que hayamos colocado en todas y cada una de las casillas correspondientes a los múltiplos de 8.

UNA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA DIVISIBILIDAD POR 8

Terminamos con una propuesta que permite avanzar un poco más de lo expuesto hasta ahora en aspectos de divisibilidad.

Podemos encontrarnos problemas en los que no es suficiente saber si una división es o no exacta, sino que además es necesario averiguar el resto de dicha división. Dicho problema puede resolverse de forma «gráfica» utilizando lo que se conoce como grafo de divisibilidad. La idea de visualizar la divisibilidad de un número natural como «un paseo por un grafo» hay que atribuírsela a David Wilson, que utiliza dicho recurso para encontrar los restos de las divisiones entre 7 (Wilson, 2010; véase también Morales, 2021). Comentamos a continuación el fundamento de dicha idea para el caso de la divisibilidad por 8.

Al realizar una división euclídea entre dos números naturales para obtener el cociente y el resto, es fundamental conocer la tabla de multiplicar del divisor (o sea, tomamos como referencia los múltiplos de dicho divisor para ir aproximándonos al dividendo). Pero, si tan solo necesitamos conocer el resto de tal división, se puede razonar de otra forma. Así, si el dividendo es un número natural de dos cifras, es suficiente con fijarnos en el resto que resulta al dividir la decena entre el divisor y acumular este resto a la cifra de las unidades. Por ejemplo, para conocer el resto de 31 entre 8, podemos averiguar, en primer lugar, el resto de 30 entre 8 y luego sumar tal resto a la cifra de las unidades ($6+1=7$); es decir, tomamos como referencia la decena inmediatamente inferior (en vez del múltiplo inmediatamente inferior como se hace en la división euclídea). Para sistematizar el primero de los dos pasos anteriores, es útil confeccionar una tabla de restos de las primeras decenas entre el divisor. En el caso del 8:

10 entre 8 sobran 2
20 entre 8 sobran 4
30 entre 8 sobran 6
40 entre 8 sobran 0
50 entre 8 sobran 2
60 entre 8 sobran 4
70 entre 8 sobran 6
80 entre 8 sobran 0.

El procedimiento utilizado puede diseñarse de forma gráfica a través del esquema que comentamos a continuación. Se disponen los posibles restos entre 8 como vértices o nodos de un grafo y se une cada resto con el siguiente mediante una flecha (trazos continuos en la figura 3); puesto que la lista de restos es cíclica, se considera que el resto siguiente al 7 es el 0. Además de las anteriores, se utiliza la tabla de restos para unir mediante una flecha (trazos discontinuos en la figura 3) cada nodo r con el resto que resulta de dividir la decena correspondiente entre 8 (por ejemplo, se une el nodo 5 con el nodo 2 mediante una flecha discontinua pues el resto de 50

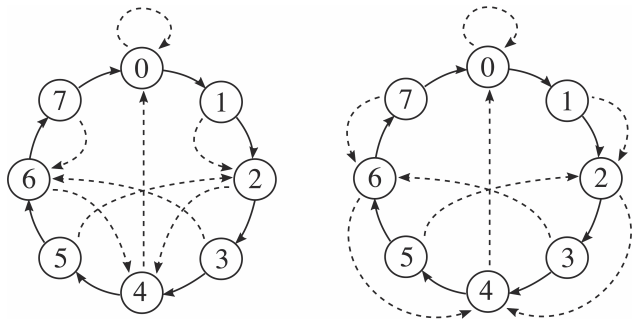


Figura 3. Dos formatos del grafo de divisibilidad del 8

entre 8 es 2). El resultado tiene el aspecto de cualquiera de los dos grafos que aparecen en la figura 3.

De esta forma, para averiguar el resto de un número de dos cifras entre 8 procedemos así:

— Nos fijamos en la cifra de las decenas y, empezando en el nodo 0, damos tantos saltos como nos indique esta cifra a través de las flechas continuas (en el ejemplo del 31, nos situamos en el nodo 3).
— A continuación, nos trasladamos desde este nodo a aquel al que nos lleve la flecha discontinua (al 6, en nuestro ejemplo), que nos indica cuántas unidades nos han sobrado al dividir la decena correspondiente entre 8.
— Nos fijamos ahora en la cifra de las unidades del número de partida y, desde donde terminamos antes, damos tantos saltos como nos indique la cifra de las unidades a través de las flechas continuas (en el ejemplo, desde el nodo 6 damos 1 salto que nos lleva al nodo 7, resto de la división). Este último paso es una traducción gráfica de acumular o sumar las unidades que han sobrado en el paso anterior con la cifra de las unidades del número.

El algoritmo anterior es extensible a números de tres (o más) cifras: tan solo requiere del movimiento adicional correspondiente a la cifra de las centenas por las flechas continuas y, acto seguido, el movimiento hacia el nodo al que nos lleve la flecha discontinua. La justificación es análoga a la expuesta anteriormente, cambiando «decenas» por «centenas» y «unidades» por «decenas». Por ejemplo, para averiguar el resto de 731 entre 8 procederíamos así:

— Movimiento para la centena (7): comenzamos en 0 y llegamos al nodo 7 a través de las flechas continuas y, desde aquí, al nodo 6 a través de la flecha discontinua.
— Movimiento para la decena (3): desde el nodo 6, damos 3 saltos y llegamos al nodo 1 a través de las flechas continuas y, desde aquí, al nodo 2 a través de la flecha discontinua.
— Movimiento para la unidad (1): desde el nodo 2, damos 1 salto y llegamos al nodo 3, que es el resto de la división.

Según se ha comentado al exponer los criterios de divisibilidad por 8, el resto de dividir el número $n = 10t + U$ entre 8 coincide con el resto de dividir $2t + U$ entre 8. Por tanto, el procedimiento en el último ejemplo podría optimizarse algo más aplicando el grafo de divisibilidad a $2 \cdot 73 + 1 = 147$ en vez de a 731.

Conclusiones

Hemos mostrado diversas reglas que permiten averiguar fácilmente cuándo un número de tres cifras es divisible por 8, lo que complementa el criterio ya existente para dicho número. Consideramos que las mismas pueden ser una fuente interesante de ejercicios y actividades para familiarizar a los alumnos con los conceptos de divisibilidad. Como ejemplo, hemos incorporado una de esas reglas a un procedimiento estructurado en tres niveles para averiguar si un número natural es divisible por 2, 4 u 8. Entendemos que la aplicación del procedimiento anterior, si se realiza en los cursos finales de Educación Primaria, debe estar orientada más al sentido lúdico y motivador a disposición del profesorado; si nos referimos a los primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria, el procedimiento expuesto debe ser considerado como una opción para ampliar los recursos matemáticos de nuestros alumnos, siempre atendiendo a la madurez intelectual del grupo de clase.

Desde el punto de vista de su aplicabilidad a largo plazo por parte de los alumnos, es muy posible que el procedimiento descrito en la figura 1 no perdure en su memoria. La experiencia dice que los criterios que sí recuerdan son el del 2, 3, 5 y 10. De lo que sí podemos convencer a algunos de ellos a través del procedimiento descrito es de algo fundamental que siempre se persigue en matemáticas: analizar con profundidad los procedimientos con el objetivo de hacerlos más eficientes[6].

CITA EN GÉNERO FEMENINO

Las referencias a personas o colectivos figuran en el presente texto en género masculino como género gramatical no marcado. Cuando proceda, será válida la cita en género femenino.

Referencias bibliográficas

DICKSON, L. E. (2005) [1919], *History of the theory of numbers*, Dover Publications, Nueva York.

EPEBINU, J. (2017), «New rule for divisibility of 8», *Janetbmath*, disponible en: <http://janetbmath.com/new-rule-for-divisibility-of-8/> (25 de octubre de 2021).

JORDAN, J. Q. (1965), «Divisibility tests of the non-congruence type», *The Mathematics Teacher*, n.º 58 (8), 709–712.

MORALES, G. (2021), *La estructura de los números*, Editorial SM, España.

WILSON, D. (2010), «Divisibility by 7 is a walk on a graph II», *Tanya Khovanova's Math Blog,* disponible en: <https://blog.tanyakhovanova.com/2010/08/divisibility-by-7-is-a-walk-on-a-graph-ii-2/> (25 de octubre de 2021).

Rafael Aragón Cueto
Colegio Balcón de Sevilla
<raarcue@gmail.com>

Juan Manuel Delgado Sánchez
Universidad de Sevilla
<jmdelga@us.es>

1 Traducción de los autores.

2 El caso particular de 0 no es necesario destacarlo si te toma como definición de *múltiplo* la siguiente: *b* es múltiplo de *a* si *b* se obtiene de multiplicar *a* por algún numero entero.

3 La sucesión de restos de dividir 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, … entre 7 son 1, 3, 2, –1, –3, –2, …

4 Según Dickson (2005: 339), la propiedad se atribuye al ruso A. Zbikovski en 1861.

5 Los alumnos pueden deducir de forma progresiva el criterio de divisibilidad del 4. Para ello, basta que comprueben mediante ejemplos que cualquier número acabado en doble cero es múltiplo de 4 y que deduzcan, a partir de esto, que la divisibilidad de un número por 4 únicamente depende del número constituido por sus dos últimas cifras. La misma idea es válida para el criterio del 8.

6 Es posible que hayan visto ya un ejemplo de esto en clase al estudiar el procedimiento para descubrir si un número es o no primo.

JAEM 20

Matemáticas para construir el mundo



Convoca: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Organiza: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al - Khwārizmī"

@20jaem @20jaem Veinte Jaem 20JAEM XX JAEM flickr 20jaemvalencia

https://20.jaem.es/

Destilando el currículo de Educación Primaria

Teresa Serra Santasusana
Carme Burgués Flamarich

SUMA+ núm. 99
pp. 37-48
Artículo encargado por *Suma* en la primavera de 2021 y aceptado en septiembre de 2021

Se presentan las ideas centrales de Matemáticas para la Educación Primaria como una forma de sintetizar y conectar los conceptos contenidos en el currículo, y con el objetivo de facilitar el desarrollo y la evaluación de la competencia matemática.

Palabras clave: Procesos, Conexiones, Ideas centrales.

Distilling the primary education curriculum // The Big Ideas of Mathematics for Primary Education are presented as a way of synthesizing and connecting the concepts contained in the curriculum, and with the aim of facilitating the development and evaluation of mathematical competence.

Keywords: Processes, Connections, Big ideas.

> Un buen conocimiento y una buena salsa se consiguen por el mismo procedimiento, la reducción.
> Jorge Wagensberg

Aprender matemáticas en la educación primaria se parece a lo que hacen los matemáticos: experimentar, reflexionar, deducir, aplicar y expresar simbólicamente (Alsina y otros, 2019). Este punto de vista se relaciona íntimamente con el reto de fomentar el desarrollo de la competencia matemática en todo el alumnado.

¿Pero cómo entendemos dicha competencia? Tal y como afirma Niss (2003) la competencia matemática está relacionada con: la resolución de problemas, la modelización, el razonamiento, la comunicación, la representación, la simbolización...

Las niñas y los niños tendrán que desarrollar en las aulas los procesos asociados a dicha competencia y a la construcción del conocimiento matemático: la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba,

la conexión, la comunicación y la representación. No se trata pues de mostrar por parte de las maestras modelos para que los copien los alumnos; sino de ofrecer contextos de trabajo que se conviertan en motores para que aparezcan los mencionados procesos en su hacer matemáticas cotidiano. En este sentido, el fomento de la conexión entre distintas ideas matemáticas es fundamental.

Es en el transcurso de nuestra experiencia como maestras y como formadoras de maestros que indagamos cómo vislumbrar los grandes nodos del conocimiento matemático en esta etapa ya que nos hemos dado cuenta que, a menudo, resulta difícil para muchos docentes relacionar los distintos procesos asociados a la competencia matemática con los contenidos matemáticos del currículo.

Poder agrupar distintos conceptos matemáticos, destilar dicho currículo para sintetizar puede ser, a nuestro modo de ver, una ayuda para planificar actividades ricas y estimulantes para que los niños y las niñas resuelvan problemas, razonen y prueben, conecten, comuniquen y representen. Aprender no consiste en ir añadiendo nuevos contenidos a otros en forma de lista, sino en relacionar lo nuevo con lo aprendido. Si las maestras y maestros podemos conectar explícitamente distintas ideas matemáticas vamos a facilitar dicha conexión a los alumnos.

Pronto descubrimos que esta inquietud la podíamos compartir con maestras, matemáticas y planificadores de currículos de otros países. Actualmente en Canadá, Nueva Zelanda y algunos territorios australianos se plantean los currículos a partir de las *ideas centrales.* El estudio de sus desarrollos ha representado una gran ayuda para nuestro proyecto (Charles, 2005; Small, 2019).

Las *ideas centrales de Matemáticas* son ideas matemáticas formuladas con una clara intención didáctica, que vinculan distintos aprendizajes de forma coherente y que van a estar, en muchas ocasiones, presentes a lo largo de toda la etapa, pero que van a tener caracterizaciones propias y relacionadas con el currículo de cada ciclo.

En el marco del CESIRE (Centre Educatiu de Suport a la Innovació i Recerca Educativa), la definición de las ideas centrales de Matemáticas en la Educación Primaria en Cataluña ha tomado como punto de partida el currículo vigente. La tarea se ha centrado en buscar los grandes nodos temáticos que pueden vincular distintos conceptos y conectarlos. En este sentido, no se trata de un nuevo currículo, sino de una síntesis del mismo.

Las ideas centrales se han agrupado en torno a los siguientes bloques de contenido: Numeración y operaciones; Relaciones y cambio; Espacio, Forma y medida; Estadística y probabilidad (Burgués y Serra, 2019).

La consulta de dichas ideas centrales se puede llevar a cabo de distintos modos: según los bloques de contenido, y a través de los tres ciclos de la etapa. Se ofrece también una descripción detallada de las *ideas centrales* y una propuesta de actividades para el aula en cada ciclo.

El hecho de tener en mente los grandes nodos temáticos, por parte de las maestras, ayudará a tomar decisiones para acercar las propuestas a cada contexto.

Somos conscientes que la planificación de la acción didáctica a partir de las ideas centrales requiere el enfoque desde una perspectiva más global y contribuirá a que su desarrollo pueda flexibilizarse de acuerdo con la iniciativa matemática que muestren las niñas y los niños en la clase. El hecho de tener en mente los grandes nodos temáticos, por parte de las maestras, ayudará a tomar decisiones para acercar las propuestas a cada contexto.

En el caso del bloque de Numeración y operaciones (Sentido numérico), las ideas centrales elegidas (tabla 1) no son las mismas en los tres ciclos. Algunas de ellas,

aunque con igual enunciado, van creciendo desde el pensamiento aditivo temprano al multiplicativo.

El proceso desde el uso del conteo, que sustenta el pensamiento aditivo temprano, continúa con el uso de la suma y la resta para resolver situaciones y relacionar cantidades, llegando hasta el uso de las propiedades de estas dos operaciones para facilitar el cálculo. Coincidiendo con la fase anterior aparece el pensamiento multiplicativo temprano que se desarrolla hasta las relaciones parte/todo en el tercer ciclo y el inicio del pensamiento proporcional, que seguirá en la ESO.

En el primer ciclo consideramos fundamental el conteo. En este proceso, iniciado en la etapa infantil (3-6), hay algunos aprendizajes que conformarán la idea abstracta de cantidad: el orden de los objetos no cambia la cantidad, el último número incluye todos los anteriores, contar en dos sentidos es un recurso para resolver algunos problemas, contar de tantos en tantos resulta lo mismo que contar de uno en uno y dos esenciales más: una cantidad puede representarse de muchas maneras y cada número tiene un lugar en la recta numérica.

El sistema de numeración decimal aparece como una de las representaciones de las cantidades. Crece en complejidad a lo largo de los tres ciclos y está estrechamente vinculado con la idea de unidad que evoluciona desde la unidad/objeto (conteo) hasta la unidad/grupo (multiplicación), para llegar a la comprensión del valor relativo y los diferentes usos del cero (ninguna cantidad o ningún orden de magnitud).

Aunque la representación posicional es muy importante no hay que dejar de lado otras descomposiciones aditivas y/o multiplicativas de las cantidades. Ambos tipos de descomposiciones permiten comparar cantidades. La igualdad juega un papel decisivo en la relación entre cantidades: si dos expresiones matemáticas representan la misma cantidad podemos sustituir la una por la otra para facilitar el cálculo. Esta idea de la sustitución justifica el trabajo con igualdades y/o equivalencias.

Está claro que la equivalencia es un concepto transversal que incide también en el cálculo con fracciones. Reducir un grupo de fracciones a un común denominador implica la sustitución de una fracción por otra del mismo valor, precisando además que los denominadores de las diversas fracciones coincidan. Esto no es nada sencillo y debe estar precedido de experiencias de sustitución relacionadas con las operaciones con números naturales.

Ciclo inicial (6-8)	*Ciclo medio (8-10)*	*Ciclo superior (10-12)*
Contando podemos saber cuántos hay.	Podemos representar cantidades usando números (SND).	Podemos representar e interpretar cantidades usando números (SND).
Podemos representar cantidades usando números (SND).	Relaciones entre cantidades: dos números siempre se pueden comparar.	Relaciones entre cantidades: dos números siempre se pueden comparar.
Relaciones entre cantidades: dos números siempre se pueden comparar.	Pensamiento multiplicativo temprano: aplicar la multiplicación y la división a situaciones concretas.	Pensamiento multiplicativo temprano: aplicar la multiplicación y la división a situaciones concretas.
Pensamiento aditivo: aplicar flexiblemente la suma y la resta en situaciones concretas.	Usando las propiedades de las operaciones y de los números podemos resolver cálculos.	Relaciones multiplicativas parte/todo.

Tabla 1. *Las ideas centrales* del bloque de Numeración y operaciones

Durante el primer ciclo se busca la manipulación flexible de los números a base de unirlos, separarlos y compararlos en diferentes contextos, yendo más allá de la memorización de tablas; descubrir que se pueden descomponer y componer, partiendo, compensando los sumandos para mantener el total y usar la idea de diferencias equivalentes. Utilizar el hecho de que la suma y la resta son inversas es lo que hemos llamado pensamiento aditivo.

En el segundo ciclo esta idea se amplía a la multiplicación y la división. Se busca que las operaciones se comprendan más allá de los algoritmos reglados, que las «tablas» se comprendan y usen en combinación con estrategias derivadas de sus propiedades.

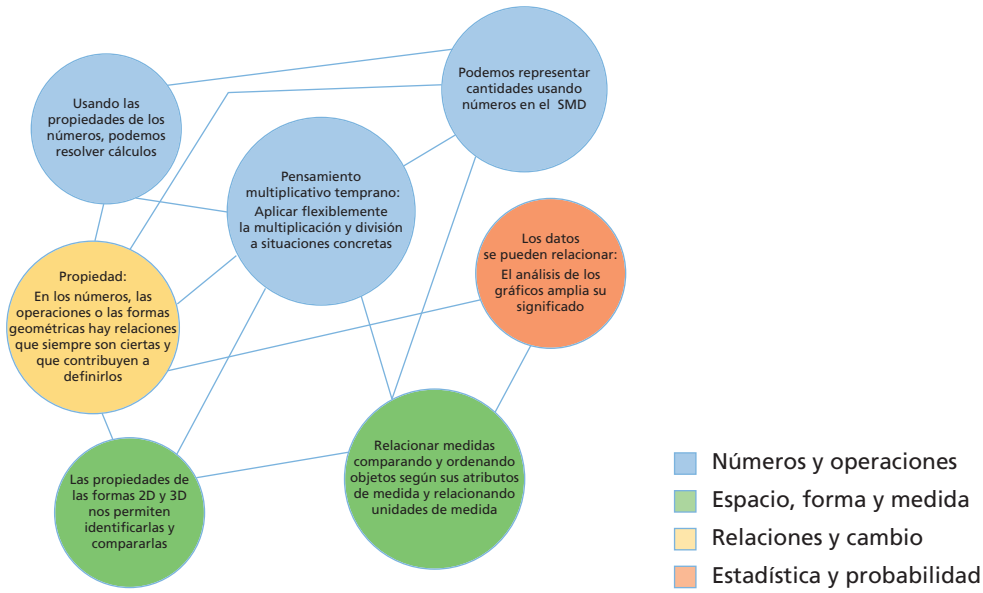
La introducción del pensamiento multiplicativo es un paso importante pues supone un cambio de mentalidad donde crecer o decrecer tiene efectos distintos sobre los números. Creemos que, desde el principio, debe favorecerse esta diferencia, lo que comporta una meditada introducción del producto. Para nosotras, la mejor introducción es la representación de los números en una cuadrícula, donde las filas y columnas se pueden intercambiar. Esta representación incluye el significado de suma de sumandos repetidos, pero no la hace única.

Este significado «rectangular» es tremendamente potente: facilita la comprensión de las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, la comprensión de los conceptos de múltiplo y divisor, se extiende al uso del producto de fracciones, y llega hasta dar sentido al producto de expresiones algebraicas. Este significado permite al alumnado la creación de algoritmos propios de cálculo y facilita el establecimiento de relaciones entre cantidades.

Las ideas centrales en el segundo ciclo de la Educación Primaria

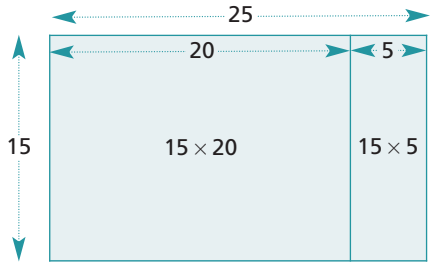
Uno de los retos que plantea el uso de las ideas centrales para estimular el aprendizaje de las matemáticas es el desarrollo de las conexiones entre distintos conceptos. Tal y como ya apuntábamos al inicio de este artículo: aprender matemáticas significa crear gradualmente una red de interconexiones entre un concepto y otros que pueden haber aparecido previamente o con algunos que a primera vista parecen distantes, porque se inscriben en distintos bloques de contenido.

El *pensamiento multiplicativo temprano* cobra en este ciclo una gran importancia. Los niños y las niñas llegan con un bagaje vinculado al pensamiento aditivo: pueden

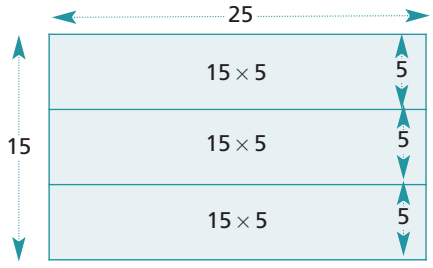


componer y descomponer los números de forma flexible, usando la adición y sustracción. En el segundo ciclo aparece como protagonista principal la multiplicación, no entendida solamente como adición reiterada, sino como representación de filas por columnas, es decir como área del rectángulo, y como representación de combinaciones que adopta forma de diagrama en árbol. Deberíamos poner el acento en estas dos últimas representaciones que le dan a la multiplicación un significado que va más allá de la adición.

Multiplicar no solo es sumar, es algo más. Ello nos lleva a considerar los números desde el punto de vista multiplicativo, podemos componerlos y descomponerlos factorialmente y aparecen los números investidos en formas geométricas: números cuadrados, números rectangulares, números que dan forma a prismas cuadrangulares o rectangulares, números cúbicos. Los podemos construir y las formas aparecen como una evidencia. Llegamos a las *propiedades de los números y de la operación de multiplicar*: el orden de los factores no altera el producto; podemos distribuir el producto en distintas sumas de productos, de forma que los cálculos se facilitan, por ejemplo: podría ser $15 \times 25 = (15 \times 20) + (15 \times 5)$:



Pero también $15 \times 25 = (5 \times 25) + (5 \times 25) + (5 \times 25)$:



Calcular, ya sea con la multiplicación o división, con la suma o la resta, se fundamenta en las *propiedades de los números y las operaciones* que deberían ir descubriendo los alumnos. Y, en la medida que las puedan descubrir, las podrán transferir, conectar a nuevas situaciones de cálculo. La resta llevando, que representa un reto inalcanzable para muchos alumnos, puede desarrollarse a través de búsqueda de restas equivalentes, que se sustentan en la propiedad uniforme de la operación:

$$311 - 128 = 300 - 117 = 283 - 100 \ \ldots$$

El propio *sistema de numeración decimal* (SND) se fundamenta en la multiplicación, los órdenes que en el primer ciclo se circunscriben a la decena y la centena, en este ciclo crecen a un ritmo vertiginoso. Los niños y las niñas tienen la oportunidad de descubrir que el intervalo numérico entre los primeros órdenes se incrementa cuando hablamos de las unidades de mil, las decenas de mil, centenas de mil y millones, pero la relación multiplicativa se mantiene; de un orden a otro multiplicamos o dividimos por diez: agrupamos diez órdenes del nivel anterior. Multiplicar y dividir nos lleva a un nuevo mundo.

La *medida nos sirve para cuantificar atributos* que corresponden a distintas magnitudes continuas y dicha cuantificación abre la puerta a la comparación, ordenación, clasificación, por ejemplo, de formas 2D y 3D. Cuando para medir vamos más allá de la comparación directa o indirecta y empleamos unidades, el proceso de la medida se relaciona directamente con la idea de multiplicación, ya que estamos rellenando la longitud, área…, con una sucesión de unidades iguales dispuestas de forma ordenada, una tras otra sin superposiciones, ni vacíos. Si además a este proceso le añadimos la posibilidad de *usar distintas unidades*, podemos relacionar dicho uso con el Sistema Decimal de Medidas que se asemeja al SND.

La *interpretación y elaboración de gráficos* para sintetizar distintas informaciones está íntimamente relacionada con el uso de los números y con la idea de la multiplicación. En los ejes de dichos gráficos la expresión de los datos debe responder a criterios preestablecidos relativos a los intervalos empleados. En un mismo eje se deberán emplear los mismos intervalos que a priori se hayan elegido.

Para concluir, podemos destacar que existe una gran interrelación entre las distintas ideas centrales. Resulta fundamental para las maestras y los maestros tomar consciencia no solo de las ideas centrales sino también de la mencionada relación, porque esta reflexión de los docentes estimulará su descubrimiento por parte de los niños y las niñas.

Una necesaria combinación: *ideas centrales*, procesos y actividades

Cualquiera de las ideas centrales vincula conceptos y procesos matemáticos (Ateneu, AraMat). Tomemos, por ejemplo, «usando las propiedades de las operaciones y de los números podemos resolver cálculos (ciclo medio, bloque de Números y operaciones)», que debe interpretarse bajo la idea de que los algoritmos están al servicio del cálculo, dando una visión global de las cantidades. Lo importante no es automatizar algoritmos estándar, sino saber manejarse con los números a partir de conocerlos mejor.

Como ya se ha dicho al presentar las ideas centrales, cada una de ellas vincula numerosos aprendizajes de manera coherente facilitando las conexiones que llevan a un conocimiento más profundo de las matemáticas. Pero como veremos a continuación, al relacionar ideas centrales y actividades ricas al alcance de todos los alumnos, aparecen también los demás procesos: resolución de problemas, razonamiento matemático y representación y comunicación.

Las ideas centrales de geometría que se proponen son comunes a todos los ciclos:

— Las propiedades de las formas 2D y 3D nos permiten identificarlas, compararlas y clasificarlas.
— Podemos obtener nuevas formas a base de componer y descomponer formas 2D y 3D y relacionarlas entre ellas.
— Podemos localizar y mover formas en el espacio usando las matemáticas.

Sin embargo, evolucionan según los ciclos. La idea de que las formas pueden permanecer al cambiar de posición o tamaño, empieza obteniendo simetrías pintando, recortando, doblando, hasta el uso de coordenadas y el uso de simetrías, traslaciones y giros para obtener figuras congruentes.

Describiremos a continuación un ejemplo de actividad muy abierta con posibles enfoques desarrollada en la escuela Vila Olímpica de Barcelona con alumnos de Educación Infantil (5 años), ciclos inicial, medio y superior de Educación Primaria.

Envolver una caja para regalo	
P5	Envolver con papel una caja (prisma rectangular o un cubo) usando el mínimo papel posible. La maestra proporciona cajas diversas y pedazos rectangulares de papel de colores de tamaños diversos. Los alumnos eligen una caja y un pedazo de papel y experimentan.
Ciclo inicial	Envolver con papel una caja (prisma rectangular) usando el mínimo papel. Tratar de cubrir todas las caras con el papel y recortar lo que sobra (hasta aproximarse a un desarrollo plano). Marcar bien las aristas en el papel para obtener las caras. Probar de envolver de dos maneras diferentes. Comparar los dos desarrollos obtenidos (¡¡¡o más !!!).
Ciclo medio	Coger una caja que sea un prisma cuadrangular, mejor si la altura es mucho menor que las otras dos dimensiones. Con un hilo de rafia o similar, atar la caja de forma que no se pueda abrir, como se hace usualmente con un regalo. Ensayar diversos atados. Determinar la mínima longitud de hilo que hay por atado y, si se puede, el atado que necesite menos hilo. Relacionarlo con las dimensiones de la caja.
Ciclo superior (en inglés)	Investigar, para una caja de base cuadrada, el mínimo cuadrado de papel necesario para envolverla. Estudiar diversas posiciones relativas de la caja y el papel. Relacionar las medidas del cuadrado de papel con las medidas de la caja. Calcular el área total de la caja y compararla con los cuadrados de papel obtenidos.

En esta actividad se trataba de ver lo que podían descubrir los alumnos sobre las formas 3D, relaciones entre

la forma 3D y la 2D relacionada (el papel de la envoltura), pero especialmente las conexiones intramatemáticas que usaban en el transcurso de la actividad. El proceso de representación y el de comunicación se daban por hechos, igualmente el de razonamiento matemático puesto que siempre se pide justificar las afirmaciones matemáticas y la resolución de problemas era consustancial con la propuesta.

También debe tenerse en cuenta que Propiedades y patrones (ideas centrales de Relaciones y cambios) tienen un papel importante en esta actividad, así como las ideas centrales de medida.

En el caso de los alumnos de 5 años, la experimentación unida a la conversación condujo a diversos hallazgos:

— Relacionar el hecho de que el papel esté liso con que las caras sean planas.
— Reconocer las caras, vértices, aristas de las cajas poliédricas. Representarlas dibujando, en la mayoría de los casos con una visión 3D.
— Relacionar la cobertura de papel de la caja con las caras que tiene y la comprensión de la demanda de la mínima cantidad de papel usada, recortando el papel sobrante y no superponiendo papel en ninguna cara.
— Medir los lados como método de determinar si una cara es o no un cuadrado, explicando cómo hacerlo.

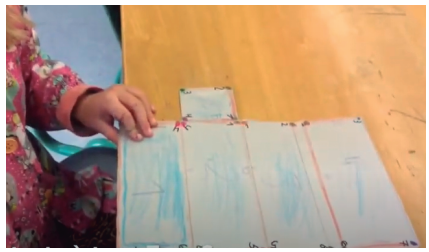


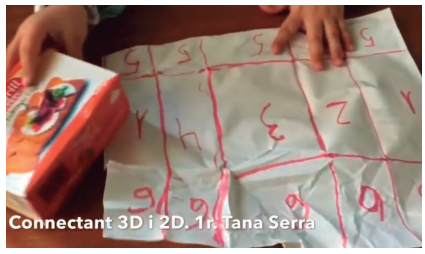


— Razonar todas las afirmaciones hechas o refutarlas cuando procedía.

En el caso de los alumnos del ciclo inicial, se llegó a:

— Reconocer las caras, vértices, aristas de las cajas poliédricas. Contarlas.
— Relacionar la cobertura en papel de la caja con las caras que tiene.
— Relacionar la posición de las caras con el lugar que ocupan en el desarrollo plano.
— Descubrir que no pueden coincidir más de tres caras en un vértice del desarrollo plano.

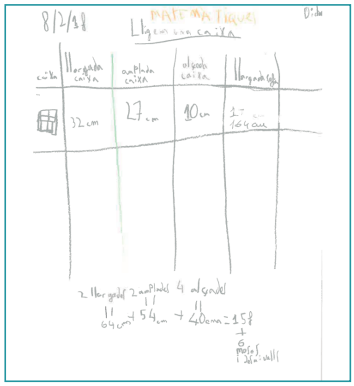


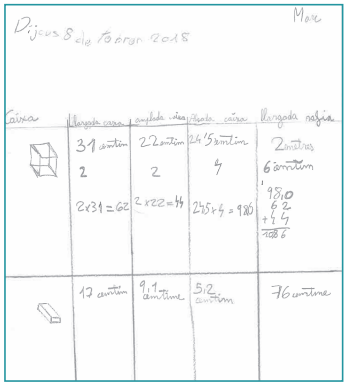


Los alumnos del ciclo medio, aparte de reconocer y contar los elementos de la caja, ensayaron diversos métodos de atado de la caja que condujeran a minimizar la longitud de hilo necesaria:

— Relacionaron la longitud del hilo con las dimensiones de la caja.
— Determinaron la mínima longitud de hilo necesario de entre las soluciones obtenidas.
— Recogieron los datos de las dimensiones de la caja y las longitudes de hilo usadas en una tabla que les permitió comparar las soluciones y llegar a expresar una fórmula.

— Reconocieron que la cantidad de hilo era aproximada expresando cuál podría ser el error en función del atado concreto.





En el caso de los alumnos del ciclo superior, que realizaban las actividades de geometría en inglés, la profesora planteó la actividad sin concretar si el papel mínimo para envolver debía ser cuadrado o rectangular. La clase, espontáneamente, eligió dividirse para explorar ambas opciones, después de experimentar con una gran diversidad de cajas. Al final de la investigación cada pareja realizó un video tutorial explicando el proceso de la obtención de la fórmula. En concreto se llegó a:

— Obtener la fórmula del área de los prismas.
— Obtener varios desarrollos planos de cada caja.
— Ver cómo la caja se puede cubrir con una única figura en lugar del conjunto de figuras que forman el desarrollo plano.
— Relacionar diferentes maneras de abordar el problema.
— Aplicar conocimientos previos tanto conceptuales como de proceso.
— Obtener que: el lado del papel cuadrado (mínimo) es igual a diagonal de la base más el borde más pequeño más la mitad del borde más pequeño.
— En el caso del papel rectangular:
Longitud del papel rectangular = base × 4,
Ancho del papel rectangular = alto de la caja + base.
— Razonar en cada solución por qué es mejorable.

Además de manera muy general los grupos pusieron en práctica estrategias como:

— Tantear para encontrar relaciones entre los datos.
— Hacer predicciones de resultados posibles.
— Relacionar conjeturas con conocimientos adquiridos.
— Reconocer el proceso que ha seguido para resolver.
— Reaccionar positivamente ante los errores buscando otros ejemplos.

Viendo la respuesta obtenida es evidente, para nosotras, que la actividad era potente en cuanto a la puesta en práctica de los procesos. Asimismo, permitió poner de relieve las ideas centrales de geometría y de medida.





Desarrollo de las ideas centrales de Relaciones y cambio a lo largo de la Educación Primaria

El bloque de contenidos de Relaciones y cambio está presente en el currículo de Matemáticas de Educación Primaria de Cataluña desde hace más de diez años. Dicho bloque contiene los conceptos relativos a patrones, propiedades y equivalencia. Su desarrollo puede acometerse desde la perspectiva de los números, de la geometría, de la medida… En realidad, su presencia persigue poner en valor la búsqueda de regularidades en contextos que, a primera vista, parecen absolutamente dispares. En cierto modo la inclusión de este bloque representa un reto para el profesorado: perseguir que los niños y niñas tengan la curiosidad y la perseverancia de hallar patrones que expliquen los fenómenos matemáticos. Dicho bloque aparece como un precursor del álgebra en educación secundaria.

Al plantearnos cómo concretar las ideas centrales de Relaciones y cambio nos centramos en los tres ejes mencionados anteriormente: patrones, propiedades y equivalencia (tabla 2). Son ideas que se mantienen a lo largo de toda la etapa.

¿Pero de qué modo se desarrollan en el aula dichas ideas? Mostramos algunos ejemplos de la escuela Vila Olímpica de Barcelona.

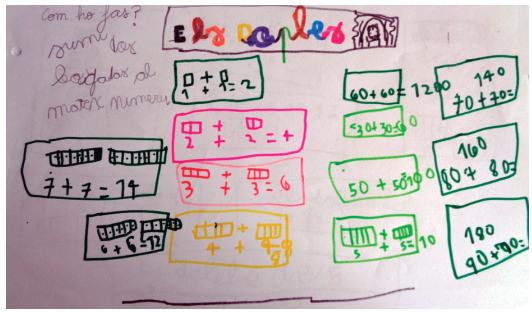
Ideas centrales de Relaciones y cambio
Patrón Un grupo de ítems es un patrón sólo si hay repetición o regularidad de elementos o de transformaciones que se pueden describir con una regla
Propiedad En los números, las operaciones o las formas geométricas, hay relaciones que siempre son ciertas (propiedades) y que contribuyen a definirlos.
Equivalencia Relación que permite clasificar un grupo de elementos según alguno de sus atributos/propiedades de forma que los elementos de una clase son intercambiables entre ellos.

Tabla 2

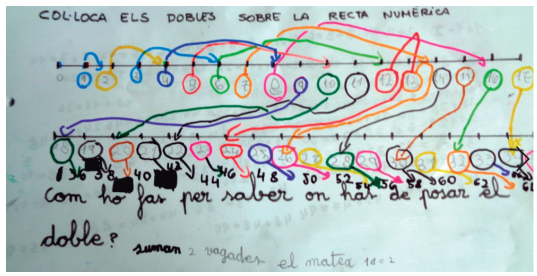
PRIMER CURSO. DOBLES

Tener a mano de forma flexible los dobles de los números facilita el cálculo aditivo. Se trata de que los alumnos puedan hacer uso de los dobles cuando ellos lo estimen necesario y conveniente. ¿De qué forma acercarlos a ellos y a su uso?

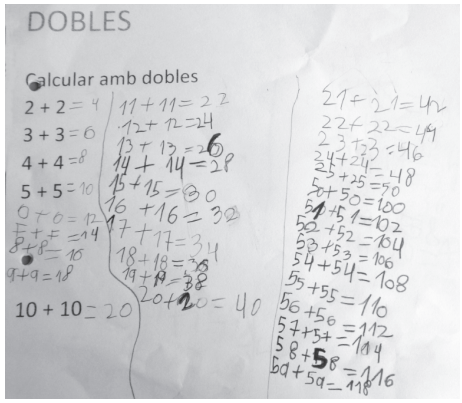
Los alumnos han podido experimentar con los cubos encajables lo que les ha permitido representar los primeros dobles, para a continuación establecer patrones que ya no necesitan experimentar: cuando nos muestran los dobles de 50, 60, 70, 80 y 90. Se ha conversado en clase acerca de los dobles y la maestra los ha invitado a representar sus hallazgos preguntándoles «¿cómo lo haces?», a lo que han respondido «sumo dos veces el mismo número».



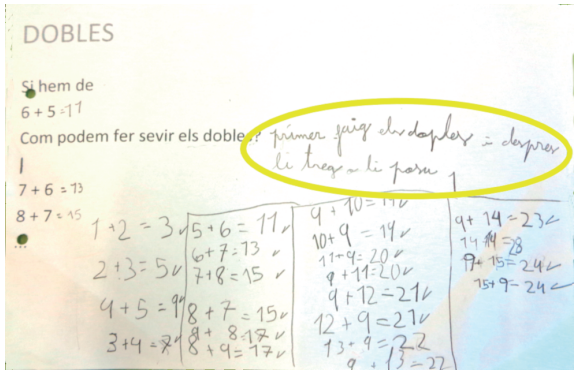
Los niños y las niñas están familiarizados con la representación de los números sobre la recta numérica. En este caso van a utilizarla para exponer los dobles. Después de una conversación colectiva, cada niño o niña escoge su representación. Los colores nos indican el camino desde el número hacia su doble. A la pregunta de la maestra «¿cómo haces para saber dónde debes colocar el doble?», la respuesta es diáfana, «sumando dos veces lo mismo». Los niños descubren el patrón.



El descubrimiento del cálculo de dobles los lleva a continuar su propio viaje con números que están más allá de su alcance cotidiano.



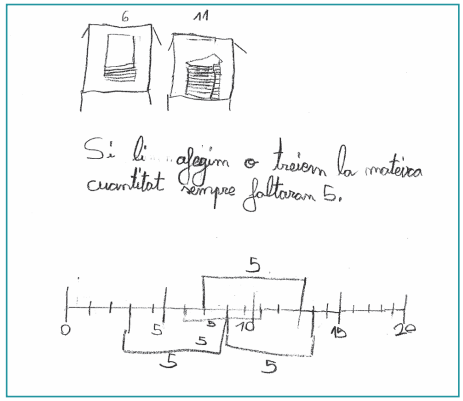
Los dobles también permiten realizar otros cálculos. En esta ocasión esta alumna expresa la forma de hacerlo: «primero doblo y después le saco o le añado 1». El patrón ha sido descubierto. Más adelante realiza cálculos, por iniciativa propia, para verificar que el orden de los sumandos no altera el resultado. ¡Quizás la curiosidad matemática empieza a emerger!



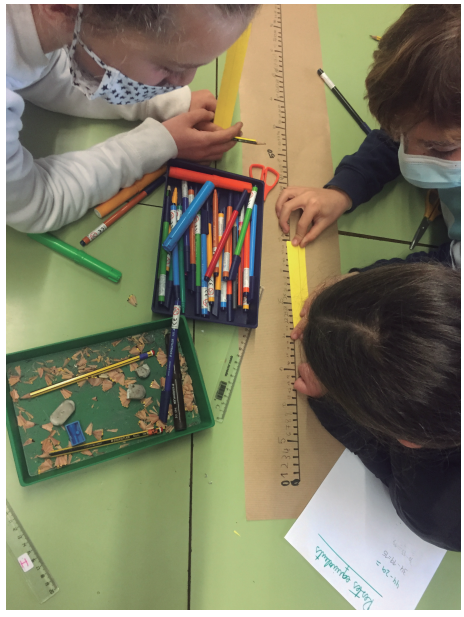
TERCER CURSO. RESTAS EQUIVALENTES. PROPIEDAD UNIFORME

En una mesa de la clase hay 11 libros de conocimiento del medio, en otra hay 6 libros, vamos a explorar qué sucede si añadimos o quitamos las mismas cantidades en cada mesa, ¿va a variar la diferencia entre una y otra mesa?

Una niña representa el descubrimiento a su modo, primero con el dibujo, después usando el lenguaje verbal, «si le añadimos o quitamos la misma cantidad siempre faltarán 5», y por último sobre la recta numérica, toda una evolución de representación que le permite establecer conexiones y reconocer restas equivalentes.



Buscan restas equivalentes sobre la recta numérica. Se dan cuenta que pueden elegir la colocación de la diferencia y hallar nuevas restas con el mismo resultado. Acaban de descubrir una propiedad que les permitirá facilitar el cálculo: hallar restas equivalentes más fáciles, $71-58=73-60=80-67=\ldots$



SEXTO CURSO. PATRONES ENTRE LOS ELEMENTOS DE LAS PIRÁMIDES

Esta actividad se lleva a cabo en inglés. Los alumnos en grupos de tres han experimentado a partir de la construcción de pirámides con polydron. La maestra les reta a hallar patrones entre los elementos de las pirámides. Para ello casi todos los grupos deciden disponer la información obtenida dentro de una tabla para posteriormente analizarla y descubrir los patrones, si es que los hay.

Expresan las relaciones entre las aristas, caras y vértices de la base dentro de la propia tabla, en lenguaje verbal y muestran una primera aproximación al uso del lenguaje algebraico. Al final de la etapa han integrado la curiosidad por hallar patrones escondidos, así como el uso de las tablas para facilitar dichos hallazgos.

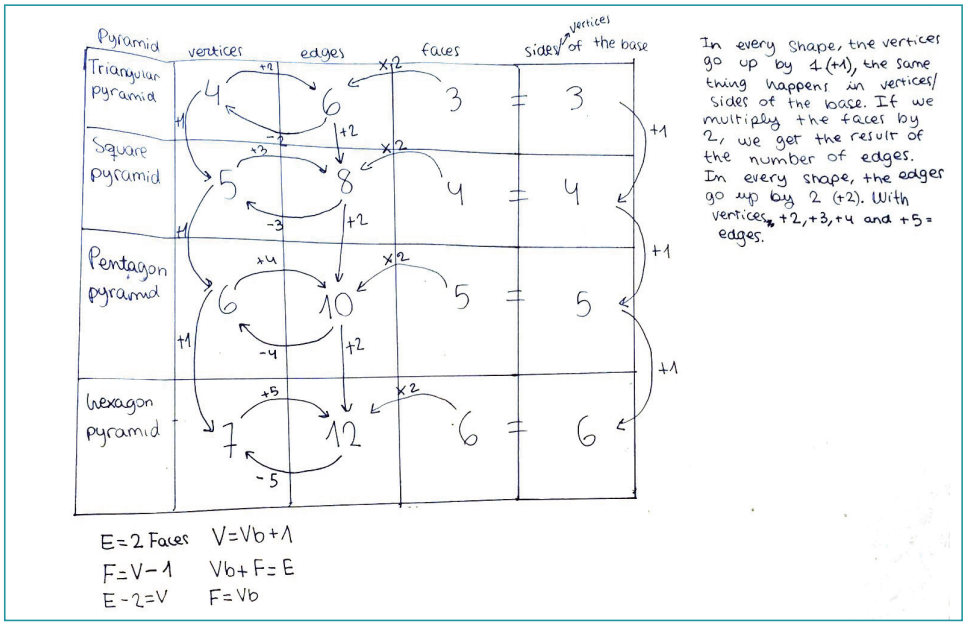
En todas estas actividades hay una línea metodológica que subyace: las maestras tienen presentes las ideas centrales de matemáticas a estimular; las actividades propuestas tienen un carácter muy abierto, de manera que adoptan una forma u otra en función de la iniciativa de las niñas y los niños; la experimentación y el trabajo en pequeño grupo son una constante; la conversación matemática en clase es una fuente de conocimiento en la medida que articula los distintos razonamientos y formas de representación; la representación del proceso seguido en cada actividad es la propia de cada grupo de alumnos.

La asunción de las ideas centrales por parte de las maestras facilita la flexibilidad del desarrollo de las mismas.

El conocimiento matemático está estrechamente relacionado, lo que puede parecer que dificulta su adquisición y, sin embargo, potencia su uso. Creemos que las ideas centrales pueden ayudar a los docentes a favorecer las conexiones intramatemáticas en su alumnado.

Úsenlas y/o diseñen las de su currículo. Cada proyecto es una oportunidad para aprender, resolver problemas y desafíos, inventar y reinventar. Estamos convencidas de que todo el alumnado, a cualquier edad, puede aprender matemáticas.

Todo estará bien al final.
Si no está bien, no es el final.
Paulo Coelho



Referencias bibliográficas

Alsina, C., A. Aubanell y C. Burgués (2019), *Tres professors de matemàtiques*,Rosa Sensat, Barcelona.

Burgués, C., y T. Serra (2019), «Idees Centrals de Matemàtiques», *CESIRE*, consultada en marzo de 2022 en <https://sites.google.com/xtec.cat/idees-centrals-matematiques-ip/inici>.

Charles, R. I. (2005), «Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics», *NCSM Journal, Spring/Summer. Journal of Mathematics Education Leadership*, vol. 7, n.º 3.

Generalitat de Catalunya (s.f.), «Ara Matemàtiques. Saber-ne mes per ensenyar-les millor. Dimensions competencials», *Ateneu*, colsultado en marzo de 2022 en: <http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/cursos/curriculum/inf_pri/aramat/m3/index>.

Niss, M. A. (2003), «Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project», en A. Gagatsis y S. Papastavridis (editores), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education - Athens, 3-4-5 January 2003*, Hellenic Mathematical Society, 116-124.

Small, M. (2019), «Focusing Instruction on Big Ideas and Mathematical Processes», en M. Small, *Understanding the Math We Teach and How to Teach It,* Stenhouse Publishers, Portsmouth, 15-32.

Teresa Serra Santasusana
Escola Vila Olímpica de Barcelona
Maestra jubilada
<tserra@xtec.cat>

Carme Burgués Flamarich
Universitat de Barcelona
Profesora jubilada
<flam4917@gmail.com>

Aprender a usar el álgebra en secundaria mediante la resolución de problemas

Abraham de la Fuente Pérez

SUMA+ núm. 99
pp. 49-60
Artículo recibido en *Suma* en abril de 2021 y aceptado en noviembre de 2021

Este artículo tiene como objetivo una propuesta de secuencia de problemas que puede servir para construir el lenguaje algebraico, poniendo el acento en las grandes ideas matemáticas que se trabajan en cada uno de ellos, de manera que si los problemas, la secuencia o el orden se varían, se puedan distinguir igualmente los puntos importantes a trabajar con los alumnos.

Palabras clave: Álgebra, Resolución de problemas, Secundaria, Aprendizaje significativo, Investigación didáctica.

Learn to use algebra in high school through problem solving // This article aims to propose a sequence of problems that can be used to build the algebraic language, emphasizing the great mathematical ideas that are worked on in each of them, so that if the problems, the sequence or the order are varied, the important points to work with the students can also be distinguished.

Keywords: Algebra, Problem solving, Secondary, Meaningful learning, Didactic research.

Podríamos intentar captar en una sola frase qué entendemos por álgebra escolar diciendo que el álgebra es aquella parte de las matemáticas que estudia las relaciones entre objetos matemáticos (números, funciones, figuras geométricas…) y las expresa usando simbolismos. Aunque esta sentencia no deja del todo clara la multidimensionalidad de este lenguaje, sí que pone de relieve la importancia que tiene el significado (versus la sintaxis) dentro de este lenguaje que queremos que nuestros alumnos aprendan a utilizar. También debemos tener en cuenta que el lenguaje algebraico deberá jugar un papel crucial como transmisor de las ideas entre profesor y alumno durante el proceso de resolución de problemas (Vila y Callejo, 2004).

Si conseguimos que nuestros alumnos no ignoren el significado de los símbolos que emplean, conseguiremos también que vean este lenguaje como una herramienta apta para comprender y expresar generalizaciones, captar conexiones estructurales y para argumentar en ma-

temáticas. En este sentido, lo que queremos es conseguir un equilibrio entre las diferentes concepciones de los símbolos que vayan asumiendo a través de situaciones significativas variadas que ayuden a los alumnos a comprender la pertinencia del lenguaje algebraico, su estructura y el significado de los conceptos fundamentales con el objeto de que sean capaces de movilizar el razonamiento algebraico para resolver problemas.

De acuerdo con las ideas anteriores, en este artículo se propone una secuencia de problemas que podría servir para diseñar un itinerario para el aprendizaje del álgebra en secundaria. Esta secuencia es resultado de la tesis doctoral del autor de este artículo (de la Fuente, 2016), donde se hace un estudio de cuáles son los conocimientos que necesita un profesor o una profesora para ayudar a sus alumnos a aprender a utilizar el lenguaje algebraico en un ambiente de aula de resolución de problemas.

Categorías del álgebra escolar

Una visión tradicional de la enseñanza del álgebra incluye simplificar y factorizar expresiones, resolver ecuaciones realizando la misma operación a ambos lados de la igualdad y manipular parámetros de ecuaciones funcionales como, por ejemplo, $y = mx + 2$ para estudiar familias de funciones (Kieran, 1992). Además, los capítulos introductorios al lenguaje algebraico de muchos libros de texto enfatizan las conexiones del álgebra con la aritmética. Aunque los currículums oficiales han cambiado en favor de una enseñanza enfocada a la adquisición de competencias y de una visión más rica de una herramienta matemática tan potente como es el lenguaje simbólico, hay que tener en cuenta que la educación de los profesores y profesoras que hoy en día enseñan a nuestros alumnos se ha basado en currículos anteriores y que muchos libros de texto siguen teniendo la misma estructura. Por lo tanto, esta visión tradicional continúa imperando.

Consideramos que esta visión del álgebra es demasiado simplista y que por lo tanto no genera un aprendizaje competencial. Debido a que nuestro enfoque de la enseñanza es la construcción del lenguaje algebraico en un ambiente de resolución de problemas, hemos caracterizado las categorías de este lenguaje en términos de capacidades, atendiendo así a un lenguaje que nos ayude también a mostrar el enfoque competencial del aprendizaje.

Así pues, y de acuerdo con Kaput (2000) y NCTM (2000), a partir de ahora nos referiremos a las categorías del álgebra escolar de la siguiente forma: el álgebra escolar será un lenguaje simbólico que tiene que servir para:

- Generalizar y formalizar.
- Representar estructuras abstractas y hacer cálculos con ellas.
- Estudiar relaciones y funciones.
- Modelizar.

Nuestra elección de estas categorías se basa en la idea de que para poder construir el conocimiento necesario para desarrollar las habilidades de la siguiente dimensión será necesaria una cierta habilidad en los procesos implicados en las anteriores categorías. Es decir, estas cuatro formas de razonamiento algebraico se relacionan y se superponen entre ellas, hasta el punto que en la resolución de algunos problemas es difícil su distinción (figura 1). Esto quedará claro y justificado con los problemas de ejemplo que iremos considerando en los siguientes apartados, donde veremos con más detalle a qué hace referencia cada una de las categorías del lenguaje algebraico.

GENERALIZAR Y FORMALIZAR

Creemos que el lenguaje algebraico se debe comenzar a construir como un conjunto de tareas de generalización. El lenguaje algebraico necesario para generalizar surge en el momento en que se tiene la necesidad de comunicar patrones, ya sean numéricos o algebraicos, o cuando intentamos expresar las leyes que gobiernan las relaciones numéricas.

Es por esto que creemos que las tareas que el profesor propone en clase tienen que animar a los alumnos y alumnas a interaccionar entre ellos, a exponer los resultados en pequeños grupos y después con todo el grupo-clase. De esta manera podremos conseguir

que para comunicarse tengan la necesidad de tener un lenguaje prealgebraico o algebraico común. Esta emergencia se dará las primeras veces en la fase sincopada de este lenguaje. Y por eso es muy importante que las alumnas y alumnos, además de comunicar los razonamientos oralmente, deban escribirlos, porque así será más fácil que tengan la necesidad de utilizar diferentes símbolos y representaciones para hacerse entender.

Por ejemplo, consideremos el siguiente problema (Mason, Burton y Stacey 1992):

Sumas consecutivas

Algunos números se pueden expresar como suma de una sucesión de números positivos consecutivos.

¿Exactamente qué números tienen esta propiedad? Por ejemplo, observa que:

$$9=2+3+4$$
$$11=5+6$$
$$18=3+4+5+6$$

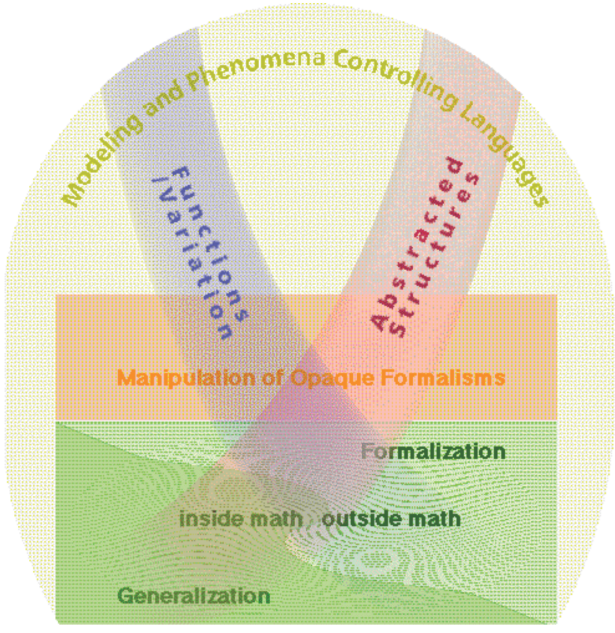


Figura 1. La superposición e interrelación de las cuatro formas de razonamiento algebraico según Kaput (2000: 5)

Este problema así propuesto ya es de por sí un problema muy rico que dará mucho juego y que se podría proponer a muchos niveles diferentes. A nosotros lo que nos interesa es cómo lo podemos utilizar para ayudar a nuestras alumnas y alumnos a construir el lenguaje algebraico necesario para generalizar. Si proponemos este problema en el aula, los alumnos convencionalmente querrán hacer unas cuantas pruebas que les servirán para entender el enunciado. Si la atención sobre el problema se mantiene el tiempo suficiente, es muy probable que algún alumno acabe haciendo la siguiente conjetura: «con los números impares siempre se puede». Este alumno está intentando generalizar, ya que está observando ciertos aspectos comunes a diferentes casos particulares y está ignorando, en cambio, otros aspectos. Ahora, una vez formulada, esta conjetura tiene que ser investigada para ver si la podemos confirmar o no (Mason, Burton y Stacey, 1992).

Para demostrar esta conjetura el alumno tendrá que referirse a todos los números impares a la vez de alguna manera. Y aquí será donde el profesor tendrá que jugar su papel e intentar que los alumnos lleguen a escribir la expresión $2n+1$ como generalización de los números impares. Incluso se puede aprovechar para ofrecer otra representación de los números pares e impares (figura 2), que a su vez podría combinar el trabajo con los alumnos de la segunda dimensión del álgebra escolar, la que trataremos en el siguiente apartado. Es fácil apreciar, por tanto, cómo el esquema de Kaput que ya hemos apuntado anteriormente (figura 1) sigue teniendo validez.

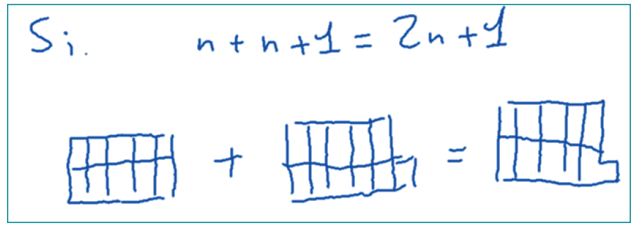
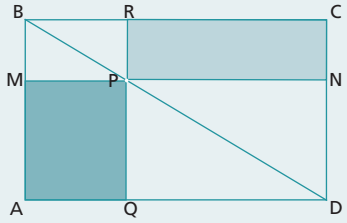


Figura 2. Representación geométrica de los números pares e impares

Por otro lado, si tenemos puesto el foco en las argumentaciones de los alumnos, será fácil convencerles de que el lenguaje algebraico también les tiene que servir para formalizar sus argumentaciones. Por ejemplo, cuando proponemos a nuestros alumnos que resuelvan el siguiente problema de demostración (Azcárate y Deulofeu, 1998):

Rectángulos diferentes pero de áreas iguales



Está claro que los rectángulos sombreados de la figura no son iguales pero, en cambio, tienen la misma área. Arguméntalo.

Después de trabajar un buen rato con la argumentación de forma oral, si queremos hacer la siguiente parte de la tarea y así aprovechar para ayudarles a construir el lenguaje necesario para formalizar, podríamos pedir a los alumnos que escriban sus argumentaciones con sus propias palabras. Una vez nos hemos asegurado de que un alumno tiene su argumentación bien escrita, la segunda parte de la tarea consiste en ordenar las frases de la figura 3 para volver a escribir una argumentación que sea correcta.

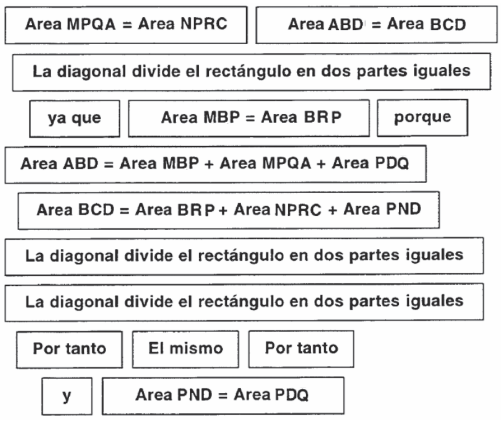


Figura 3. Frases para ordenar y construir con ellas una argumentación formal (Azcárate y Deulofeu, 1998)

REPRESENTAR ESTRUCTURAS ABSTRACTAS Y HACER CÁLCULOS CON ELLAS

«El significado que tienen los objetos matemáticos se encuentra determinado más por los contextos en los que se usan que no por las reglas formales con los que se usan» (Schoenfeld y Arcavi, 1988). Si lo que queremos es conseguir que el álgebra tenga un significado subyacente para nuestros alumnos, tenemos que conseguir que tengan muchas experiencias usándola como un lenguaje que sirva para representar objetos matemáticos. Es difícil que los alumnos se apropien de estos objetos abstractos sin haber experimentado con una diversidad de representaciones de los mismos.

Nuestro primer ejemplo de cambio de representación ya lo hemos visto en la tarea sugerida por la figura 2, es decir, el álgebra constituye un lenguaje que, además de servir para formalizar generalizaciones, tiene que ayudar a nuestros alumnos a comprender cómo relacionar patrones geométricos con expresiones simbólicas. Otro ejemplo de tarea podría ser proponer a nuestros alumnos que utilicen la figura 4 para argumentar la siguiente igualdad algebraica:

$$1+3+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

Por lo tanto necesitamos que nuestros alumnos aprendan a cambiar la representación de objetos matemáticos (en este caso una figura) y los símbolos con cierta fluidez.

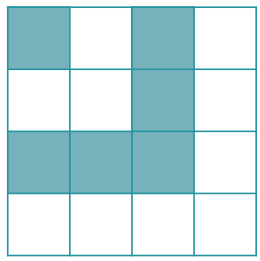
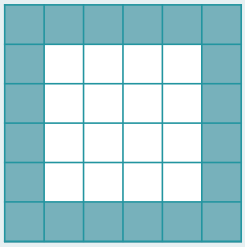


Figura 4. Demostración visual de que $1+3+5+7=4^2$

Pero está claro que necesitamos también que los alumnos aprendan a hacer cálculos con estos símbolos, por ejemplo, para comprobar la equivalencia

entre diferentes expresiones. El siguiente problema (Sessa, 2005) es un buen ejemplo de cómo a través de la resolución de un problema se puede conseguir crear la necesidad de construir esta dimensión del lenguaje algebraico.

Contar cuadraditos



¿Cuántos cuadraditos tiene la figura en su zona perimetral?

¿Cuántos cuadraditos tendría en su zona perimetral la figura análoga que tiene 37 cuadraditos de lado? Escribe en forma de operación combinada los cálculos que has necesitado y argumenta la respuesta.

¿Podrías proponer una fórmula que sirva para calcular el número de cuadraditos de la zona perimetral de cualquier figura como esta?

Las primeras preguntas son dos casos particulares que sirven para asegurar que los alumnos entienden el problema y que son capaces de realizar un cálculo concreto y de particularizar el problema en un caso mayor. Es muy importante pedir la estrategia que han usado para hacer el cálculo. Así es como fácilmente podremos pedir que generalicen y que nos digan cómo harían el cálculo para un cuadrado de cualquier tamaño. Es muy probable que, al respecto del lenguaje algebraico, las argumentaciones las hagan usando el álgebra retórica como medio. Es en estos momentos cuando tenemos que compartir los diferentes métodos de cálculo y así podremos escribir las diferentes expresiones algebraicas que hemos ido obteniendo (figura 5).

Una vez hemos recogido todas las generalizaciones, será el momento en que saldremos de la categoría de generalización y podremos entrar en el cálculo usando estructuras abstractas. Podemos mantener vivo el significado de las letras durante mucho rato y además podremos ir introduciendo a los alumnos en la manipulación de las letras y las operaciones con ellas. Por ejemplo, este es un problema para empezar a poner en común diferentes formas de expresar un producto en álgebra: $2 \cdot n$, $2 \times n$ o $2n$.

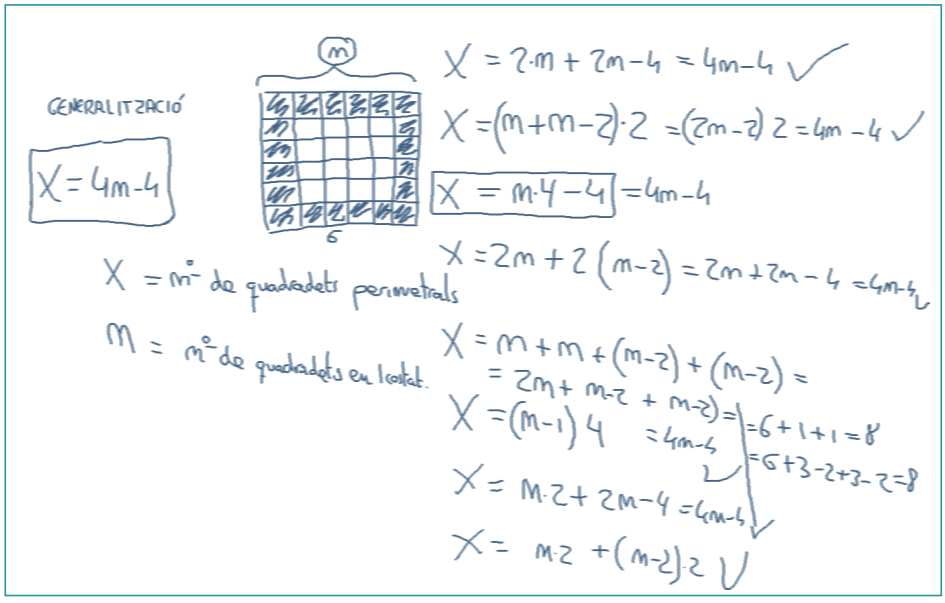


Figura 5. Diferentes generalizaciones y representaciones del problema

Este problema tiene todavía una contribución más al desarrollo del lenguaje algebraico: la respuesta al problema es una fórmula, una expresión algebraica no cerrada, y no una cantidad concreta. También podremos aprovechar este problema para trabajar el concepto de variable y evitar así acabar trabajando las letras sin tener en cuenta los múltiples significados que estas tienen (Schoenfeld y Arcavi, 1988). Esto nos permitirá conectar el problema fácilmente con la siguiente categoría del lenguaje algebraico: el estudio de relaciones y funciones.

Otro problema a caballo entre esta categoría y la siguiente es el que plantea el grupo Vilatzara (Cobo y otros, 2005) partiendo de una situación representada de manera icónica. En él se llega a plantear la resolución de sistemas de ecuaciones utilizando lenguaje algebraico. La primera tarea consiste en analizar la información dada en la figura y expresarla utilizando diversas representaciones. Para ello, se pueden plantear preguntas como las que aparecen en el recuadro y otras parecidas.

El precio de la pizza



1. Argumenta si con la información proporcionada en la figura podemos saber el precio de una porción de pizza y una bebida.
2. ¿Qué podemos saber del precio de 4 bebidas y 2 porciones de pizza?
3. Escribe cinco cosas diferentes que puedas garantizar con esta información.
4. ¿Puedes saber el precio de 8 porciones de pizza y 12 bebidas?
5. Di cinco posibles precios de bebidas y los precios de pizza correspondientes. ¿Podrías generalizar?

Las cuatro primeras preguntas pueden servir para que los alumnos se familiaricen con la representación icónica de la información y para darle sentido a los símbolos de esta. Es muy importante dejar claro que los dibujos no representan los objetos, sino una de sus características, su precio. La quinta pregunta nos puede conducir a representar la información en una tabla de valores y también a escribir una fórmula que nos relacione el precio de uno de los objetos con el precio del otro, por ejemplo:

$$P_{\text{pizza}} = \frac{17{,}6 - 6 \cdot P_{\text{bebida}}}{4}.$$

La manipulación de las diferentes representaciones de la información de parejas de datos como las que se muestran en la figura 6 es también uno de los procedimientos que se pueden trabajar con este conjunto de tareas. Se espera que las manipulaciones que hagan los alumnos de esta representación icónica de la información sea similar a la que harían si utilizasen letras para representar los precios de los productos y expresiones algebraicas para representar la información.

Es muy importante que los profesores insistamos en el abanico de posibilidades que existe a la hora de resolver este problema y que si algún alumno decidía recurrir al uso del lenguaje algebraico para resolverlo, que dejen claro que esta no es más que otra forma de resolver este problema, ya que el objetivo no es solo que los alumnos aprendan a resolver sistemas de ecuaciones lineales, sino que también es importante trabajar las diferentes representaciones de esta información y cómo todas ellas pueden servir para encontrar los

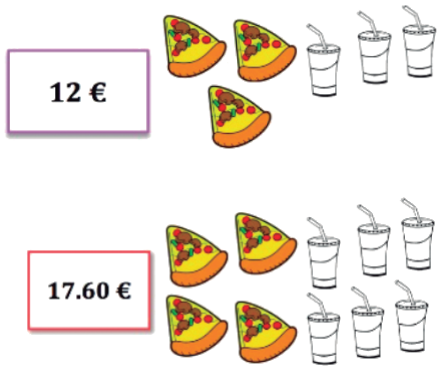


Figura 6. Representación icónica de un problema con dos condiciones de la actividad *El precio de la pizza*

dos precios que se buscaban. En la figura 7 se pueden ver diversas producciones de alumnos que resuelven esta situación de maneras diferentes.

Como este tipo de problemas genera de manera natural el uso de estrategias y representaciones diferentes para resolverlos, estos problemas facilitan a los profesores generar diálogos en los que se conecten diferentes estrategias de resolución y diversas representaciones. Además, las estrategias que van aprendiendo mientras resuelven este tipo de problemas sirven a los alumnos para resolver problemas puramente algebraicos (de la Fuente, Deulofeu y Rowland, 2016).

ESTUDIAR RELACIONES Y FUNCIONES

El lenguaje algebraico también tiene que servir como medio para comunicar y entender la relación entre dos o más variables. En particular, el estudio de funciones tendría a su vez que ayudar a los alumnos a desarrollar este lenguaje.

La geometría nos puede proporcionar contextos ricos para que nuestros alumnos construyan el lenguaje simbólico necesario para entender relaciones entre dos o más variables, por ejemplo, mientras estudiamos las fórmulas de las áreas de las figuras planas. El siguiente problema es un ejemplo de ello.

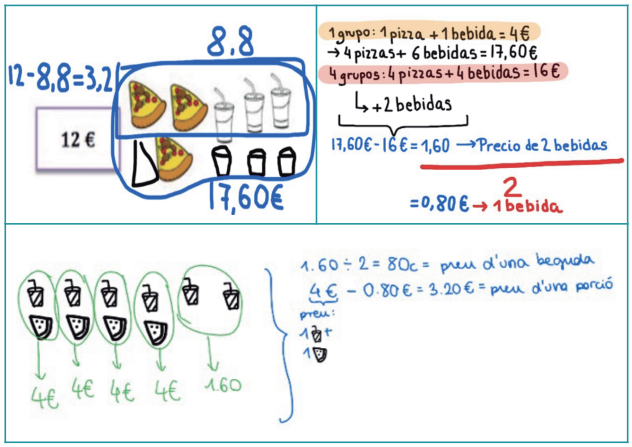


Figura 7. Tres alumnos usan estrategias y representaciones diferentes para resolver el mismo problema

El área del trapecio

Seguramente ya sabes que el área del trapecio es:

$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h.$$

Deduce esta fórmula suponiendo que solo sabes las fórmulas del área del rectángulo, el triángulo y el paralelogramo. Hazlo al menos de tres maneras diferentes.

La figura 8 muestra un ejemplo de resolución del problema que hemos planteado por una alumna de 1.º de ESO. Podemos observar cómo esta alumna es capaz de manipular los símbolos para obtener diferentes fórmulas equivalentes del área del trapecio para luego comprobar que efectivamente todas llevan a la misma expresión si se manipula adecuadamente.

El estudio de fenómenos que implican cambios son los que generan el estudio de las funciones. Este estudio se puede expresar usando diferentes representaciones: descripciones verbales, gráficas, tablas de valores o expresiones algebraicas. Por lo tanto, ya queda claro que la expresión algebraica de una función no es la única forma en la que nos podemos referir a ella y si nuestro objetivo es construir el lenguaje algebraico nos podemos apoyar en el resto de representaciones para dotar de significado a los símbolos.

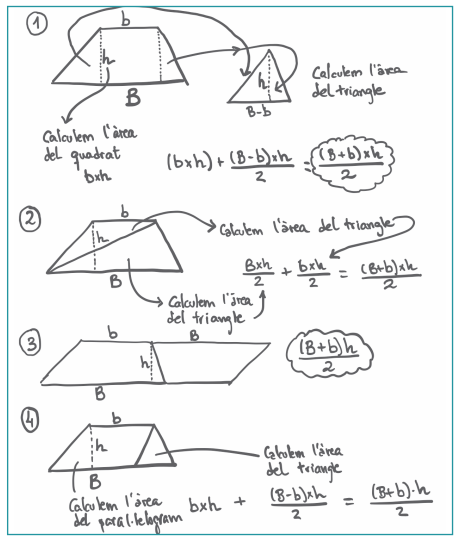


Figura 8. Resolución del problema del trapecio por una alumna de 1.º de ESO

Ahora bien, nos gustaría remarcar que para que la propuesta de actividades relacionadas que sugerimos sea lo más útil posible, es importante que los alumnos hayan vivido experiencias previas con gráficas de funciones, tablas, etc. El hecho de trabajar con gráficas de funciones y no necesariamente con las expresiones algebraicas de las mismas, nos permitirá poder trabajar con una amplia variedad de funciones, sin necesidad de limitarnos a aquellas que tengan una expresión algebraica sencilla.

Un ejemplo de problema que podemos plantear en clase, adaptado del artículo de Arcavi (2008), nos servirá para explicitar la conexión entre las diferentes representaciones de una función.

Ahorros

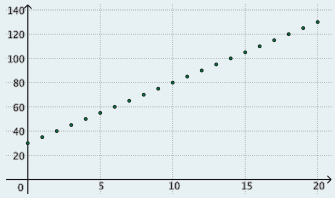
Los ahorros de Helena, Xavier, Andrea y Joan han cambiado durante el último año tal y como está descrito bajo estas líneas. Los números indican las cantidades de dinero en euros y al final de cada semana.

Helena: La tabla muestra cuánto dinero ha ahorrado al final de cada semana. La tabla continúa de la misma forma durante todo el año.

Semana	1	2	3	4	5	6	…
Ahorro	7	14	21	28	35	42	…

Xavier: Durante todo el año ha tenido ahorrados 300€.

Andrea: El gráfico describe sus ahorros durante las primeras veinte semanas. El gráfico continúa de la misma manera durante el resto del año.



Joan: Los ahorros de Joan se pueden describir mediante la siguiente expresión algebraica

$$y = 300 - 5x,$$

siendo x el número de semanas e y los ahorros en euros.

Escoge una de las representaciones (verbal, gráfica, tabla o algebraica) que se plantean aquí para comunicar cómo son los ahorros de estas personas y expresa todos los ahorros en la forma elegida.

Otro ejemplo que nos permite continuar con la construcción del lenguaje algebraico a partir de la necesidad de comunicar relaciones entre variables y funciones, también adaptado del artículo Arcavi (2008), es el que aparece en el siguiente cuadro.

Ahorros de los nietos de Joan

Las siguientes expresiones describen los ahorros de los diferentes nietos del abuelo Joan (x denota el número de semana):

Mónica	$7x$	**Gus**	300
Anna	$10x$	**Pere**	$60+3x$
Javi	$30+5x$	**Helena**	$-20+4x$
Laura	$300-5x$	**Gerard**	$-70+7x$

Todos los nietos viven bastante cerca, y han descubierto que hay una forma muy divertida de poder comunicarse entre ellos: el *walkie-talkie*. Para eso tienen que comprar un transmisor para cada dos de ellos. Así que juntarán sus ahorros para poder llegar a los 400€ que cuesta ese modelo de *walkie-talkie*.

1. Encuentra expresiones, tan cortas como sea posible, para describir la cantidad de ahorros que se pueden conseguir juntando los ahorros por pareja de todas las parejas posibles. Haz una descripción tanto verbal como algebraica.
2. ¿Cuál de las parejas sería la primera en conseguir ahorrar los 400€ que cuestan los *walkie-talkie*?
3. ¿Podrías sugerir una agrupación de parejas que beneficie a todo el grupo?

Con este problema podemos conseguir trabajar la traducción de una expresión algebraica a lenguaje verbal dentro de un contexto con un significado cercano a los alumnos como pueden ser los ahorros y además propiciamos que este lenguaje, el verbal, pueda ser útil para la propia construcción de expresiones algebraicas simbólicas.

En el artículo de Arcavi (2008) podemos encontrar el siguiente diálogo entre dos alumnas mientras discuten los ahorros producidos por las parejas Mónica ($7x$)–Anna ($10x$) y Mónica ($7x$)–Javi ($30+5x$):

Natally Mónica consigue 7 cada semana, y Anna gana 10 cada semana, por lo tanto juntas consiguen 17 cada semana, $17x$.

Eli Ellas conseguirán la máxima cantidad de ahorros.

Natally Mónica y Javi. Si Mónica consigue 7, y Javi 5, ¡espera un momento! Javi tiene 30 € inicialmente, ¿no? Por lo tanto, $5+7=12$, OK. $30+12x$.

Es decir, que con este tipo de actividades los alumnos pueden ser capaces de sumar dos expresiones algebraicas (cosa que no habían aprendido a hacer cuando se realizó esta experiencia) sin recurrir a las reglas sintácticas del álgebra. Podríamos además aprovechar este problema para, por ejemplo, hablar sobre la pendiente de una recta y comenzar así a ver cómo el modelo dado por la función lineal $y=mx+b$ nos ayuda a resolver algunos problemas.

MODELIZAR

Queremos que nuestros alumnos se muestren flexibles a la hora de describir e interpretar el mundo de los fenómenos que les rodean. Y, de acuerdo con Azcárate y Deulofeu (1998):

> […] todo el mundo docente coincide en considerar el papel esencial del estudio de funciones en las Matemáticas, a partir del siglo XVIII, como fuente de modelos e instrumentos que permiten describir e interpretar tanto el mundo físico como los fenómenos y las relaciones sociales.

Así pues, creemos que la modelización matemática ha de permitir desarrollar esta sensibilidad. Lo que pretendemos en este apartado es ver cómo el lenguaje algebraico puede servir para presentar y entender los modelos que nos permiten interpretar nuestro entorno.

En consonancia con estos principios, esta categoría del lenguaje algebraico debe incluir ser capaz de construir significado a partir de diferentes representaciones (gráficos, tablas, fórmulas, etc.) de un mismo fenómeno y ser capaz de transformar diferentes representaciones en otras equivalentes para comprenderlas y extraer conclusiones. Pero fijémonos que si solo hablamos de estos aspectos, no tendremos una necesidad clara de decir que el álgebra tiene que servir para modelizar y distinguir a su vez esta categoría de la del estudio de funciones. Por ejemplo, podríamos decir que cuando un alumno traduce del lenguaje verbal un problema y escribe una ecuación que servirá para resolverlo también está cambiando de representación y por lo tanto, ya estaría modelizando. Ciertamente, también podríamos decir que este proceso pertenece a la dimensión de modelización. Entonces, ¿para qué nos interesa mantener una categoría separada para el proceso de modelización?

De acuerdo con Solar, Deulofeu y Azcárate (2015) la modelización será el conjunto de fases necesarias para resolver un problema proveniente de una situación real por medio de un modelo matemático:

> El proceso de modelización se inicia generalmente con una situación extramatemática, se simplifica a un modelo real y se matematiza para obtener un modelo matemático; se resuelve la situación dentro del modelo y se interpreta la solución de una forma coherente con la situación inicial; finalmente se evalúa si responde con la situación original.

Así, volviendo a la cuestión anterior, los procesos que generan una necesidad esencialmente diferente al respecto del uso del lenguaje algebraico del resto de categorías son los que hemos llamado matematizar e interpretar en la figura 9.

Cerrar el círculo de la modelización completo y llegar hasta este punto de motivación con nuestros alumnos puede ser costoso en cuanto al tiempo necesario para hacerlo, pero creemos que vale la pena que esto pase

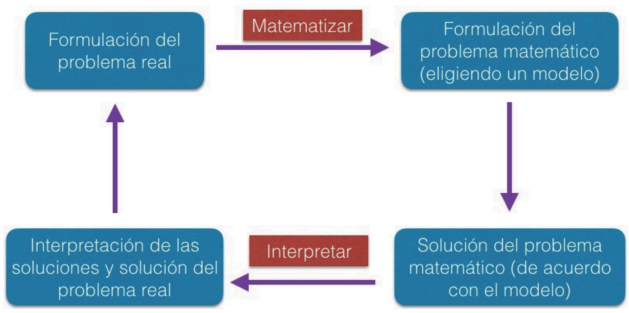


Figura 9. El proceso de modelización

aunque sean unas pocas veces durante su educación obligatoria. Por lo tanto, habría que buscar contextos donde se den estas situaciones y la complejidad de las mismas esté al alcance de nuestros alumnos.

Un ejemplo de tarea que podríamos llevar a cabo con nuestros alumnos para hacer emerger las diferentes fases del proceso de modelización en nuestras aulas es el estudio de la relación existente entre la frecuencia del sonido obtenido tocando una cuerda de una guitarra y la longitud de la misma. La relación entre estas dos variables es de proporcionalidad inversa y, concretamente, si llamamos L a la longitud de la cuerda, y F a la frecuencia, tenemos que $F = K / L$, siendo K una constante que depende de la cuerda particular. Podemos usar esta idea en el aula midiendo la frecuencia con cualquier medidor digital (por ejemplo, usando una aplicación para teléfono móvil) y viendo cómo varía la frecuencia en función de dónde estemos pulsando la cuerda de la guitarra. Así los alumnos podrán acabar encontrando la relación anterior con una cuerda concreta. Luego les podríamos pedir que, ya sin usar el medidor de frecuencias digitales, hagan el mismo proceso con otra cuerda y que representen la información que relaciona frecuencia y longitud de forma verbal, gráficamente, en una tabla de valores y también a través de una expresión algebraica. Solo habrá que darles un dato, por ejemplo la frecuencia que corresponde a la cuerda de la guitarra al sonar suelta. En la figura 10 podemos ver el resultado de esta tarea planteada en una clase de 2.º de ESO. En mi opinión es en esta parte del experimento donde el profesor tiene la oportunidad de convencer a los alumnos del interés que tiene el uso de este modelo matemático, en el momento en que gracias a las matemáticas podemos estudiar el fenómeno sin tener que repetir el experimento.

Consideremos ahora la familia de rectángulos que tienen área K cm^2 (rectángulos equivalentes). Si consideramos la relación entre la base (b) y la altura (a) de estos rectángulos, de nuevo obtenemos la relación $a = K / b$.

En la figura 11 vemos la representación gráfica que se hizo implementando esta actividad en la misma aula de 2.º de ESO en la que se propuso el trabajo que hemos mostrado anteriormente. Se pidió que se construyesen muchos rectángulos equivalentes de área 36 cm^2 para luego juntarlos todos y estudiar la relación que se obtenía entre área y altura observando el vértice del rectángulo que queda más alejado del origen de coordenadas si los colocamos tal y como vemos en la imagen.

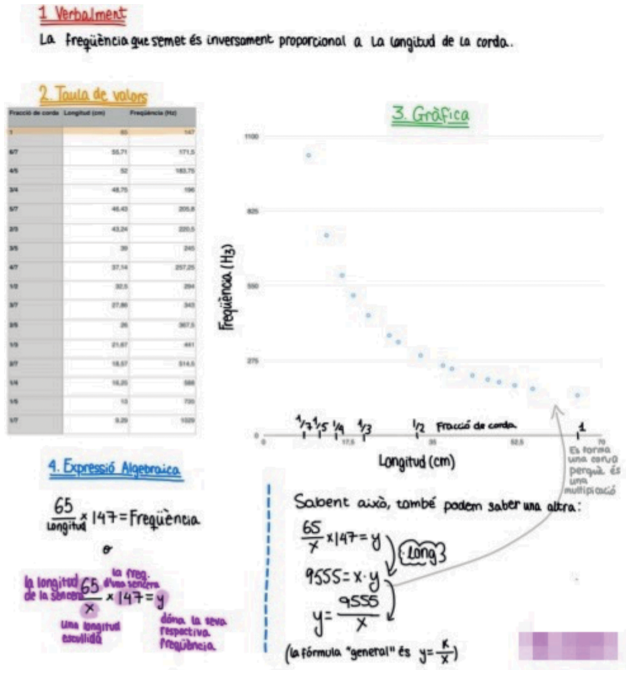


Figura 10. Diferentes representaciones de la relación entre la longitud de una cuerda de una guitarra y la frecuencia que emite al tocarla

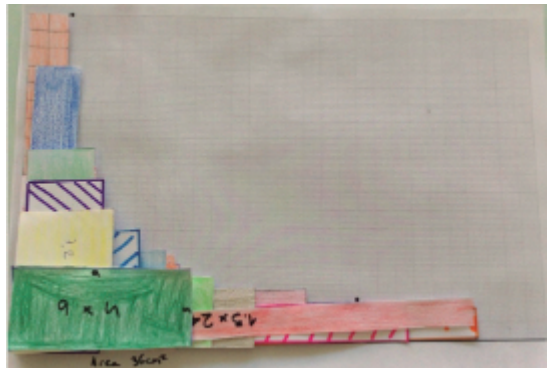


Figura 11. Rectángulos equivalentes de 36 cm^2 de área representando una función de proporcionalidad inversa

Por último, dentro de un contexto tradicional de una clase de Tecnología (o en la propia aula de Matemáticas) se podría hablar de la ley de Ohm, $V = I \cdot R$, donde I es la intesidad de la corriente (cantidad de electrones que circulan en un punto por unidad de tiempo), R es la resistencia de los materiales que forman parte del circuito y V es el voltaje que proporciona la fuente de energía. Nótese que, manteniendo constante el voltaje V, las variables I y R son inversamente proporcionales. Entonces, si en un enchufe que proporciona un voltaje constante de 220 V, ¿qué pasará si metemos los dedos? Resulta que nuestro cuerpo no ofrece casi ninguna resistencia al circuito, por lo que si la resistencia tiende a cero, la intensidad tenderá a infinito, produciendo el consecuente chispazo en el cable debido al elevado número de electrones que intentan pasar a través del mismo. De nuevo el estudio de la función de proporcionalidad inversa nos ofrece un buen modelo matemático para hacer este estudio.

Seguro que la gran mayoría de los profesores están convencidos de que el estudio la función de proporcionalidad inversa ($y = k / x$) es importante en clase de matemáticas, pero todo este recorrido por el proceso de modelización es lo que en realidad dotará de razones a los alumnos para que ellos también crean que es importante estudiar este modelo matemático y permanecer en la abstracción estudiando cómo varía la función según los diferentes valores del parámetro k de este modelo funcional.

Conclusiones

Un aspecto que cabe destacar de las diferentes categorías que hemos querido evidenciar en el aprendizaje del álgebra, es el orden que hemos escogido para su formulación. Siempre que diseñamos un proceso de enseñanza-aprendizaje tenemos que determinar una secuencia. Esto se da con un carácter más general cuando se secuencia un curso completo o incluso una etapa educativa, y con un carácter más específico cuando lo que se secuencia es solo una unidad didáctica o una tarea concreta. Entendemos que el desarrollo de la competencia algebraica exige una determinada secuenciación. Por eso, el orden que hemos seguido a la hora de determinar cuáles son las habilidades que debemos desarrollar para que los alumnos construyan el álgebra no es aleatorio. Así, para que un alumno pueda comprender el proceso de resolución de ecuaciones, debe en primer lugar ser capaz de dar significado a letras y símbolos, y para ello tiene que haberlos usado para comunicar generalizaciones. De la misma manera, difícilmente un alumno podrá darle significado a un modelo matemático en el que necesite comprender los parámetros de una determinada función si antes no ha tenido experiencias con el lenguaje algebraico para expresar funciones. Esta secuencia de habilidades es la que hemos querido ejemplificar en este artículo. Sin embargo, es importante repetir que esta secuenciación no tiene por qué ser única. Podría haber otras igualmente válidas, siempre que tengan en cuenta las características del diseño que hemos señalado.

Por otro lado, y con respecto a la secuenciación de la que hablábamos, es habitual argumentar que los problemas que los alumnos pueden resolver mediante operaciones aritméticas no son buenos problemas para introducir el uso del álgebra (Puig y Cerdan, 1990). En esta investigación hemos demostrado lo contrario: hay problemas que se pueden resolver sin usar el álgebra pero que, sin embargo, dotan a los alumnos de las habilidades necesarias para desarrollar el lenguaje algebraico (de la Fuente, Deulofeu y Rowland, 2016).

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2008), «Modelling with graphical representations», *For the Learning of Mathematics,* n.º 28, (2), FLM Publishing Association, Edmonton.

Azcárate, C., y J. Deulofeu (1998). *Matemáticas ESO. Guías Praxis para el profesorado*, Praxis, Barcelona.

Cobo, P., J. Comellas, J. Giménez, J. Serra, M. Sol y X. Vilella (2005), «Algebra a l'ESO per tothom. Reinventant a partir del context», *NouBiaix*, n.º 24, 41-47.

DE LA FUENTE, A. (2016), *Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del profesor*, Tesis Doctoral, UAB.

DE LA FUENTE, A., J. DEULOFEU y T. ROWLAND (2016), «Developing algebraic language in a problem solving environment: the role of teacher knowledge», *Proceedings of the Bristish Society for Research into Learning Mathematics*, vol. 36, n.º 1, Manchester, 25-30.

KAPUT, J. (2000), *Teaching and learning a new algebra with understanding,* University of Massachussets-Dartmouth.

KIERAN, C. (1992), «The learning and teaching of school algebra», en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Investigation on mathematics teaching and learning*, Macmillan, Nueva York, 390-419.

MASON, J., L. BURTON y K. STACEY (1992), *Pensar matemáticamente*, Editorial Labor, Barcelona.

NACIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2003), *Principios y estándares para la Educación Matemática*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Sevilla.

PUIG, L., y F. CERDÁN (1990), *Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales*, Conferencia invitada al grupo de Álgebra del Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática, Cuernavaca, Morelos, México, 12-14 de julio de 1990.

SCHOENFELD, A. H., y A. ARCAVI (1988), «On the Meaning of Variable», *Mathematics Teacher*, septiembre 1988, 420-427.

SESSA, C. (2005), *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra: orígenes y perspectivas*, Libros del Zorzal, Argentina, Buenos Aires.

SOLAR, H., J. DEULOFEU y C. AZCÁRATE (2015), «Competencia de modelización en interpretación de gráficas funcionales», *Enseñanza de las ciencias* n.º 33.2, 191-210.

VILA, A., y M. L. CALLEJO (2004), *Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas*, Editorial Narcea, Madrid.

Abraham de la Fuente Pérez
Universitat Autònoma de Barcelona
Institut-Escola Costa i Llobera, Barcelona
<abrahamfp@gmail.com>

seccione S



MUJERES MATEMÁTICAS:
ROMPIENDO MOLDES

Anne Lucy Bosworth Focke, la primera y brillante alumna de David Hilbert

Marta Macho Stadler

SUMA+ núm. 99
pp. 63-66
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2021 y aceptado en enero de 2022

Anne Lucy Bosworth nació el 29 de septiembre de 1868 en Woonsocket (Rhode Island, EE. UU.). Fue la única hija (que sobrevivió) del matrimonio formado por Ellen Metcalf (1842-1929) y Alfred Bosworth (1845-1872). Ellen enviudó en 1872 y comenzó a trabajar como bibliotecaria. Anne Lucy creció en un entorno femenino junto a su madre, su tía Anna y su abuela materna que también había enviudado.

Estudió en el Woonsocket High School, la única escuela secundaria pública de Woonsocket. Se graduó en el Wellesley College[1] en 1890, en la misma clase que las matemáticas Grace Andrews[2] y Clara Latimer Bacon[3].

Trabajó durante los dos años siguientes como profesora en la escuela de secundaria Amesbury High School de Massachusetts. Fue nombrada instructora de matemáticas en el Rhode Island College of Agri-



Figura 1. Anne Lucy Bosworth Focke.
Fuente: University Rhode Island
<https://digitalcommons.uri.edu/photographs/1/>

culture and Mechanic Arts (actualmente la Universidad de Rhode Island) a principios de 1892.

Mientras continuaba trabajando, Bosworth consiguió su título de máster en la Universidad de Chicago, estudiando durante los veranos de 1894 a 1896 con los matemáticos Eliakim Hastings Moore[4] y Oskar Bolza[5].

En 1898 solicitó un permiso de trabajo para viajar a la Universidad de Gotinga (Alemania). Se desplazó a Europa acompañada por su madre. Allí asistió a los cursos de los matemáticos Felix Klein[6], Arthur Moritz Schönflies[7], Issai Schur[8] y del físico Woldemar Voigt[9]. También siguió las clases de geometría no euclidiana impartidas por David Hilbert[10].

En la primavera de 1899, Hilbert la animó a realizar sus exámenes de doctorado: el matemático había propuesto a Anne Lucy un ejercicio especial relacionado con su curso y ella lo había resuelto con un enfoque totalmente original. Para Hilbert, la solución presentada por su alumna era perfectamente aceptable como tesis. La disertación de Bosworth (*Begründung einer vom Parallelenaxiome unabhängigen Streckenrechnung, Justificación de un tipo de cálculo independiente del axioma de las paralelas*) fue defendida el 31 de julio de 1899. Anne Lucy obtuvo su título de doctora en 1900. Hilbert, que formó parte de su tribunal de tesis y calificó esta disertación como «[…]un logro sólido e independiente de valor científico».

De hecho, Anne Lucy fue la primera estudiante de doctorado de Hilbert. Más adelante, el grupo de las alumnas del matemático (de las setenta y seis tesis que supervisó) incluyó a otras cinco mujeres:

1. Nadeschda Gernet[11], con su disertación *Untersuchung zur Variationsrechnung. Über eine neue Methode in der Variationsrechnung* (*Sobre un nuevo método en el cálculo de variaciones*), defendida en Gotinga en 1902;
2. Vera Myller[12], con *Die Theorie der Integralgleichungen in Anwendungen auf einige Reihenentwickelungen* (*Aplicación de la teoría de ecuaciones integrales a algunas expansiones de series*), presentada en 1906;
3. Margarete Kahn[13], con *Eine allgemeine Methode zur Untersuchung der Gestalten algebraischer Kurven (Un método general para estudiar las formas de curvas algebraicas),* defendida en 1909;
4. Klara Löbenstein[14], con *Über den Satz, daß eine ebene, algebraische Kurve 6. Ordnung mit 11 sich einander ausschließenden Ovalen nicht existiert* (*Sobre la proposición de que no existe una curva algebraica plana de grado seis con 11 ramas mutuamente separadas*), presentada en 1910; y
5. Eva Koehler, con *Absolute und relative Bewegung (Movimiento absoluto y relativo),* defendida en 1912.

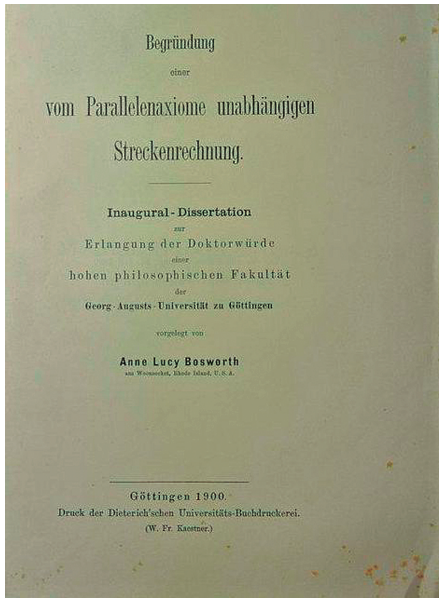

Begründung
einer
vom Parallelenaxiome unabhängigen
Streckenrechnung.
Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
einer
hohen philosophischen Fakultät
der
Georg-Augusts-Universität zu Göttingen
vorgelegt von
Anne Lucy Bosworth
aus Woonsocket, Rhode Island, U. S. A.
Göttingen 1900.
Druck der Dieterich'schen Universitäts-Buchdruckerei.
(W. Fr. Kaestner.)

Figura 2. Portada de *Begründung einer vom Parallelenaxiome unabgängigen Streckenrechnung* (1900) de Anne Lucy Bosworth
Fuente: Iberlibro <https://www.iberlibro.com/Begr%C3%BCndung-Parallelenaxiome-unabg%C3%A4ngigen-Streckenrechnung-Bosworth-Anne/30255726627/bd>

Tras defender su tesis doctoral Anne Lucy Bosworth y su madre regresaron a Rhode Island.

En 1901 Anne Lucy contrajo matrimonio con Theodore Moses Focke (1871-1949), un ingeniero civil y

matemático al que había conocido en Gotinga mientras él estudiaba matemáticas y física.

Focke fue contratado como profesor en la universidad privada Case Institute of Technology en Cleveland (Ohio). Anne Lucy abandonó su trabajo académico, aunque ayudaba a su marido en la corrección de ejercicios y exámenes. Se dedicó a cuidar de sus tres hijos Helen (1902-1997), Theodore (1904-1986) y Alfred (1906-1986).

Falleció el 15 de mayo de 1907 a causa de una neumonía. Como ha sucedido a tantas otras mujeres, el matrimonio apartó a Anne Lucy Bosworth (que pasó a ser Anne Lucy Focke) de una más que previsible brillante carrera científica.

Referencias bibliográficas

Anne Bosworth Focke, Wikipedia <https://en.wikipedia.org/wiki/Anne_Bosworth_Focke> [consultado el 22 de diciembre de 2021].

Green, J., y J. Laduke (2009), «Focke, Anne (Bosworth), September 29, 1868 – May 15, 1907» <https://books.google.es/books?id=IR-bOAwAAQBAJ&pg=PA175&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false>, *Pioneering Women in American Mathematics: The Pre-1940 PhD's,* American Mathematical Soc., 175–176.

Macho, M. (2021), «Anne Lucy Bosworth Focke, la primera estudiante de David Hilbert», *Mujeres con ciencia, Vidas científicas,* 26 de octubre de 2021. <https://mujeresconciencia.com/2021/10/26/anne-lucy-bosworth-focke-la-primera-estudiante-de-david-hilbert/>.

O'Connor, J. J., y E. F. Robertson (2016), «Anne Lucy Bosworth Focke», *The MacTutor History of Mathematics archive,* <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bosworth/>.

Wyant, S., «Anne Lucy Bosworth Focke», *Biographies of Women Mathematicians,* Agnes Scott College, <https://www.agnesscott.edu/lriddle/women/focke.htm>.

Marta Macho Stadler
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
<marta.macho@ehu.eus>

1 *Wellesley College* es una universidad privada femenina estadounidense fundada en 1875. Algunas de sus alumnas dedicadas posteriormente a la ciencia son: la física y astrónoma Sarah Frances Whiting (1847-1927), la astrónoma Annie Jump Cannon (1863-1941), la paleontóloga Winifred Goldring (1888-1971), la microbióloga Rebecca Craighill Lancefield (1895-1981), la astrónoma Nancy Boggess (1925-2019), la matemática Erna Schneider Hoover (1926) o la científica de la computación Mary Allen Wilkes (1937).

2 Grace Andrews (1869-1951) fue una matemática estadounidense. Ella y Charlotte Angas Scott (1869-1951) fueron las dos únicas mujeres incluidas en la primera edición (1906) de *American Men of Science.* Defendió su tesis doctoral *The Primitive Double Minimal Surface of the Seventh Class and its Conjugate* en la Universidad de Columbia en 1901.

3 Clara Latimer Bacon (1866-1948) fue la primera mujer en obtener un doctorado en matemáticas en la Universidad Johns Hopkins: *The Cartesian oval and the elliptic functions p and σ.* Fue en 1911; el geómetra Frank Morley fue su tutor y la disertación se publicó en la revista *American Journal of Mathematics* en 1913.

4 Eliakim Hastings Moore (1862-1932) fue un matemático estadounidense que comenzó trabajando en álgebra abstracta, dando en 1893 la clasificación de la estructura de los cuerpos finitos. Alrededor de 1900 empezó a investigar sobre los fundamentos de la geometría: reformuló los axiomas de Hilbert para la geometría y, en 1902, demostró que uno de ellos era redundante. A partir de 1906 comenzó a trabajar en análisis; también escribió sobre geometría algebraica, teoría de números y ecuaciones integrales. Supervisó 31 tesis doctorales, incluyendo las del descubridor del teorema ergódico George Birkhoff (1884-1944), el especialista en álgebra abstracta Leonard Dickson (1874-1954), el creador del famoso «método Moore» y especialista en topología (con el que no guardaba ninguna relación de parentesco) Robert Lee Moore (1882-1974) o el matemático Oswald Veblen (1880-1960). Según el *Mathematics Genealogy Project,* a fecha de 31 de diciembre de 2021 tenía 27436 «descendientes» conocidos.

5 Oskar Bolza (1857-1942) fue un matemático alemán y alumno de Felix Klein. Es conocido por su investigación en el cálculo de variaciones.

6 Felix Klein (1849-1925) fue un matemático alemán, creador del conocido *programa de Erlangen,* un proyecto de investigación publicado en 1872 que, ante el surgimiento de las geometrías no euclidianas, proponía una definición formal de lo que es una geometría.

7 Arthur Moritz Schönflies (1853-1928) fue un matemático y cristalógrafo alemán. Estudió los grupos de movimientos en el espacio y, en 1891, dedujo los 230 grupos de simetría en tres dimensiones de manera independiente al matemático y mineralogista ruso Evgraf Stepanovich Fedorov (1853-1919). Los dos científicos cometieron errores en su clasificación y, en 1892, tras un intercambio de correspondencia entre ambos, el listado definitivo de los llamados grupos cristalográficos fue definitivamente publicado.

8 Issai Schur (1875-1941) fue un matemático alemán, especialista en teoría de grupos, combinatoria y física teórica.

9 Woldemar Voigt (1850-1919) fue un físico alemán, el descubridor del llamado efecto Voigt (fenómeno magneto-óptico que gira y eliptiza la luz polarizada linealmente enviada a un medio ópticamente activo). Fue la primera persona en usar el término *tensor*.

10 David Hilbert (1862-1943) fue un matemático alemán, uno de los más influyentes del siglo XIX y principios del XX, trabajando en un gran conjunto de ideas. En 1900 propuso una colección de 23 problemas abiertos que influyó en el desarrollo de gran parte de la investigación matemática del siglo XX.

11 Nadeschda Gernet (1877-1943) fue una matemática rusa. En su tesis doctoral extendió el cálculo de variaciones a algunas funciones, siendo una de las primeras personas en incluir desigualdades en cálculo variacional.

12 Vera Myller (1880-1970) fue una matemática rusa cuya tesis doctoral trataba sobre ecuaciones integrales. Fue la primera profesora universitaria en Rumania.

13 Margarete Kahn (1880-1942) fue una matemática alemana, víctima del Holocausto. Fue especialista en geometría algebraica. Junto a la matemática alemana Klara Löbenstein (1883-1968) realizó una contribución al decimosexto problema de Hilbert <https://es.wikipedia.org/wiki/Decimosexto_problema_de_Hilbert>, proponiendo métodos para abordarlo. Este problema, aún no resuelto, trata sobre la topología de las curvas algebraicas en el plano proyectivo complejo.

14 Klara Löbenstein (1883-1968) fue una matemática alemana cuya tesis se centró en la topología de curvas algebraicas. Emigró a Argentina en 1941, lo que le evitó ser víctima del Holocausto, como lo fue su amiga Margarete Kahn.

Creatividad y tareas. Una dialéctica necesaria

MMACA

SUMA+ núm. 99
pp. 67-72
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2021 y aceptado en enero de 2022

Este artículo le debe mucho a una propuesta de taller que Guido Ramellini debería haber realizado en el ámbito del Congreso C2EM. El formato no presencial que se tuvo que escoger, le aconsejó aparcar el taller a la espera de una mejor ocasión. También le pareció que transformar el taller en una comunicación era el equivalente a explicar un chiste malo: puede que lo entienda más gente, pero no tiene tanta gracia. ¿Pasará lo mismo con el artículo? Nos dijo: ¡Acepto el riesgo, siempre con la ayuda inestimable de mis compañeros y compañeras del MMACA!

La actividad central en la que se inspira el título deriva de muchos *inputs*. Los principales son:

— Los debates con las compañeras de la Comunidad de Prácticas Matemáticas y Ciencias Experimentales de 0 a 8 años: educadoras de guarderías, preescolar y primaria, formadoras, docentes universitarias, educadoras y creadoras de materiales educativos de ámbito no-formal, etc. Las medidas anti-Covid han acabado antes de tiempo con el proyecto; pero se han dejado unas ideas interesantes para desarrollar en los ámbitos de las escuelas y de los museos de ciencias.
— Los debates sobre la creación y el pilotaje de los prototipos para la Maleta Educativa «MK» del MMACA, destinada al alumnado de los cursos P3 a P5 (3-6 años).[1]
— Las experiencias recogidas de la exposición y los talleres del MMACA para el alumnado de las primeras etapas de la escuela primaria.
— Una actividad propuesta de la fuente inagotable de NRICH: *A Town of Houses* <https://nrich.maths.org/183>, reto para niños de 5-7 años (figura 1).[2]

Empieza con un enunciado muy sencillo: sobre una base de dos cuadrados ir apilando más cuadrados,

como si fueran habitaciones de unas casas (torres) y con la condición de que a cada habitante le corresponde una habitación. El reto consiste en construir edificios de 7 habitaciones (cuadrados).

¿Qué es lo que me gusta de esta propuesta?

— Que se debe de colocar un *número impar* de cuadrados (evitando las estructuras simétricas que parecen más intuitivas y condicionan la búsqueda de propuestas diferentes).
— Que es un *reto abierto*. Podemos dirigir la actividad (tareas) o dejarla a la libre interpretación (creatividad), empezando por utilizar colores (de 0 a 7) o las posibles simetrías.[2]
En este sentido, después de una fase de libre experimentación, es necesario negociar unas reglas: cuántos colores, cuándo considerar una estructura diferente de otra, etc. También es necesario que quien guía el taller tenga claro sus objetivos: ¿combinatoria (colores) o estructuras (geometría)?

¿Qué es lo que no me gusta?

— Que se hable de edificios y se proponga un modelo bidimensional: cuadrados dibujados en una hoja cuadriculada.

Aun entendiendo las razones del formato ficha escogido por la gente de NRICH, pensé en alternativas, ya que esta actividad puede representar un ejemplo claro de la importancia del material y el enfoque en el desarrollo de una actividad.

¿Qué pasaría si trabajamos con materiales manipulables, que permitan estructuras en 3D?

Cambiando el material, ¿se orientaría la actividad hacia otros aprendizajes y a confrontarse con la realidad (nuestras casas; las casas que nos gustarían; sus dimensiones, etc)?

El taller nace también de estas preguntas (y, como he dicho, de la apuesta —ambiciosa— de lograr enriquecer una actividad propuesta por NRICH).

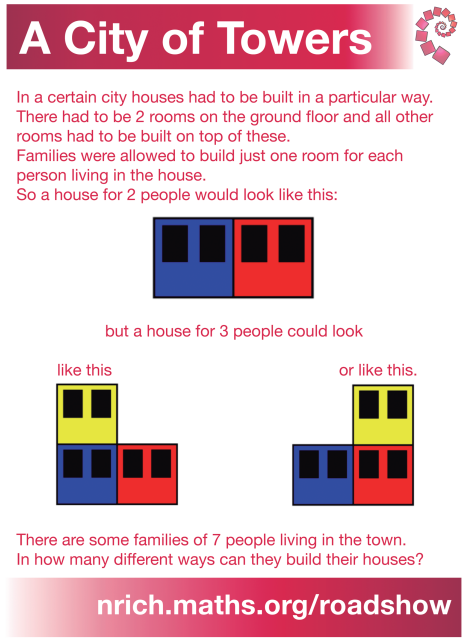


Figura 1. La página de NRICH con el original del reto

Escoger el material

Si nos quedamos con el reto original, el material que escogería es el geoplano, sin que esto represente una gran ventaja respecto a la hoja de papel y el lápiz.

Quizás sea más inmediato que nazcan (o se induzcan) preguntas sobre el área y los perímetros de las distintas estructuras (figura 2). En especial si pedimos que solo marquen el contorno global de la estructura que han construido (figura 3).[3]

El reto se puede acompañar con una actividad clásica de combinatoria para el aula: el *puzle de los 9 cuadrados,* cuyos objetivos se pueden fácilmente adaptar a las diferentes etapas educativas:

— Construir un cuadrado 3×3.
— Confrontar diferentes soluciones: ¿Qué significa «diferente»?
— Construir otras figuras geométricas.
— Eliminar los 3 cuadrados que se repiten.

— Comprobar que los 6 cuadrados restantes representan las 6 posibles permutaciones circulares de 4 colores.
— Comprobar que los 6 cuadrados restantes, pueden formar las seis caras de un cubo (manteniendo el reto de combinar colores) (figura 4)…

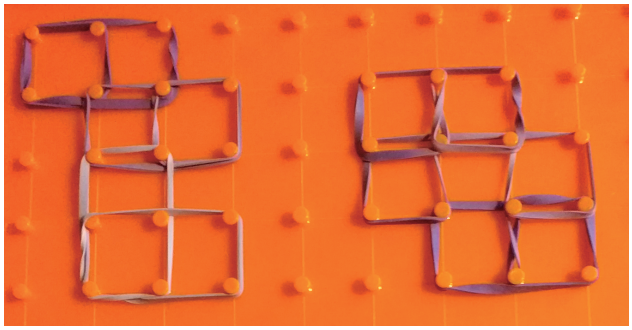


Figura 2. Construcción de los «edificios» (unidades) con gomas y geoplano

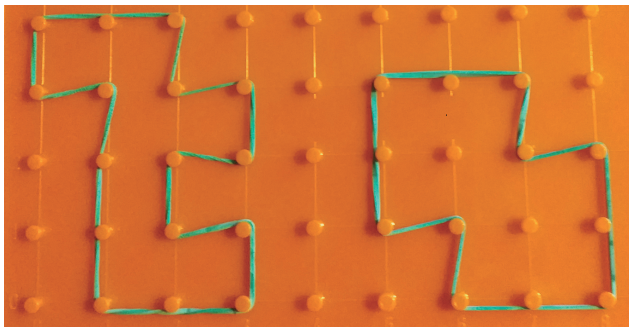


Figura 3. Construcción de los «edificios» (contornos) con gomas y geoplano

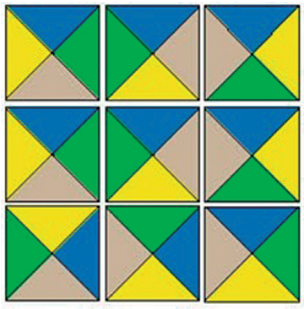


Figura 4. El puzle de los 9 cuadrados (diagonales)

La actividad se puede ampliar con el puzle de la figura 5. Su sencillez esconde alguna interesante sorpresa:

— ¿Puedes construir un rectángulo 3×2?
— ¿Completan el cubo las caras escondidas?

Para profundizar en el tema de las permutaciones para un alumnado de la ESO, puede ser interesante pasar a construir pentágonos de 5 colores: ¿Cuántas permutaciones son posibles? ¿Hay algún algoritmo para calcularlo? Los distintos pentágonos obtenidos, ¿se pueden dividir en dos grupos? ¿En base a qué variable? ¿Generará cada grupo un cuerpo sólido? ¿Cuáles? (figura 6)...

Vuelta al reto inicial

Volviendo al reto inicial, como ya se mencionó, pienso que es más interesante pasar a la construcción de estructuras tridimensionales, utilizando, por ejemplo, siete Multilinks (figura 7)[4].



Figura 5. El puzle de los 6 cuadrados (medianas) y el cubo que forman

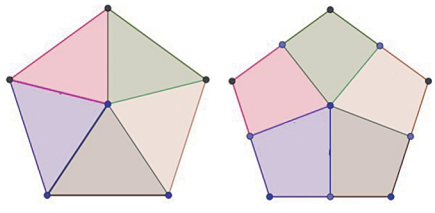


Figura 6. Construcción con GeoGebra de las piezas del puzle de pentágonos

Piezas de dos o tres colores deberían ser suficientes para dejar espacio a creatividad y deseo de asombrar, para luego comenzar a establecer reglas y asumir tareas de investigación que permitan comparar estructuras similares, pero no iguales, para identificar sus características.

También con este material hay una actividad para el aula clásica e interesante: la de construir prismas con 8 Multilinks y comprobar cuál de ellos tiene menor área.

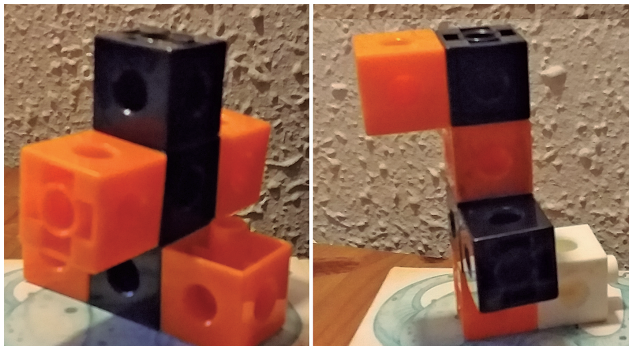


Figura 7. «Edificios» construidos con 6 Multilinks

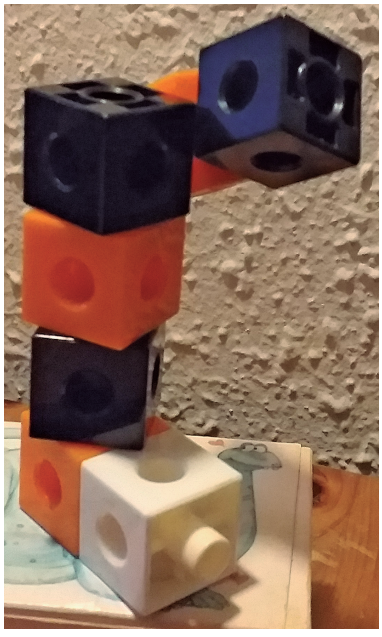


Figura 8. Ejemplo de estructura con 7 Multilinks encajados de manera menos convencional

Después de haber confrontado las tres posibles estructuras ($1 \times 1 \times 8$; $1 \times 2 \times 4$ y $2 \times 2 \times 2$), la actividad se puede ampliar a construcciones irregulares y observar cómo se mantienen determinadas características (abanico de posibles variaciones del área total, que siempre asume valores pares, área mínima…).

Si seguimos considerando la actividad del taller como una simulación de edificios, abrimos el debate a otras áreas matemáticas, como el de las medidas:

— ¿Qué superficie tendrá nuestro edificio de siete cubos?
— ¿Qué superficie tendrá cada habitación?
— ¿Qué volumen? ¿Son medidas realistas?
— ¿Cuánto suelo ocupará?

Pero, no solo esto:

— ¿Qué uso le daremos a cada unidad[5]?
— ¿Qué uso asignamos a nuestro edificio?
— ¿Cuáles son las ventajas económicas (valor/coste), sociales (inclusividad), estéticas..., de las diferentes estructuras?
— ¿Cuánto mide una habitación de nuestras casas (mínimos y máximos)? ¿Y nuestra aula?
— ¿Cómo organizaríamos nuestros edificios si los uniéramos todos para hacer una aldea? ¿Mantendríamos el mismo criterio de distribución y estructuras utilizado para cada edificio[6]?

Incluso sin subestimar el deseo de excentricidad de algunas mentes jóvenes, a veces útil para descubrir hasta dónde es interesante llevar la investigación, este material también manifiesta límites constructivos que restringen la variabilidad —aunque suficiente— de las posibles estructuras.

Material alternativo

Una posible alternativa a los Multilinks puede ser el Duplo, la estructura de Lego de mayor tamaño, generalmente destinada a niños más pequeños y, sin

querer aprovechar la situación, se diría que, para ampliar la variabilidad (creatividad) de la actividad, una vez más es necesario volver a la infancia (figura 9).

Evidentemente, vamos a seguir jugando a simular edificios. En este sentido, las piezas del Duplo tienen una ventaja respecto a los Multilinks: ¡no son cubos!

Cada unidad tiene una base de 3,3 cm, pero una altura de 1,8 cm. Si usamos un factor de transformación 1 :200, nuestras unidades tendrán una superficie de 36 m^2 y una altura de 3,6 m, aún excesiva, pero más cercana a la realidad que no si fuera de 6 m, como resultaría usando cubos[7].

La transición de Multilinks a Duplo es un buen ejemplo de cómo se puede mejorar una actividad manteniendo los objetivos, las preguntas y los retos, pero cambiando el material utilizado[8]. Un buen material potencia el primer momento de diálogo (entre el material y el usuario), motivando más actividad, y mejora las comunicaciones posteriores: colaboración, comparación entre productos, discusión, intercambio y optimización.

Soy consciente de que el uso de un solo material (cuadrados dibujados, Multilinks o Duplo) evidentemente reduce el estímulo a la creatividad que proponen otras actividades, más orientadas al *Tinkering*[9], como los Minimons[10] o la *Città Infinita*[11].

Sin embargo, considero interesante que esta versión más pobre, pero accesible y rápida de montar, se pueda proponer para el alumnado de diferentes etapas escolares.

Desde este punto de vista propongo un último reto (doble), sencillo y bonito de montar con Duplo, pero una vez más, sin que este material sea imprescindible[12].

Se trata de construir una pirámide con 10 unidades Duplo: 4 amarillas, 3 verdes, 2 rojas y 1 azul (por ejemplo), para que las piezas del mismo color no se toquen entre sí (figura 10).

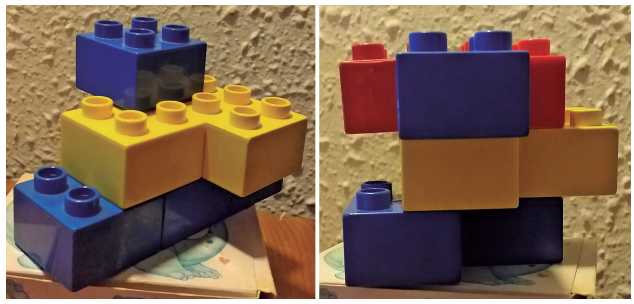


Figura 9. Ejemplo de estructura con 7 piezas de Duplo

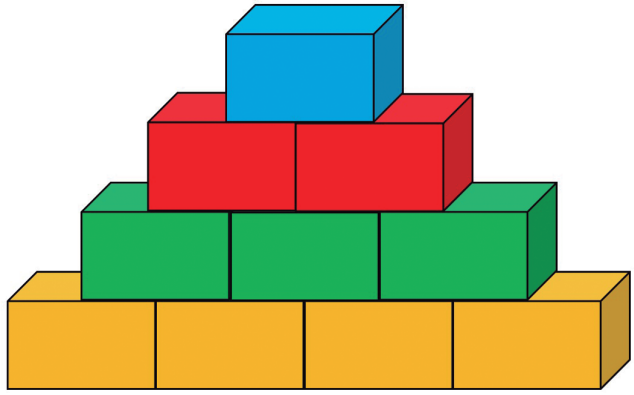


Figura 10. Estructura de pirámide con 10 Duplos (4 colores)

Una vez hecho, nos podemos preguntar si sería posible encontrar una solución con tan solo 3 colores y con qué color se puede sustituir la pieza azul.

Conclusiones

Siempre me cuesta establecer conclusiones sobre aquello que no son más que relatos de experiencias didácticas, generalmente realizadas, observadas y discutidas. Tengo la sensación de transformarlos en monumentos graníticos de severas entidades, que acaban cumpliendo un papel nada apasionante, a uso exclusivo de las aves.

Más difícil aún en este caso, donde la propuesta no se ha materializado y se nutre de la ligereza[13] y ambición de las ideas.

Su única pretensión es alimentar el bello debate entre ejercicios y problemas, creatividad y eficacia, implicación y colaboración, habilidades y competencias.

Creo que esta experiencia permite también reflexionar sobre el necesario diálogo entre materiales y actividades. No dudo que se pueda diseñar una actividad rica e interesante aun disponiendo de materiales comunes, muy poco sofisticados. Por otro lado, las características intrínsecas de un material pueden condicionar el desarrollo de una actividad, favoreciendo su enriquecimiento, pero especialmente los procesos de comprensión de un problema, de conceptualización (hasta llegar a formular algoritmos o procesos computacionales). Y sin embargo no debemos olvidarnos que es necesario que llegue el momento de abandonar los materiales para dejar sitio a la abstracción. Aun así, mejor conservarlos a buen recaudo y en un sitio donde sea fácil encontrarlos, en el caso que nos convenga recuperar el proceso del *hands-on* al *mind-on*.

De todos modos, la actividad aquí propuesta no tiene tantas ambiciones, así que me limito a «dejar algo ahí y marcharme».

Si alguien decide leer este artículo y realizar las actividades, que saque sus propias conclusiones, pero antes: ¡que las disfrute!

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya,
Cornellá de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

1 Como en otros casos, le debo a David Barba que me señalara el reto. Confío plenamente en su incansable búsqueda y en sus criterios de selección de los retos más interesantes y productivos.

2 En el mismo ejemplo del enunciado, ¿las dos imágenes, con 3 cuadrados de diferente colores, representan la misma estructura —vista delante y detrás (= rotación de 180°)— o dos estructuras diferentes?

3 Figuras con solo el contorno dibujado estimulan una evaluación más dinámica del área, por bloques.

4 Indicaciones interesantes sobre el pre-conocimiento, las actitudes o incluso solo los gustos de nuestros alumnos, pueden provenir de la observación de cuántos colores están presentes en los siete cubos que ha elegido cada uno. Es posible que sus elecciones, favoreciendo la forma, el color, el realismo..., nos den pistas de sus futuras vocaciones.

5 Es fácil pensar que vamos a registrar versiones reducidas de Versailles: ¡cien habitaciones y ni un solo cuarto de baño!

6 Las discusiones y mediaciones, necesarias en este caso para diseñar un proyecto colectivo, representan unos de los principales (si no el principal) logros de la actividad

7 Siempre soy muy prudente abordando el tema de «llevar la realidad a la escuela». En general, los fenómenos reales de todo tipo tienen un grado de complejidad difícil de manejar (y no solo en las etapas de escolarización obligatoria). Por eso opino que más vale contentarse conscientemente con proponer modelos a través de simulaciones: serán tanto mejores como más parecidos a la realidad, pero con una complejidad menor y controlada.

8 Sin embargo, este cambio de material no es imprescindible y la actividad sigue siendo válida incluso sin contar con todos los recursos mencionados.

9 <https://educaixa.org/es/-/tinkering-crear-y-pensar-con-las-manos>.

10 <https://ajuntament.barcelona.cat/escolesbressol/ca/ebmharmonia/new/3074>.

11 <https://www.facebook.com/lacittainfinita.es>.

12 De nuevo, la actividad/tarea puede ir precedida de una actividad/investigación libre de qué hacer con las 10 piezas.

13 Ítalo Calvino dedica la primera de sus *Seis propuestas para un nuevo milenio* (1985) a la ligereza, entendida como lo contrario de la pedantería, no de la solidez, y que nunca debe confundirse con lo fútil, lo efímero o lo superfluo. «Toma la vida con suavidad. Que ligereza no es la superficialidad, sino deslizarse sobre las cosas desde arriba, no tener piedras en el corazón. [...] Para mí, la ligereza está asociada con la precisión y la determinación, no con la vaguedad y el abandono al azar. Paul Valéry dijo: *Il faut etre léger comme l'oiseau, et non comme la plume* [Debes ser ligero como un pájaro y no como una pluma].»

Modelización matemática con grafos en Maxima

Esperanza López Centella

SUMA+ núm. 99
pp. 73-82
Artículo solicitado por *Suma* en diciembre de 2021 y aceptado en febrero de 2022

En el marco del programa ESTALMAT, en este artículo presentamos una propuesta didáctica para el trabajo de la modelización matemática con grafos en el sistema de álgebra computacional Maxima (López, 2018). Se muestran distintas formas de definir un grafo en Maxima así como una variedad de nociones sobre grafos susceptibles de ser exploradas a través de dicho sistema en una sesión de enriquecimiento curricular. Se plantean actividades contextualizadas cuya resolución se simplifica a través de la construcción de modelos basados en grafos.

En efecto, los grafos y la teoría desarrollada en torno a ellos constituyen una poderosa herramienta matemática mediante la cual, a través de la programación, se modelizan gran cantidad de situaciones de nuestra vida cotidiana. En consonancia con esto, el currículo español de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (MECD, 2014) incluye una introducción al cálculo matricial en varias materias de Matemáticas, y al uso de lenguajes de programación y diseño de programas en distintas materias de Tecnología. Asimismo, el reciente informe sobre bases para la elaboración de un currículo de matemáticas en educación preuniversitaria del Comité Español de Matemáticas (Calvo y otros, 2021) refiere explícitamente al uso de grafos para la resolución de problemas, recalcando su importancia en la actividad de modelización matemática.

Maxima es un sistema de álgebra computacional de alta precisión para la manipulación de expresiones simbólicas y numéricas. Está basado en el sistema original de Macsyma desarrollado por el Instituto Tecnológico de Massachusetts en los años 70. Puede graficar funciones y datos en dos y tres dimensiones. El código fuente de Maxima puede ser compilado en varios sistemas operativos como Windows, Linux y MacOS X. El código fuente para todos los sistemas y los binarios precompilados para Windows y

Linux están disponibles *online* en el Administrador de archivos de SourceForge. Maxima funciona en modo consola (interfaz de línea de comandos), aunque también cuenta con las interfaces gráficas xMaxima y wxMaxima (entre otras opciones) para facilitar su uso. En la presente propuesta trabajamos con wxMaxima.

Definición de un grafo en Maxima

Para trabajar con grafos en Maxima hemos de cargar el paquete «graphs»:

```
→ load(graphs)$
```

Antes de abordar otras actividades, conviene revisar las distintas formas de definir grafos en este sistema. A continuación estudiamos algunas de ellas.

GRAFO A PARTIR DE SUS VÉRTICES Y SUS LADOS

La función create_graph nos permite definir un grafo a partir de las dos listas que recibe como argumento: la lista de sus vértices y la lista de sus lados. Nótese que cada lado es, a su vez, una lista (de longitud 2) de los vértices que une. La siguiente línea de comando crea un triángulo (grafo completo de tres vértices), denominado *C3*.

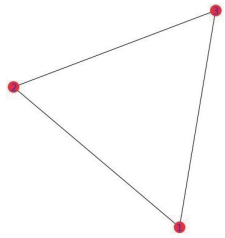
```
→ C3:create_graph([1,2,3],[[1,2],[2,3],[3,1]]);
Output:
GRAPH\(3 vertices, 3 edges\)
```

Mediante el uso de la función print_graph obtenemos información del grafo C3:

```
→print_graph(C3);
Output:
Graph on 3 vertices with 3 edges.
Adjacencies:
 1 : 3  2
 2 : 3  1
 3 : 1  2
```

Para representar gráficamente un grafo podemos emplear la función draw_graph. Si activamos la opción show_id en la función se mostrarán las etiquetas de los vértices:

```
→ draw_graph(C3, show_id=true);
Output:
```

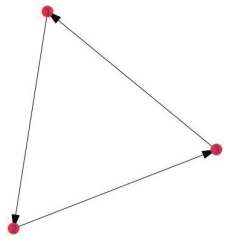


Usando la opción directed en la función create_graph, podemos obtener una versión dirigida del grafo anterior:

```
→ T3:create_graph([1,2,3],[[1,2],[2,3],[3,1]],
directed=true);
Output:
DIGRAPH\(3 vertices, 3 arcs\)

→ print_graph(T3);
Output:
Digraph on 3 vertices with 3 arcs.
Adjacencies:
 1 : 2
 2 : 3
 3 : 1

→ draw_graph(T3, directed=true,show_id=true);
Output:
```



GRAFOS A PARTIR DE SU MATRIZ DE ADYACENCIA

Otra de las posibilidades que ofrece Maxima para crear un grafo es hacerlo a partir de su matriz de adyacencia mediante la función from_adjacency_matrix. Las siguientes líneas de comandos crean y dibujan el grafo completo de 4 vértices.

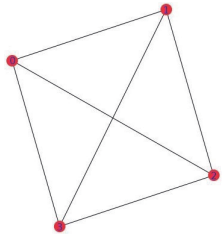
```
→ A:matrix([0,1,1,1],[1,0,1,1],[1,1,0,1],[1,1,1,0]);
```
Output:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
→C4: from_adjacency_matrix(A);
```
Output:
GRAPH(4 vertices, 6 edges\)

```
→ print_graph(C4);
```
Output:
Graph on 4 vertices with 6 edges.
Adjacencies:
3 : 2 1 0
2 : 3 1 0
1 : 3 2 0
0 : 3 2 1

```
→ draw_graph(C4,show_id=true);
```
Output:



GRAFOS A PARTIR DE SUS VÉRTICES Y UNA FUNCIÓN BOOLEANA QUE DETERMINA SUS LADOS

Maxima también permite definir un grafo a partir de un conjunto de vértices V y una función booleana de dos variables definida sobre el producto cartesiano $V \times V$. Esta función determina las conexiones entre los vértices (es decir, las aristas), considerando arista del grafo aquella cuyos vértices satisfacen la condición de la función booleana. Las siguientes líneas de comandos muestran un ejemplo de esto, donde para expresar la condición en cuestión se han utilizado la función booleana **is** (devuelve *true* si la condición de su argumento es satisfecha y *false* en caso contrario) y la función módulo **mod** (devuelve el resto de la división de su primer argumento entre su segundo argumento).

```
→ b(u,v):=is(mod(u+v,3)=0)$

→ G:make_graph(makelist(i,i,0,9),b);
```
Output:
GRAPH\(10 vertices, 15 edges\)

```
→ print_graph(G);
```
Output:
Graph on 10 vertices with 15 edges.
Adjacencies:
0 : 3 6 9
1 : 2 5 8
2 : 1 4 7
3 : 0 6 9
4 : 2 5 8
5 : 1 4 7
6 : 0 3 9
7 : 2 5 8
8 : 1 4 7
9 : 0 3 6

Como vemos, el recién creado grafo G consta de 10 vértices, de forma que los vértices u y v están unidos por una arista si y solo si la suma $u+v$ módulo 3 es igual a 0 (es decir, si dicha suma es múltiplo de 3).

GRAFOS PREDEFINIDOS EN MAXIMA

Maxima cuenta con funciones predefinidas de algunos tipos de grafos. A continuación se listan algunos ejemplos.

- **complete_graph(n)**: crea el grafo completo de n vértices.
- **complete_bipartite_graph(m,n)**: define el grafo bipartito completo con particiones de m y n vértices.
- **complement_graph(G)**: establece el grafo complementario del grafo G.
- **path_graph(n)**: crea un grafo que es un camino de longitud $n-1$ (con n vértices).
- **path_digraph(n)**: define un grafo que es un camino dirigido de longitud $n-1$ (con n vértices).
- **cycle_graph(n)**: genera un grafo que es un ciclo de n vértices.
- **cycle_digraph(n)**: produce un grafo dirigido que es un ciclo de n vértices.
- **cube_graph(n)**: crea el grafo correspondiente al n-cubo (hipercubo n-dimensional).

La figura 1 muestra una representación gráfica de grafos definidos por algunas de las funciones anteriores.

Nociones sobre grafos en Maxima

Una vez definido un grafo en Maxima, podemos utilizar distintas funciones para obtener información acerca de este. He aquí algunas de ellas.

- **vertices(G)**: devuelve la lista de vértices del grafo *G*.
- **edges(G)**: proporciona la lista de aristas del grafo *G*.
- **remove_edge([u,v],G)**: elimina la arista [u,v] del grafo *G*.
- **induced_subgraph(V,G)**: define el subgrafo de *G* que tiene como conjunto de vértices *V*.
- **vertex_degree(n,G)**: devuelve el grado del vértice *n* del grafo *G*.
- **degree_sequence(G)**: proporciona una lista con los grados de los vértices del grafo *G*.
- **adjacency_matrix(G)**: provee la matriz de adyacencia del grafo *G*.
- **hamilton_cycle(G)**: devuelve un ciclo de Hamilton del grafo *G* o una lista vacía si el grafo *G* no es hamiltoniano.
- **hamilton_path(G)**: facilita una lista secuenciada de vértices que forman un camino de Hamilton en el grafo *G*.
- **shortest_path(u,v,G)**: devuelve el camino más corto entre los vértices *u* y *v* del grafo *G*.
- **is_isomorphic(G,G')**: informa si los grafos *G* y *G'* son isomorfos (por medio de los valores *true* y *false*).
- **isomorphism(G,G')**: devuelve un isomorfismo entre los grafos *G* y *G'* o una lista vacía si estos no son isomorfos.
- **is_bipartite(G)**: informa si el grafo *G* es bipartito (mediante los valores *true* y *false*).
- **bipartition(G)**: proporciona una partición de *G* o una lista vacía si *G* no es bipartito.
- **is_connected(G)**: informa si el grafo *G* es conexo (a través de los valores *true* y *false*).
- **connected_components(G)**: devuelve una lista con las listas de los vértices que forman las componentes conexas de *G*.
- **chromatic_number(G)**: devuelve el número cromático del grafo *G*.
- **vertex_coloring(G)**: proporciona una lista cuyo primer argumento es el número cromático del grafo *G* y su segundo argumento una lista representando una coloración del grafo (indicando el correspondiente «color» de cada vértice mediante un número).

Modelización con grafos

En esta sección construiremos un grafo que represente los posibles movimientos de un caballo de ajedrez en un tablero de juego cuadrado de 4 casillas

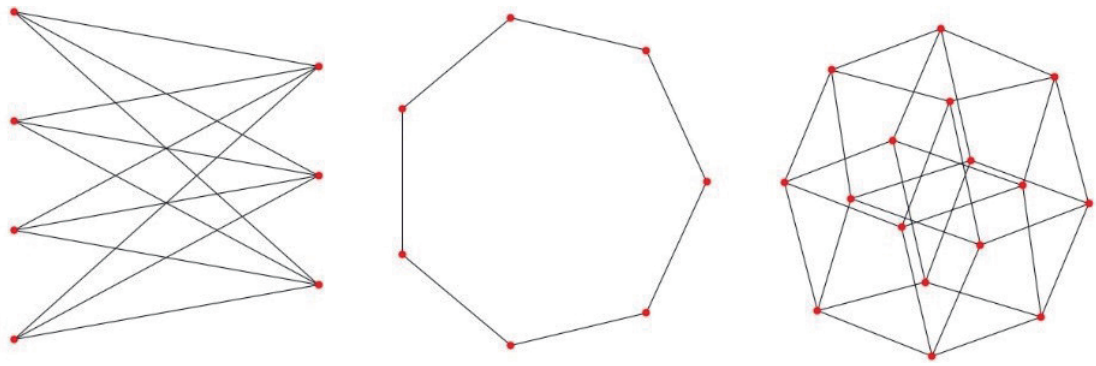


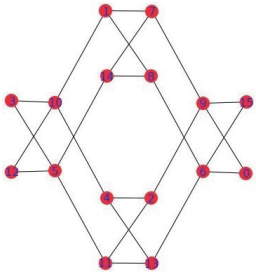
Figura 1. Representaciones gráficas del grafo bipartito completo de 3 y 4 vértices, del grafo cíclico de 7 vértices y del grafo correspondiente al teseracto (cubo tetradimensional en un espacio de cuatro dimensiones espaciales)

por lado (4×4). Para ello, enumeramos de 0 a 15 las 16 casillas del tablero como muestra la figura 2.

A cada casilla asociamos un punto etiquetado con el número de la casilla y lo consideramos como vértice del grafo. Dos vértices están unidos por un lado si están conectados por un movimiento de caballo de ajedrez entre las casillas correspondientes. Por ejemplo, en el tablero de ajedrez representado en la figura 2, el vértice 0 está unido a los vértices 6 y 9; el vértice 1 a los vértices 7, 8 y 10; y así sucesivamente. Las siguientes líneas de comando definen y dibujan el grafo:

```
→ caballo_ajedrez_4×4:create_graph
(makelist(i,i,0,15),[[0,6],[0,9],[1,7],[1,8],[1,10],[2,4],
[2,9],[2,11],[3,5],[3,10],[4,10],[4,13],[5,11],[5,12],
[5,14],[6,8],[6,13],[6,15],[7,9],[7,14],[8,14],[9,15],
[10,12],[11,13]]);
Output:
GRAPH\(16 vertices, 24 edges\)
```

```
→ draw_graph(caballo_ajedrez_4×4,show_id=true);
Output:
```



12	13	14	15
8	9	10	11
4	5	6	7
0	1	2	3

Figura 2. Tablero de ajedrez 4×4 con casillas enumeradas

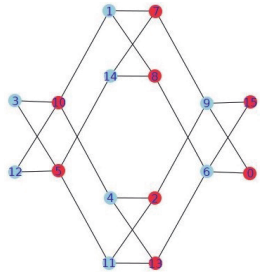
Habida cuenta de que cada casilla de un tablero de ajedrez es de uno de dos colores (típicamente, blanco y negro), que estos colores se manifiestan de forma alterna en las casillas y que en cada movimiento un caballo se desplaza desde una casilla de un color a una casilla del otro color, el número cromático del grafo caballo_ajedrez_4×4 es 2:

```
→ vertex_coloring(caballo_ajedrez_4×4);
Output:
[2,[[15,2],[14,1],[13,2],[12,1],[11,1],[10,2],[9,1],[8,2],
[7,2],[6,1],[5,2],[4,1],[3,1],[2,2],[1,1],[0,2]]]
```

Es decir, el grafo es bipartito y la siguiente resulta una bipartición del mismo:

```
→ [x,y]:bipartition(caballo_ajedrez_4×4);
Output:
[[14,12,4,11,3,1,6,9],[15,7,2,13,5,10,8,0]]
```

```
→ draw_graph(ajedrez,show_vertices=
x,show_id=true)
Output:
```



Puede comprobarse cómo los vértices de grado 2 se corresponden con las 4 esquinas del tablero, los vértices de grado 4 con las 4 casillas centrales y los vértices de grado 3 son el resto de casillas. Definamos una función que devuelva los vértices de un grado específico n en un grafo dado G:

```
→ gr(G,n):=block([V],
f(x):=is(vertex_degree(x,G)=n),
V:setify(vertices(G)),
L:subset(V,f),
return(L));
```

Nótese que en la definición de la función se han usado las funciones auxiliares **setify** para convertir una lista en conjunto, y **subset**, para obtener los elementos de un conjunto que satisfacen una función booleana. Aplicando nuestra recién definida función sobre el grafo **caballo_ajedrez_4×4**, obtenemos:

```
→ gr(caballo_ajedrez_4×4,2);
Output:
{0,3,12,15}

→ gr(caballo_ajedrez_4×4,3);
Output:
{1,2,4,7,8,11,13,14}

→ gr(caballo_ajedrez_4×4,4);
Output:
{5,6,9,10}
```

No es posible para un caballo de ajedrez recorrer el tablero sin repetir casilla y regresar a la casilla inicial:

```
→ hamilton_cycle(caballo_ajedrez_4×4);
Output:
[]
```

Tampoco lo es omitiendo la condición de regreso a la casilla inicial:

```
→ hamilton_path(caballo_ajedrez_4×4);
Output:
[]
```

Actividades

Los movimientos del caballo de ajedrez

Construir un grafo que represente los movimientos de un caballo de ajedrez en un tablero de ajedrez generalizado $m \times n$ para cualesquiera números naturales m y n.

A continuación se sugieren algunos pasos orientativos para el alumnado en la realización de esta actividad.

1. Numerar las casillas del tablero. En el tablero representado en la figura 3, estas han sido numeradas de 0 a $mn-1$, de izquierda a derecha y de abajo a arriba. A cada casilla se asigna un punto y se etiqueta con el correspondiente número de casilla. Estos puntos constituyen el conjunto de vértices del grafo solicitado.
2. Definir una función booleana **caballo** que, aplicada a dos valores x e y, devuelva *true* si la casilla x puede ser conectada mediante un movimiento de caballo de ajedrez con la casilla y, y *false* en caso contrario. Para ello resulta de utilidad escribir en función de x los valores de las posibles casillas destino con origen en x (figura 3): $y_{1,x} = x-2+n$, $y_{2,x} = x-1+2n$, $y_{3,x} = x+1+2n$, $y_{4,x} = x+2+n$, $y_{5,x} = x-2-n$, $y_{6,x} = x-1-2n$, $y_{7,x} = x+1-2n$, $y_{8,x} = x+2-n$. Para que x esté conectado con y es necesario que y sea alguno

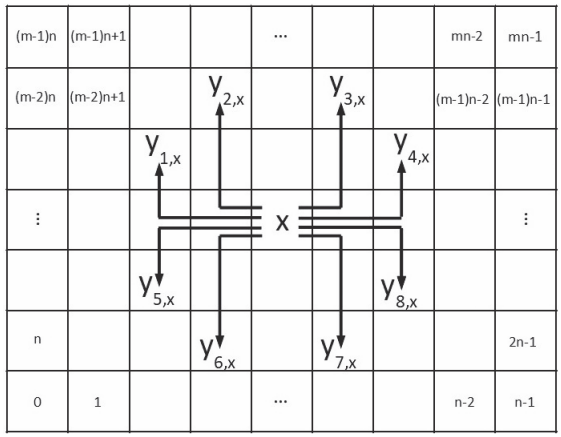


Figura 3. Representación de un tablero de ajedrez $m \times n$ numerado

de esos valores. Pero esta condición podría no ser suficiente: la posición de x también puede añadir restricciones. Si x no fuera ningún valor de las casillas del interior del tablero (representadas en color blanco en la figura 4), entonces algunos de esos valores $y_{i,x}$ podrían no tener sentido.

Para comprobar la posición de x en el tablero, podemos ayudarnos de la numeración del tablero, la función **mod** y las relaciones numéricas, tal y como se muestra en la tabla 1. Naturalmente, si x está en la intersección de dos de las bandas distinguidas en la tabla 1, sus posibles casillas destino son aquellas en común entre las correspondientes de estas dos bandas.

La función **caballo** debería incluir un conveniente diseño de filtros para identificar el argumento x en esta casuística, y entonces comparar el argumento y con los correspondientes valores $y_{i,x}$ según el caso. Si como fruto de esta comparación la función **caballo** detecta una igualdad, debería devolver *true*; en otro caso, debería devolver *false*.

3. A partir de la función **caballo**, definir la función **caballo_ajedrez** que, aplicada a cualesquiera dos números naturales m y n, devuelva el grafo de $m \cdot n$ vértices tal que dos vértices del grafo están unidos por una arista si y solo si pueden ser conectados a través de un movimiento de caballo de ajedrez. Este grafo podría ser definido aprovechando lo descrito en la sección anterior dedicada a los grafos a partir de sus vértices.

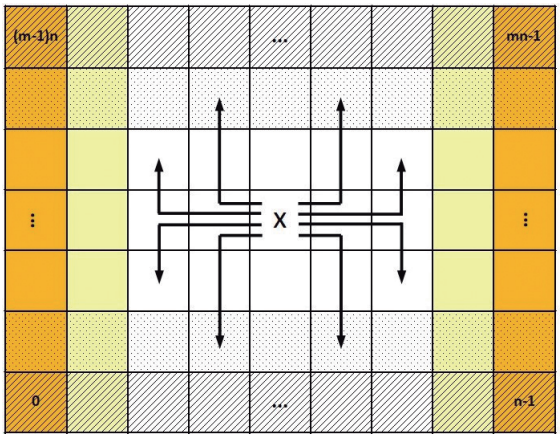


Figura 4. Zonas límite (naranja, amarilla, rayada y punteada) para los movimientos de un caballo de ajedrez

Posición de x	*Condición*	*Posibles casillas destino con origen x*
Banda naranja izquierda	$\text{mod}(x,n)=0$	$y_{3,x}, y_{4,x}, y_{7,x}, y_{8,x}$
Banda naranja derecha	$\text{mod}(x,n)=n-1$	$y_{1,x}, y_{2,x}, y_{5,x}, y_{6,x}$
Banda amarilla izquierda	$\text{mod}(x,n)=1$	$y_{2,x}, y_{3,x}, y_{4,x}, y_{6,x}, y_{7,x}, y_{8,x}$
Banda amarilla derecha	$\text{mod}(x,n)=n-2$	$y_{1,x}, y_{2,x}, y_{3,x}, y_{5,x}, y_{6,x}, y_{7,x}$
Banda rayada superior	$n \leq mn-1-x \leq 0$	$y_{5,x}, y_{6,x}, y_{7,x}, y_{8,x}$
Banda rayada inferior	$0 \leq x \leq n-1$	$y_{1,x}, y_{4,x}, y_{5,x}, y_{6,x}, y_{7,x}, y_{8,x}$
Banda punteada superior	$2n \leq mn-1-x \leq n$	$y_{1,x}, y_{2,x}, y_{3,x}, y_{4,x}, y_{5,x}, y_{8,x}$
Banda punteada inferior	$n \leq x \leq 2n-1$	$y_{1,x}, y_{2,x}, y_{3,x}, y_{4,x}$

Tabla 1. Relaciones entre posición de x y condición satisfecha por x en un tablero $m \times n$ numerado como en la figura 3

Organización de equipos

A una prueba de duatlón acude un grupo de diez amigos deportistas, cinco de ellos atletas: Alicia (A), Berta (B), Celia (C), Darío (D) y Eloy (E); y cinco de ellos ciclistas: Felipe (F), Gema (G), Hugo (H), Ignacio (I) y Julia (J). Cada equipo participante en la prueba ha de estar formado por un atleta y un ciclista. De acuerdo con las fortalezas y debilidades de cada uno de los deportistas, consideran lo siguiente para formar equipos óptimos: A debe asociarse con F, G, H; B debe asociarse con G, I; C debe asociarse con F, G; D debe asociarse con G, I ,J; E debe asociarse con F, G, H.

a. Definir y representar gráficamente el grafo que modeliza la situación anterior, representando cada persona por un vértice.

b. ¿Es posible conformar cinco equipos óptimos para competir a la vez en la prueba? En caso afirmativo, indicar tales equipos. En caso contrario, encontrar el número máximo de equipos posibles cumpliendo las condiciones planteadas.

c. ¿Es posible la situación descrita en el punto (b) anterior si Darío forma equipo con Ignacio? En caso afirmativo, especificar el resto de equipos. En caso contrario, hallar el número máximo de equipos posibles satisfaciendo las condiciones planteadas.

d. Al grupo se incorporan tres nuevos atletas: Lucía (L), Marta (M) y Norberto (N), y tres nuevos ciclistas: Omar (O), Paula (P) y Quintín (Q) quedando el esquema del siguiente modo: A debe asociarse con F, G, H, O; B debe asociarse con G, I; C debe asociarse con F, G, O; D debe asociarse con G, I, J; E debe asociarse con F, G, H, O, P, Q; L debe asociarse con I, O; M debe asociarse con J; N debe asociarse con G, I, J, O. Resolver las tres cuestiones anteriores en esta situación.

e. ¿Cuál es el número mínimo de pruebas de duatlón precisas para que cada uno de los ocho atletas se asocie con todos y cada uno de los ciclistas con quienes forma un equipo óptimo?

Como se indica en el propio enunciado de la actividad, la situación descrita puede ser modelizada por medio de un grafo cuyos vértices son representados por cada uno de los deportistas, de forma que dos vértices están conectados por una arista si los dos deportistas correspondientes forman un equipo óptimo. En Maxima podríamos definir el grafo asociado mediante el uso de la función create_graph y representarlo gráficamente a partir de draw_graph. Efectivamente, con las condiciones impuestas, puede proporcionarse un emparejamiento completo en el grafo (bipartito) definido. En el caso de que Darío únicamente forme equipo con Ignacio, la situación queda modelizada por un nuevo grafo en que D solo tiene adyacencia con I. Este nuevo grafo no admite un emparejamiento completo, siendo 4 el máximo número de equipos óptimos posibles. Se puede proceder análogamente para razonar sobre la situación con las nuevas incorporaciones. Por último, para conocer el mínimo número de pruebas de duatlón precisas para que cada atleta se asocie con todos y cada uno de los ciclistas con quienes forma un equipo óptimo, recurrimos a una arista coloración del grafo y a su índice cromático.

Planificación de exámenes

Cada estudiante de un grupo de clase ha de realizar un examen de cada una de las materias en que está matriculado. Por normativa de evaluación, el examen de una materia ha de ser realizado a la vez por todo el alumnado matriculado; y el alumnado tiene derecho a no realizar dos exámenes el mismo día. Las materias (13) son: Arquitectura, Biología, Ciencias Naturales, Dibujo, Economía, Francés, Geografía, Historia, Inglés, Jardinería, Lengua y Literatura, Matemáticas y Neurología. Todo el alumnado está matriculado en las materias de Matemáticas y de Lengua y Literatura. Además, tienen alumnado en común las materias de Arquitectura y Dibujo; las de Biología y Ciencias Naturales; las de Biología y Neurología; las de Ciencias Naturales y Neurología; las de Economía e Historia; las de Francés e Inglés. ¿Cuál es la mínima cantidad de días de examen necesarios para satisfacer estas condiciones?

Podemos modelizar esta situación a través de un grafo cuyos vértices son las distintas materias, de manera que exista una arista de uno a otro vértice si en sus correspondientes materias hay alumnado matriculado en común. El color asignado a cada arista representará un día, de forma que el número cromático del grafo da respuesta a la cuestión del problema, es decir, informa de la cantidad mínima

de días de examen necesarios para satisfacer las condiciones de la normativa de evaluación. He aquí la correspondencia del modelo con el problema: dos materias (vértices) no deben celebrar su examen el mismo día (tener el mismo color asignado) si hay alumnado en común matriculado en ambas (son adyacentes, es decir, están conectados por una misma arista).

Glosario

En este apéndice se listan las definiciones de algunas nociones sobre grafos mencionadas en el texto (Burgos y otros, 2016; Deo, 1974).

Grafo: un grafo G es una terna (V, E, f_G), donde V y E son conjuntos y f_G una aplicación $E \to V \times V$. A V se le llama conjunto de vértices, a E conjunto de lados o aristas y a f_G aplicación de incidencia (que informa de las conexiones por aristas de los vértices).

Grafo dirigido (o *digrafo*): es aquel grafo cuyas aristas tienen un sentido definido de forma que las relaciones entre sus vértices no son simétricas como en un grafo general. Un grafo dirigido queda definido por sus conjuntos V y E de vértices y aristas respectivamente y dos aplicaciones $s, t: E \to V$ (*source* y *target*, que indican el origen y el destino de cada arista).

Grafo completo: grafo donde cada par de vértices está conectado por una arista.

Grafo complementario de un grafo G: grafo formado por el mismo conjunto de vértices que el grafo G y tal que entre cualesquiera dos vértices existe una arista si y solo si no la existe en el grafo G.

Grafo conexo: aquel en que existe al menos un camino entre cualesquiera dos de sus vértices.

Matriz de adyacencia: la matriz de adyacencia de un grafo con conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es aquella matriz cuadrada de orden n cuyo coeficiente (i, j) es igual al número de aristas que unen v_i con v_j.

Grafos isomorfos: se dice que dos grafos $G = (V, E, f_G)$ y $G' = (V', E', f_{G'})$ son isomorfos si existen dos biyecciones $h_V: V \to V'$ y $h_E: E \to E'$ tales que para cada arista $e \in E$ se verifica que $f_{G'}(h_E(e)) = \{h_V(u), h_V(v)\}$ donde $\{u, v\} = f_G(e)$. En tal caso se dice que las aplicaciones h_V y h_E forman un isomorfismo de G a G'.

Grado de un vértice: se define el grado de un vértice v de un grafo G como el número de lados (no lazos) de G que son incidentes en v más 2 veces el número de lazos incidentes en v.

Grafo bipartito: aquel grafo $G = (V, E, f_G)$ tal que es posible descomponer V en dos subconjuntos disjuntos V_1 y V_2 de forma que todo lado de G incide en un vértice de V_1 y en un vértice de V_2.

Grafo bipartito completo: aquel grafo $G = (V, E, f_G)$ bipartito tal que para cada $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ (siendo $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \varnothing$) existe $e \in E$ tal que $f_G(e) = \{v_1, v_2\}$.

Vértice coloración de un grafo: asignación de colores a los vértices de un grafo tal que dos vértices que compartan la misma arista tengan colores diferentes. Así, una coloración del grafo $G = (V, E, f_G)$ es una aplicación $c: V \to C$ donde C es un conjunto, de tal forma que para cualquier $e \in E$, si $f_G(e) = \{u, v\}$ con $u \neq v$ entonces $c(u) \neq c(v)$.

Arista coloración de un grafo: asignación de colores a las aristas de un grafo tal que las aristas incidentes en el mismo vértice tengan un color distinto.

Número cromático de un grafo: número mínimo de colores necesarios para una vértice coloración del grafo.

Índice cromático de un grafo: número mínimo de colores necesarios para una arista coloración del grafo.

Camino de longitud n: en un grafo $G = (V, E, f_G)$ es una sucesión de lados $e_1 e_2 \ldots e_n$ tales que $f_G(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ para una sucesión de vértices $v_0 v_1 \ldots v_n$. En tal caso

se dice que el camino $e_1 e_2 \dots e_n$ es un camino del vértice v_0 al vértice v_n.

Ciclo: camino en que no aparecen lados repetidos ni vértices repetidos (salvo el primero y el último) en el que el primer vértice coincide con el último.

Camino de Hamilton: camino que recorre todos los vértices de un grafo una sola vez.

Agradecimientos

Agradezco sinceramente el apoyo de los compañeros del Departamento de Álgebra de la Universidad de Granada —y, en particular, el de Jesús García Miranda— quienes compartieron conmigo parte del material que inspira este trabajo, así como el apoyo del grupo de investigación FQM-193 «Pensamiento Numérico – Didáctica de la Matemática» del que soy miembro.

Referencias bibliográficas

Burgos, M., J. García, P. A. García y J. C. Rosales (2016), *Matemática Discreta y Álgebra Lineal*, Universidad de Granada, Granada.

Calvo, C., A. Carrillo de Albornoz, A. de La Fuente, M. de León, M. J. González, A. Gordaliza, I. Guevara, C. Lázaro, O. Monzó, A. J. Moreno, J. L. Rodríguez, J. Rodríguez y A. Serradó (2021), *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria,* Comité Español de Matemáticas.

Deo, N. (1974), *Graph theory with applications to enginneering and computer sciences*, Prentice-Hall, New Jersey.

López, E. (2018), «Trabajando grafos con Maxima», en F. España (editor), *Actas del XVII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Matemáticas en tierra de cine*, Universidad de Almería, Almería.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, BOE.

Esperanza López Centella
Universidad de Granada
<esperanza@ugr.es>

¿Qué hay de la calculadora en la legislación educativa?

Eva García Cabañas
M.ª Cristina Naya Riveiro
María Sotos Serrano

SUMA+ núm. 99
pp. 83-90
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2021 y aceptado en enero de 2022

Desde hace varios años, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) constituyó un equipo de trabajo para promover el uso de la calculadora en Educación Primaria (E. P.) y Educación Infantil con la División Educativa CASIO España. Este grupo de trabajo se enmarcó en el seminario *La calculadora como recurso didáctico en Educación Primaria* que concluyó el pasado noviembre del año 2021, pero su labor sigue totalmente activa, prueba de ello son los numerosos trabajos que se vienen publicando en esta sección.

Además de las experiencias de aula que se realizan y publican, promocionando los diferentes usos de la calculadora en estas etapas educativas, y los cursos de formación que se ofrecen[1], se propuso también como objetivo del grupo realizar un análisis sobre el papel que juega la calculadora en la legislación educativa de las distintas comunidades y ciudades autónomas. Fruto de este trabajo es la publicación que se presenta.

Marco nacional educativo

La Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE), aprobada en 2013, modifica la Ley Orgánica de Educación (LOE) del año 2006, no la deroga, por lo que actualmente conviven ambas leyes. Esta ley regula el sistema educativo y establece las competencias educativas que ejerce el Gobierno y el reparto de estas en el diseño del currículum básico de E. P.

Así, en el ordenamiento jurídico vigente, en relación con el currículo de E. P., la presencia de la calculadora es un hecho relativamente generalizado. A nivel estatal, aparece en el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la E. P. y en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la E. P. Concretamente, en el Real Decreto 1513/2006 se recoge en el Anexo II en la descripción

del área de Matemáticas, por primera vez, en la parte *Contribución del área al desarrollo de las competencias básicas:* «[…] En menor escala, la iniciación al uso de calculadoras y de herramientas tecnológicas para facilitar la comprensión de contenidos matemáticos, está también unida al desarrollo de la competencia digital» (p. 82). Cuando se describen los contenidos se expone su uso desde el primer ciclo a través de su familiarización para la generación de series, composición y descomposición de números y en la resolución de problemas de la vida cotidiana, decidiendo sobre la conveniencia de usarla en función de la complejidad de los cálculos. También aparece en la parte de criterios de evaluación, en tercer ciclo, para comprobar la capacidad de operar con números y el conocimiento sobre la jerarquía de operaciones.

En el Real Decreto 126/2014 se recoge, en el Anexo I de Asignaturas troncales en la descripción de Matemáticas, como sigue:

1. Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. Estándares de aprendizaje evaluables.
   - 12.2. Se inicia en la utilización de la calculadora para la realización de cálculos numéricos, para aprender y para resolver problemas.
2. Bloque 2. Números. Contenido.
   - Utilización de la calculadora.
3. Bloque 2. Números. Criterio de evaluación.
   - 4. Utilizar las propiedades de las operaciones, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se usan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, estimación, calculadora).
   - 6. Operar con los números teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, aplicando las propiedades de las mismas, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, estimación, calculadora), usando el más adecuado.

Análisis: desde el marco educativo nacional al autonómico

A partir de dicha legislación nacional, también las comunidades y ciudades autónomas mencionan la calculadora en los decretos que regulan los respectivos currículos de E. P.

No obstante, lo primero que conviene señalar es que dicho ordenamiento nacional plantea el uso de la calculadora de una manera bastante limitada, como se ha expuesto, ya que solo la menciona en los bloques de contenido *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* y *Números*. En este mismo sentido, los decretos de las comunidades y ciudades autónomas también plantean el uso de la calculadora en esos mismos bloques, aunque la legislación nacional advierte de que su normativa es una propuesta de mínimos y que cada autonomía puede modificar y/o ampliar dichos mínimos. No obstante, veremos que la inmensa mayoría de las administraciones autonómicas no han tenido el atrevimiento de ampliar la propuesta inicial del gobierno nacional. En lugar de eso, en algunos casos se ha reducido la presencia de la calculadora a su mínima expresión.

Si se hace un repaso de todos estos decretos autonómicos con la única intención de observar las menciones al término «calculadora», el panorama que se obtiene es muy heterogéneo como se muestra en el gráfico de barras recogido en la figura 1.

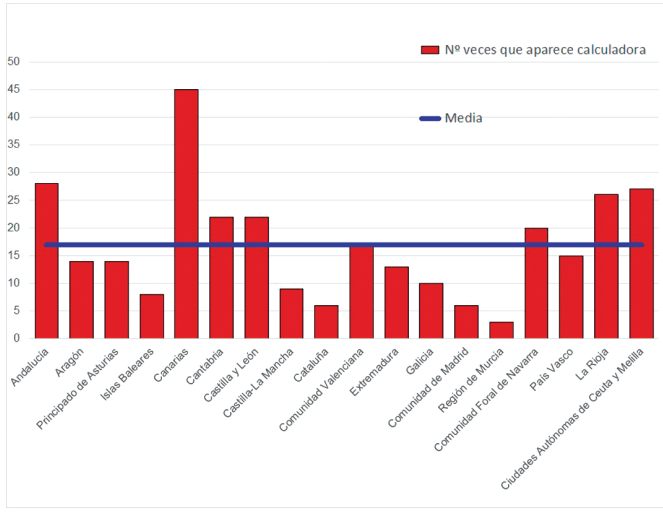


Figura 1. Diagrama de barras que representa el número de veces que aparece el término calculadora en los decretos autonómicos

En este gráfico se representa la media aritmética (la línea azul, 17 veces) y los diferentes valores absolutos, con un máximo de 45 veces en el caso de Canarias y un mínimo de 3 veces en el caso de la Región de Murcia. Esta aproximación estrictamente cuantitativa no tiene por qué reflejar la mayor o menor importancia que se otorga a la calculadora en los diferentes decretos autonómicos, pero sí que muestra las grandes diferencias que puede haber entre unos ordenamientos y otros (al menos en lo que respecta al uso de la calculadora). Por ejemplo, el caso extremo de la Región de Murcia (en cuyo decreto solo aparece 3 veces mencionada la calculadora) sí se corresponde con un planteamiento muy restrictivo del uso de la calculadora (reducido a los dos últimos cursos, 5.º y 6.º, de E. P.), mientras que, en el caso de Cataluña, que le sigue (con solo 6 menciones) el planteamiento es muy diferente, con presencia en todos los cursos de la etapa y con la novedad de figurar en el bloque de contenidos de *Estadística y probabilidad*.

Para poder analizar mejor el papel que la calculadora tiene en el currículo de E. P., hemos analizado cada uno de estos decretos a partir de una serie concreta de variables: la aparición en los planteamientos generales (objetivos y orientaciones metodológicas), la aparición en los diferentes bloques de contenido (*Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*; *Números*; *Medida*; *Geometría*; *Estadística y probabilidad*) de cada uno de los seis cursos de E. P., y los usos que se proponen de ella.

En general, los diseños curriculares autonómicos siguen los planteamientos del ordenamiento jurídico nacional, centrando la atención de esta herramienta en el bloque de contenido de *Números* y en el uso de ella como estrategia de cálculo, algo en lo que suelen coincidir todas las comunidades y ciudades autónomas. Pero la primera gran diferencia la encontramos en relación con los principios generales del currículo, que aparece explícitamente recogida esta herramienta en los decretos de las distintas comunidades y ciudades autónomas tal y como se recogen en la tabla 1.

De hecho, solo en 11 casos se menciona la calculadora al presentar los principios generales del currículo, mientras que en los siete restantes no se hace así. Aunque esto no determina el mayor o menor uso de la calculadora a lo largo de los seis cursos de E. P., sí que refleja la intención de la institución legisladora, ya que en dichos principios generales se suelen formular las líneas fundamentales del currículum y, por tanto, pueden afectar a todos los cursos y a todos los bloques de contenidos. Así, por ejemplo, en los casos en los que no se menciona la calculadora en los principios generales, tampoco aparece luego como criterio de evaluación.

Cuando pasamos a las propuestas de los cinco bloques de contenido, las diferencias también resultan significativas, desde la mención mínima que plantea la Región de Murcia (pese a que en este caso se recoge la calculadora en los principios generales, luego solo figura entre los contenidos del bloque de *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* en los cursos 5.º

	Aparece la calculadora en los principios generales del currículo	
	SÍ	NO
Andalucía	X	
Aragón	X	
Principado de Asturias	X	
Islas Baleares	X	
Canarias	X	
Cantabria		X
Castilla y León	X	
Castilla-La Mancha		X
Cataluña		X
Comunidad Valenciana	X	
Extremadura		X
Galicia		X
Comunidad de Madrid	X	
Región de Murcia	X	
Comunidad Foral de Navarra		X
País Vasco	X	
La Rioja		X
Ciudades Autónomas de Ceuta y Melilla	X	

Tabla 1. Presencia de la calculadora en los principios generales del currrículo de Educación Primaria de cada decreto autonómico

y 6.º), hasta el número máximo que recoge Canarias (con mención expresa en todos los cursos y en tres bloques de contenidos, *Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*, *Números* y *Estadística y probabilidad*). A continuación, se presenta la tabla 2 que recoge la aparición de la calculadora en los distintos bloques de contenido por decreto autonómico.

Es muy significativo detenerse en los casos excepcionales de Castilla y León, Canarias y Cataluña. Castilla y León presenta el único decreto que hace una mención expresa de la calculadora en el bloque de contenido de *Medida*, estableciendo en el 5.º curso el estándar de aprendizaje de la utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y la calculadora con contenidos relacionados con la medida. Canarias la incluye en el bloque de contenido de Estadística y probabilidad, en los dos cursos del tercer ciclo (5.º y 6.º). Figura como contenido la utilización de la calculadora y programas informáticos para cálculos y representaciones gráficas, como criterio de evaluación observar y constatar, en situaciones sencillas de juego, que hay sucesos imposibles, seguros y otros más o menos probables; realizar una estimación de la probabilidad de un suceso y comprobar, si procede, la estimación efectuada mediante el cálculo de probabilidades (se quiere comprobar que, en situaciones sencillas de juegos, utilizando fichas, cartas, dados…, el alumnado identifica si un suceso es seguro, imposible, o

	Bloques de contenido				
	Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas	Bloque 2. Números	Bloque 3. Medida	Bloque 4. Geometría	Bloque 5. Estadística y probabilidad
Andalucía	X	X			
Aragón	X	X			
Principado de Asturias	X	X			
Islas Baleares	X	X			
Canarias	X	X			X
Cantabria	X	X			
Castilla y León	X	X	X		
Castilla-La Mancha	X	X			
Cataluña		X			X
Comunidad Valenciana	X	X			
Extremadura	X	X			
Galicia	X	X			
Comunidad de Madrid		X			
Región de Murcia	X				
Comunidad Foral de Navarra	X	X			
País Vasco	X	X			
La Rioja	X	X			
Ciudades Autónomas de Ceuta y Melilla	X	X			

Tabla 2. La calculadora por bloques de contenidos

más o menos probable), hace estimaciones basadas en la experiencia sobre los resultados posibles en contextos en los que interviene el azar, y las comprueba, si procede, mediante la experimentación y el análisis de posibilidades (casos favorables entre casos posibles), realizando los cálculos necesarios con la calculadora. En el caso de Cataluña, también se incluye en el bloque de contenido de *Estadística y probabilidad* del ciclo superior (5.º y 6.º), en el contenido de selección y uso de métodos estadísticos para analizar datos, se especifica el uso de la calculadora y otros recursos digitales para la elaboración de tablas de valores y cálculo de la mediana, la media y su aplicación a la resolución de problemas.

Queda claro que se trata de contenidos en donde el uso de la calculadora resulta pertinente, pero en el resto de las comunidades y ciudades autónomas no se ha considerado así. Podría pensarse que con la mención de las calculadoras en las orientaciones metodológicas generales ya se está permitiendo su uso en todos los casos en que se considere pertinente, pero el hecho de que luego se especifiquen también en los contenidos y criterios de evaluación de cada curso o ciclo, es un claro signo de la importancia que se le otorga, máxime cuando se trata del ordenamiento jurídico de obligado cumplimiento.

Así, también pueden considerarse como casos excepcionales, en sentido inverso los de la Comunidad de Madrid y la Región de Murcia. En ambas comunidades la calculadora solo aparece en uno de los bloques de contenido, limitando así el mínimo de la propuesta del gobierno nacional cuando, en otros asuntos relacionados también con el currículo de E. P., suelen ser estrictas defensoras de lo que el gobierno nacional regula.

Lógicamente, la mayor o menor presencia de la palabra «calculadora» que se presenta en el gráfico de la figura 1 está directamente relacionada con que figure entre los contenidos de más o menos cursos escolares, ya que, en relación con los bloques de contenidos, la tónica dominante es la de limitar el uso de la calculadora a los dos primeros bloques (*Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* y *Números*), con las únicas excepciones de Castilla y León (que también lo propone en el bloque de *Medida*) y Canarias y Cataluña (que también lo proponen en el bloque de *Estadística y probabilidad*). Es probable que la limitación a los dos primeros bloques que tiene lugar en la legislación nacional ha limitado propuestas mucho más atrevidas, pese a que los bloques de *Medida* y de *Estadística y probabilidad* presentan numerosas oportunidades para el uso de la calculadora como recurso didáctico, tal y como se ha mostrado en anteriores publicaciones de esta sección.

En relación con los seis cursos de E. P., también se aprecia una cierta dualidad sobre el momento más o menos adecuado para el uso de la calculadora, que estiman los diferentes decretos. Por un lado, hay comunidades y ciudades autónomas que proponen la calculadora en todos los cursos o en casi todos, pero, por otro lado, también nos encontramos con casos en los que parece que la calculadora no tiene sentido en los ciclos inicial y medio (1.º, 2.º, 3.º y 4.º curso), como se muestra en los datos recogidos en la tabla 3.

	Cursos					
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º
Andalucía	X	X	X	X	X	X
Aragón				X		X
Principado de Asturias				X	X	X
Islas Baleares	X	X	X	X	X	X
Canarias	X	X	X	X	X	X
Cantabria	X	X	X	X	X	X
Castilla y León	X	X	X	X	X	X
Castilla-La Mancha		X	X	X	X	X
Cataluña	X	X	X	X	X	X
Comunidad Valenciana	X	X	X	X	X	X
Extremadura	X				X	X
Galicia			X	X	X	X
Comunidad de Madrid					X	X
Región de Murcia					X	X
Comunidad Foral de Navarra	X	X	X	X	X	X
País Vasco	X	X	X	X	X	X
La Rioja	X	X	X	X	X	X
Ciudades Autónomas de Ceuta y Melilla	X	X	X	X	X	X

Tabla 3. Mención de la calculadora por cursos en los distintos decretos autonómicos

Aragón, Principado de Asturias, Castilla-La Mancha, Galicia, Comunidad de Madrid y Región de Murcia (especialmente estas dos últimas, como ya se señaló antes) parece que no consideran adecuado el uso de la calculadora en las edades más tempranas, enmendando así algunas de las propuestas de estándares internacionales consolidados desde hace décadas (por ejemplo, NCTM, 2000). En el resto de los casos, la calculadora aparece desde el primer curso hasta el sexto, con algunas inexplicables lagunas en el caso de Extremadura.

Conclusiones

De esta inicial y breve descripción del papel de la calculadora en los currículos oficiales de la etapa de E. P. que existen en España, podemos extraer dos grandes conclusiones:

— En relación con los bloques de contenidos, la inmensa mayoría de comunidades y ciudades autónomas han considerado los mínimos propuestos por el gobierno nacional como los máximos a cumplir (o directamente a incumplir, como en el caso de la Comunidad de Madrid y la Región de Murcia).
— En relación con los seis cursos de esta etapa educativa, se presenta un sistema dual, con casos en los que se plantea el uso de la calculadora en todos o casi todos los cursos y otros en donde el planteamiento se restringe casi al último ciclo (5.º y 6.º curso) de E. P.

Otra cuestión muy distinta, y que no entra en el planteamiento de este artículo, es la de la implementación real en las aulas de dichas propuestas legislativas. En nuestra práctica profesional hemos encontrado numerosos casos en donde la calculadora no se utiliza como está establecido, pero no disponemos de datos cuantitativos al respecto. En este sentido, cada docente puede observar su entorno profesional más cercano y aventurar algunas conclusiones sobre esto.

Además, sin considerar bibliografía especializada ni fuentes internacionales de referencia, solo teniendo en cuenta el marco de la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, se recoge lo siguiente:

> Necesitamos propiciar las condiciones que permitan el oportuno cambio metodológico, de forma que el alumnado sea un elemento activo en el proceso de aprendizaje. Los alumnos y alumnas actuales han cambiado radicalmente en relación con los de hace una generación. La globalización y el impacto de las nuevas tecnologías hacen que sea distinta su manera de aprender, de comunicarse, de concentrar su atención o de abordar una tarea. (p. 97860)
> La tecnología ha conformado históricamente la educación y la sigue conformando. El aprendizaje personalizado y su universalización como grandes retos de la transformación educativa, así como la satisfacción de los aprendizajes en competencias no cognitivas, la adquisición de actitudes y el aprender haciendo, demandan el uso intensivo de las tecnologías. Conectar con los hábitos y experiencias de las nuevas generaciones exige una revisión en profundidad de la noción de aula y de espacio educativo, solo posible desde una lectura amplia de la función educativa de las nuevas tecnologías. (p. 94865)
> La incorporación generalizada al sistema educativo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), que tendrán en cuenta los principios de diseño para todas las personas y accesibilidad universal, permitirá personalizar la educación y adaptarla a las necesidades y al ritmo de cada alumno o alumna. Por una parte, servirá para el refuerzo y apoyo en los casos de bajo rendimiento y, por otra, permitirá expandir sin limitaciones los conocimientos transmitidos en el aula. Los alumnos y alumnas con motivación podrán así acceder, de acuerdo con su capacidad, a los recursos educativos que ofrecen ya muchas instituciones en los planos nacional e internacional. Las Tecnologías de la Información y la Comunicación serán una pieza fundamental para producir el cambio metodológico que lleve a conseguir el objetivo de mejora de la calidad educativa. Asimismo, el uso responsable y ordenado de estas nuevas tecnologías por parte de los alumnos y alumnas debe estar presente en todo el sistema educativo. (p. 97865)

Cada uno puede reflexionar y concluir sobre las directrices expuestas sobre el uso que se demanda de las herramientas TIC, y la calculadora es una de ellas, además de ser accesible para la amplia mayoría de nuestro alumnado y no como otras que dependen de un soporte más costoso, como puede ser un móvil, tablet u ordenador, incidiendo en la responsabilidad

que tenemos como docentes que debemos formar a la ciudadanía del futuro.

Referencias bibliográficas

Decreto 24/2014, de 13 de junio, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de La Rioja, Boletín Oficial de La Rioja, n.º 74, 16 de junio de 2014.

Decreto 27/2014, de 5 de junio, que establece el currículo de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Cantabria, Boletín Oficial de Cantabria, n.º 29, de 13 de junio de 2014.

Decreto 32/2014 de 18 de julio, por el que se establece el currículo de la educación primaria en las Illes Balears, Boletín Oficial de las Islas Baleares, n.º 97, 19 de julio de 2014.

Decreto 54/2014, de 10 de julio de 2014, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha, Diario Oficial de Castilla-La Mancha, n.º 132, 11 de julio de 2014.

Decreto Foral 60/2014, de 16 de julio, por el que se establece el currículo de las enseñanzas de Educación Primaria en la Comunidad Foral de Navarra, Boletín Oficial de Navarra, n.º 174, 5 de septiembre de 2014.

Decreto 82/2014, de 28 de agosto, por el que se regula la ordenación y establece el currículo de la Educación Primaria en el Principado de Asturias, Boletín Oficial del Principado de Asturias, n.º 202, 30 de agosto de 2014.

Decreto 89/2014, de 24 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el Currículo de la Educación Primaria, Boletín Oficial de la Comunidad de Madrid, n.º 175, 25 de julio de 2014.

Decreto 89/2014, de 1 de agosto, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias, Boletín Oficial de Canarias, n.º 156, 13 de agosto de 2014.

Decreto 103/2014, de 10 de junio, por el que se establece el currículo de Educación Primaria para la Comunidad Autónoma de Extremadura, Boletín Oficial de Extremadura, n.º 114, 16 de junio de 2014.

Decreto 105/2014, de 4 de septiembre, por el que se establece el currículo de la educación primaria en la Comunidad Autónoma de Galicia. Diario Oficial de Galicia, n.º 171, 9 de septiembre de 2014.

Decreto 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunitat Valenciana, Diario Oficial de la Comunitat Valenciana, n.º 7311, 7 de julio de 2014.

Decreto 198/2014, de 5 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia, Boletín Oficial de la Región de Murcia, n.º 206, 6 de septiembre de 2014.

Decreto 97/2015, de 3 de marzo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, n.º 50, 13 de marzo de 2015.

Decreto 119/2015, de 23 de junio, de ordenación de las enseñanzas de la Educación Primaria en Cataluña, Diario Oficial de la Generalitat de Cataluña, n.º 6900, 26 de junio de 2015.

Decreto 236/2015, de 22 de diciembre, por el que se establece el currículo de Educación Básica y se implanta en la Comunidad Autónoma del País Vasco, Boletín Oficial del País Vasco, n.º 9, 15 de enero de 2016.

Decreto 26/2016, de 21 de julio, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León, Boletín Oficial de Castilla y León, n.º 142, 25 de julio de 2016.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa, Boletín Oficial del Estado, n.º 295, 10 de diciembre de 2013, BOE-A-2013-12886.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, Boletín Oficial del Estado, n.º 106, 4 de mayo de 2006, BOE-A-2006-7899.

National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics,* NCTM, Reston.

Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se au-

toriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, Boletín Oficial de Aragón, 20 de junio de 2014.

Orden ECD/686/2014, de 23 de abril, por la que se establece el currículo de la Educación Primaria para el ámbito de gestión del Ministerio de Educación, Cultura y deporte y se regula su implantación, así como la evaluación y determinados aspectos organizativos de la etapa, Boletín Oficial del Estado, n.º 106, 1 de mayo de 2014.

Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Ministerio de Educación y Ciencia, Boletín Oficial del Estado, n.º 293, 8 de diciembre de 2006, BOE-A-2006-21409.

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículum básico de la Educación Primaria. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Boletín Oficial del Estado, n.º 52, 1 de marzo de 2014, BOE-A-2014-2222.

Eva García Cabañas
CPEIP El Lago de Mendillorri, Pamplona
<egcabanas@gmail.com>

M.ª Cristina Naya Riveiro
Universidade da Coruña
<cristina.naya@udc.gal>

María Sotos Serrano
Universidad de Castilla-La Mancha
<maria.sotos@uclm.es>

1 Para ello se pueden poner en contacto con cualquier autor de esta sección.

DIARIO DE EXPERIENCIAS MATEMÁTICAS

Tic-tac

Aina Maria González Juan
Magdalena Martí Pons
Susanna Morell Torrens
Catalina Maria Pizà Mut

SUMA+ núm. 99
pp. 91-99
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2021 y aceptado en enero de 2022

> Es el mejor de los buenos quien sabe que en esta vida todo es cuestión de medida: un poco más, algo menos. (Antonio Machado, *Campos de Castilla*, 1912)

Dormimos hasta que… RIIIIIIIIIING, la alarma nos avisa que ha llegado el momento de despertarnos.



Figura 1. ¡Hora de levantarse!

A partir de aquí, y casi sin darnos cuenta, las mediciones forman parte de nuestra vida diaria; medimos distancias, temperatura, masas, capacidades, tiempo, velocidad… que nos obligan a tomar decisiones, algunos ejemplos:

— ¿Cuán caliente debe ser la ducha?
— Elijo la taza del café, ¿voy a elegir la misma si prefiero café con leche?
— ¿Llego a tiempo a la parada del bus?
— ¿Me pongo la chaqueta?
— Voy a cocinar la nueva receta, ¿qué necesito?
— ¡Tengo que cargar el móvil!
— Google informa que hay más tráfico de lo habitual, ¿voy a llegar a tiempo?
— Programo el despertador para mañana.

Desde que nacemos nos vemos inmersos en un mundo donde las informaciones relacionadas con la medida nos acompañan en nuestro día a día. La ma-

yoría son mediciones aproximadas, sin precisión exacta y sin utilizar instrumentos o herramientas de medición; en estos casos las buenas estimaciones son fundamentales para poder llevar una vida más fácil y ordenada. Las repeticiones de la experiencia nos ayudan a ser cada vez más precisos.

Los más pequeños tal vez no saben utilizar con precisión una báscula, una cinta métrica, leer la hora o usar el termómetro, pero usan en su lenguaje habitual palabras y expresiones relacionadas con la medida: pesa mucho, está muy lejos, está caliente, tengo frío, hay muchas cosas… Y son conscientes de que hay que comprar ropa nueva cada temporada porque han crecido, que las sillas y mesas de su clase son diferentes a las de los mayores, que hay horarios para salir al patio o para ir a dormir…

Entonces, ¿por qué no aprovechar todas estas expresiones y conceptos para fomentar la reflexión, la experimentación y la capacidad de representar y comunicar… para aumentar, en definitiva, la competencia matemática de nuestros alumnos?

¿Por qué no ir más allá del cálculo de medidas o del cambio de unidades?

En la escuela podemos beneficiarnos de la emoción de realizar estimaciones y comprobaciones, de la belleza de imaginar situaciones, de la profundidad de fijar algunas medidas propias que servirán como referencia en la vida diaria de cada uno de nuestros alumnos y cómo no, de la nuestra.

Así pues, si no podemos vivir sin medir, tal vez deberíamos proponer más a menudo a nuestros alumnos situaciones de experiencia y dar más peso a cuestiones como:

— ¿Qué significa medir?
— ¿Qué se puede medir?
— ¿Cómo podemos medir?
— ¿Qué es una unidad de medida?
— ¿Qué importancia tiene la estimación?

tic-tac

> El tiempo pasa, siempre acaba pasando, es solo una cuestión de tiempo.(El Conejo a Alicia en *Alicia en el país de la maravillas*)

Estas y otras cuestiones se trabajan en la escuela, pero…, ¿cómo se hace?, ¿conseguimos que nuestros alumnos sean competentes?, ¿cómo influye nuestra percepción subjetiva en las mediciones?

En este artículo presentamos una experiencia sobre una magnitud en concreto: el tiempo.

¡Tienes todo el tiempo de mundo para leerlo!



Figura 2. De la medida no te escapas

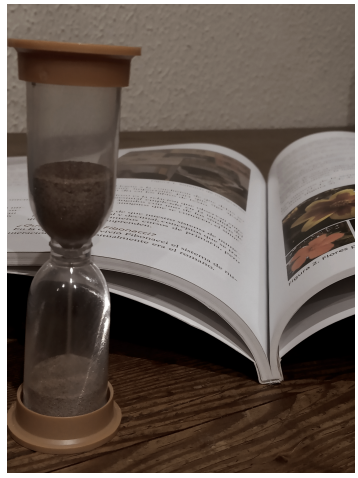


Figura 3. Todo el tiempo del mundo

Tic-tac. Con el tiempo y la paciencia se adquiere la ciencia

¿Por qué hemos elegido esta magnitud?

PORQUE QUERAMOS O NO, NECESITAMOS CONTROLAR EL TIEMPO

tic-tac

> Planificar el tiempo es una de las mejores habilidades que puedes aprender. (Sarah Grand)

El colegio, las actividades extraescolares, las visitas al médico, la peluquería…, todo tiene un horario, una hora de inicio y una de final.

Es difícil escapar de las imposiciones del tiempo, tanto si somos practicantes de la prisa como defensores de la calma.

PORQUE LA NOCIÓN DEL TIEMPO ES RELATIVA (EINSTEIN)

tic-tac

> No importa lo rápido que viaje la luz, siempre se encuentra con que la oscuridad ha llegado antes y la está esperando. (Terry Pratchett)

El tiempo está siempre avanzando, el tiempo no se detiene para nadie, no importa si lo utilizamos para algo útil, provechoso o lo desperdiciamos, simplemente transcurre.

PORQUE DE TODOS LOS INSTRUMENTOS DE MEDIDA, EL RELOJ, ES EL ÚNICO QUE CASI SIEMPRE LLEVAMOS ENCIMA

tic-tac

> Si fuera un reloj en vez de ir de segundo en segundo iría de primero en primero. (El Chojín)

Ya sea de pulsera, de pared o una aplicación en el móvil, está presente en nuestras casas, en el colegio, en la calle, en el coche… Vemos relojes por todo y de muchos tipos: digitales, de sol, analógicos, de arena…¿Sabíais que el primer reloj de pulsera o de pulso fue fabricado para una mujer? Fue para la condesa Koscowicz de Hungría, por el fabricante suizo de relojes Patek Philippe en 1868. Los hombres seguían prefiriendo los relojes de bolsillo.

PORQUE ESTÁ PRESENTE EN NUESTRO LENGUAJE, EN LOS REFRANES, CANCIONES, EN LA VIDA COTIDIANA…

tic-tac

> El tiempo no se detiene, ni se compra ni se vende, no se coge ni se agarra, se le odia y se le quiere. Al tiempo no se le habla, ni se escucha ni se calla. Pasa y nunca se repite… Tiempo es una palabra que empieza y que se acaba. (Jarabe de Palo, *Tiempo*)

El tiempo se da, se ve, se mata, se gasta, se malgasta, se pierde, se gana, se tira, se usa, se lee y se intenta parar aunque nunca se consigue. Y en cambio nos cuesta mucho medirlo y controlarlo.

Tic-tac. Vísteme despacio que tengo prisa

Antes de plantear la actividad sobre la medida estimativa del tiempo, decidimos tantear los conocimientos que los alumnos tienen sobre magnitudes y su medida.

En una primera sesión, nuestro objetivo principal es que encuentren una definición para el concepto de «medida» y que diferencien los conceptos de magnitud, unidades e instrumentos.

Para ello se plantean en clase dos preguntas:

— ¿Qué es medir?
— ¿Qué se puede medir?

Los alumnos deben responderlas individualmente y para ello se les ofrece un pósit de un color diferente para cada una de las preguntas. A continuación, se colocan todos los pósits en la pizarra. Se van leyendo, comentando y agrupando hasta llegar a un consenso.

Las respuestas a la primera pregunta, ¿qué es medir?, se pueden leer en la tabla 1. Al tratarse de una pregunta un tanto abstracta algunos alumnos se muestran desconcertados. Estas respuestas nos llevan a pensar que, en un primer momento, los alumnos se centran especialmente en la longitud.

Las respuestas a la segunda pregunta, ¿qué se puede medir?, se pueden leer en la tabla 2. Las respuestas son muy variadas. A medida que las van leyendo descubren que hay similitudes que les permiten agruparlas. Por una parte, agrupan las palabras que designan los objetos, por otra las unidades, también los instrumentos y por último surge un grupo de respuestas que, de algún modo, pueden estar bajo el mismo epígrafe, pero que ellos aún no saben nombrar; se trata de las magnitudes.

Así, poco a poco, se colocan los pósits en cuatro columnas (figura 4). Una vez hecha la clasificación se plantea si se podrían relacionar con flechas los conceptos que han surgido, para responder a la pregunta inicial de ¿qué es medir?

En la conversación van apareciendo diversas posibilidades: medir con instrumentos, magnitudes de los objetos, comparar con unidades…

Finalmente se consensúan algunas definiciones:

— Medir es comparar las magnitudes de los objetos con unidades, gracias a los instrumentos de medida.
— Saber/conocer la longitud o capacidad de un objeto usando un instrumento de medida.
— Medir es comparar la magnitud que queremos medir con un patrón. Utilizamos unos instrumentos de medida diferentes para cada magnitud.

Consensuar y redactar la definición de medida y utilizar el vocabulario matemático preciso, no es tarea fácil.

En una segunda sesión se organiza una actividad sencilla llamada «Wanted» para dividir el aula en pequeños grupos de tres o cuatro alumnos. Dicha actividad consiste en repartir a cada alumno una tarjeta que contiene, bien una unidad, bien una magnitud o un instrumento de medida. Se mueven libremente buscando con quién pueden agruparse.

¿Qué es medir?
1. Medir es tomar medidas.
2. Medir es una manera de saber cuánto mide una cosa, una mesa..., y cada una da un número.
3. Mirar la distancia entre objetos.
4. Medir es tomar medidas de un objeto, su área, superficie o longitud.
5. Es decir el ancho o la capacidad de algún objeto.
6. Es comprobar el tamaño de un área o un cuerpo.
7. Medir es tener una cinta y mirar el número que sale.
8. Calcular el tamaño de algo.
9. Poner algo en una báscula.
10. Poner un objeto al lado de una regla y mirar hasta donde llega.
11. Saber lo largo o corto que es una cosa.
12. Saber si un objeto es ancho o estrecho.
13. Observar a tu oponente.
14. Acción que te permite saber el límite de algo.

Tabla 1. ¿Qué es medir?

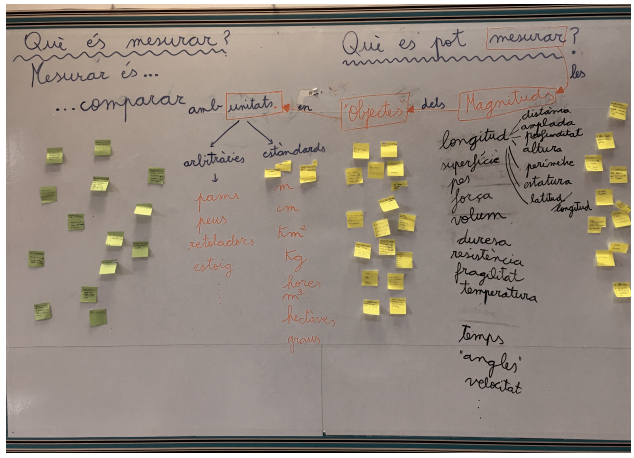


Figura 4. Primer intercambio de ideas

Objetos	Magnitudes	Unidades	Instrumentos
1. Todo 2. Carreteras, ciudades, países, islas, continentes 3. Aparatos tecnológicos: televisor, ordenador, tablet 4. Vehículos: patinete, bicicleta 5. Muebles de la casa: baldosas, puerta, ventana, mesa, pared, armario, bombilla 6. Objetos del aula: papel, pizarra, tiza, folio, estante, estuche, caja, libro, goma, lápiz 7. Necesidades personales: comida, ropa 8. El agua que bebemos 9. El oxígeno de una habitación 10. Un humano: los brazos, las piernas 11. Todo lo que existe en este mundo 12. Todas las cosas que se puedan ver y que no sean muy muy grandes 13. Todo menos aire, planetas, galaxias y universo 14. Lo que puede cogerse	1. Longitud: altura largo anchura profundidad distancia estatura perímetro latitud/ longitud 2. Superficie 3. Velocidad 4. Espacio, lo que ocupa una cosa 5. La abertura de un ángulo 6. El peso 7. La dureza 8. La intensidad de un terremoto 9. Temperatura 10. Resistencia 11. Fuerza 12. Capacidad 13. Tiempo 14. Masa	1. Palmo 2. Pie 3. Rotulador … 4. Km 5. m 6. cm 7. mm 8. Km^2 9. m^2 10. cm^2 11. m^3 12. cm^3 13. hectárea 14. grados 15. kg 16. horas 17. Newtons 18. ppm 19. segundo 20. años	1. La balanza 2. El metro (cinta métrica) 3. Aparatos e instrumentos especiales 4. Termómetro 5. Dinamómetro 6. Reloj 5. Regla 6. Contador de kilómetros 7. Jarra medidora 8. Pistola medidora 9. Minerales de la escala de Mohs 9. Báscula 10. Transportador de ángulos 11. Velocímetro 12. El medidor de CO_2…

Tabla 2. ¿Qué se puede medir?



Figura 5. «Wanted»: ¿Somos del mismo grupo?

Finalmente se reúne un grupo de cuatro miembros a partir, por ejemplo, de las siguientes tarjetas: masa, balanza, kg y g. Su tarea consistirá en plasmar en un cuadro con 4 columnas las aportaciones de la conversación anterior y añadir nuevas magnitudes con las unidades e instrumentos correspondientes. En la primera columna se les pide que escriban el objeto o la situación concreta que proponen medir, tal como se muestra en la figura 6.

Una vez realizada la actividad sobre los conocimientos que tienen los alumnos de magnitudes y unidades se plantea la actividad central referida, concretamente, a la magnitud del tiempo.

Tic-tac. Las horas amargas son mucho más largas

¿Qué puedes hacer en…..?

¿Falta mucho? NO
¿Falta mucho? NO
¿Falta mucho? NOOOOO.

Seguro que todos nos hemos encontrado en alguna ocasión con la situación que vive Shrek cuando Asno le pregunta continuamente si falta mucho para llegar al castillo.

Para ayudar a los alumnos a ser conscientes de si las estimaciones que realizan son precisas o no, y reflexionar sobre qué tipos de estrategias utilizan para estimar la cantidad de tiempo proponemos una serie de actividades.

TIC-TAC. TIEMPO PRESENTE AL MENTARLO YA ES AUSENTE

En la siguiente sesión repartimos una ficha a cada alumno en la que pedimos que escriban qué cosas hacen en el tiempo indicado: en 1 segundo, 30 segundos, 2 minutos, media hora, una hora, un día, una semana, un mes y un año.

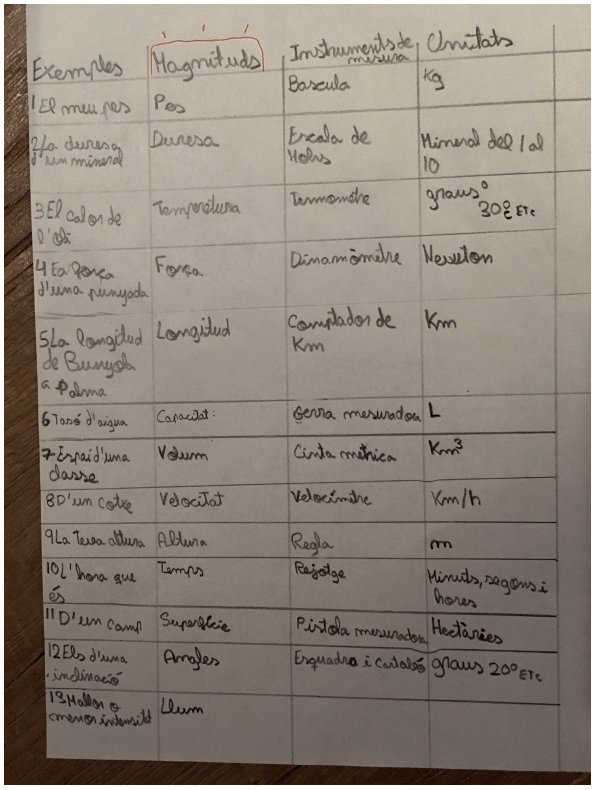


Figura 6. Cuadro de un grupo de trabajo

tic-tac. Cinco minutos bastan para soñar toda una vida, así de relativo es el tiempo. (Mario Benedetti)

Las tablas siguientes muestran algunos de los ejemplos de respuestas que dan los alumnos de manera individual. Nos ha llamado la atención la coincidencia en muchas respuestas; alumnos de diferentes escuelas y de diferentes niveles han dado los mismos ejemplos.

Cosas que duran un segundo	Cosas que duran 30 segundos
—parpadear —sentarme —dar una palmada —vacunarse —respirar —chasquear los dedos —dar un paso o un salto —saludar —ver un relámpago —hacer un guiño —decir «hola» —un estornudo —un latido	—beber agua —hacer un dibujo —ver un anuncio —sacar punta al lápiz —comer una fresa, una galleta —preparar pan con crema de cacao —untar una rebanada de pan con sobrasada —ponerse los zapatos —aguantar sin respirar —contar un chiste —abrir la puerta del garaje —un ejercicio de entreno —dar 30 pasos —hacer pipí

Tabla 3

Cosas que duran 2 minutos	Cosas que duran 30 minutos
—darse una ducha —hacer una exposición oral —colorear un dibujo —jugar a «pilla pilla» —vestirse —escuchar una canción —merendar —leer una página de un libro —elaborar un «Ya te komo» —hacer un dictado —hacer una llamada —lavarse los dientes —lo que tardo en ir a casa de mi vecino	—leer un cómic —almorzar —cocinar —el recreo —pintar —hacer los deberes —mi clase de dibujo —el tiempo que estuve encerrado en el ascensor —encordar una raqueta

Tabla 4

Cosas que duran una hora	Cosas que duran un día
—una clase —jugar un partido de pádel … y ganarlo —ver un capítulo de una serie —una sesión de atletismo —escribir en un diario —ir al médico —dormir una siesta —pasear al perro —dibujar/pintar —un directo de YouTube —viaje en avión Palma-Madrid —jugar a juegos de mesa con la familia —ducharse —ver media película de Harry Potter	—llover —estar en casa —ir a casa de un amigo —hacer un puzzle —el movimiento de rotación de la Tierra —dar la vuelta a Mallorca en coche —ir de excursión con la familia —estar en casa de los abuelos —estar de parto

Tabla 5

Cosas que duran una semana	Cosas que duran un mes
—hacer un viaje —estudiar un control —vivir —un campamento —alquilar un hotel de gamer —gastar una bolsa de mascarillas	—estar confinados —ir de vacaciones, ir a la otra punta del mundo —el calendario de adviento —lo que tarda en nacer una semilla —un ciclo lunar —tiempo que tardan las hojas de un árbol en caer

Tabla 6

Cosas que duran un año
—un curso —un cumpleaños —divertirse —el tiempo que tarda la Tierra en girar alrededor del Sol —la suscripción a *Play Plus!* —una fábrica puede estar abierta un año seguido —una relación de pareja

Tabla 7

Tic-tac. De Navidad a Navidad solo un año va

Una vez completada la ficha se ponen en común las respuestas. Vemos que los alumnos no tienen dificultad a la hora de pensar acciones que duren un segundo, dos minutos o media hora pero cuanto mayor es el tiempo que les pedimos, más difícil les resulta imaginar una situación.

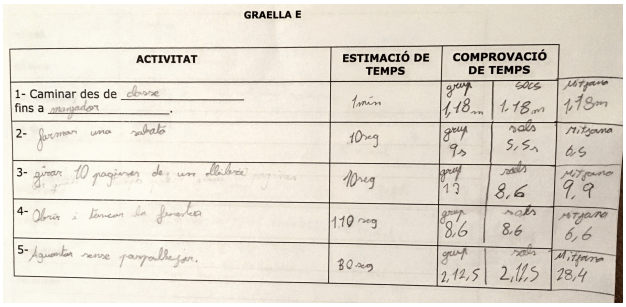
Planteamos a los alumnos si algunas de las acciones que han dicho duran el tiempo solicitado o se realizan de manera periódica. Al cuestionar algunos de los ejemplos citados, surge un debate sobre cosas que duran un año y cosas que se repiten cada año, por ejemplo: el cumpleaños. Llegan a la conclusión de que no es lo mismo duración que periodicidad, y son capaces de diferenciar estos dos conceptos.

Preguntamos cómo se puede comprobar si las respuestas dadas se ajustan a los tiempos planteados. Es entonces cuando en algunas aulas, se decide comprobar con un cronómetro todo aquello que sea posible; en cambio, en otras, se decide consensuar tres o cuatro nuevas acciones para estimar el tiempo que tardarán en realizarlas y, a continuación, anotar el tiempo real que se ha invertido.



Figura 7. ¿Cuánto tardas en atar el cordón de tu zapato?

tic-tac. El rellotge corre corre
i no es mou del mateix lloc.
Una busca va de pressa
l'altra gira a poc a poc (Joana Raspall)



GRAELLA E

ACTIVITAT	ESTIMACIÓ DE TEMPS	COMPROVACIÓ DE TEMPS		
1- Caminar des de classe fins a mayador.	1min	grup 1,18m	sols 1,18m	Mitjana 1,18m
2- formar una sabató	10seg	grup 9s	sols 5,5s	Mitjana 6,5
3- girar 10 pagines de un llibre	10seg	grup 13	sols 8,6	Mitjana 9,9
4- Obrir i tancar la finestra	110 seg	grup 8,6	sols 8,6	Mitjana 6,6
5- Aguantar sense parpalhejar.	30 seg	grup 2,12,5	sols 2,11,5	Mitjana 28,4

Figura 8. Registro de estimaciones y comprobaciones

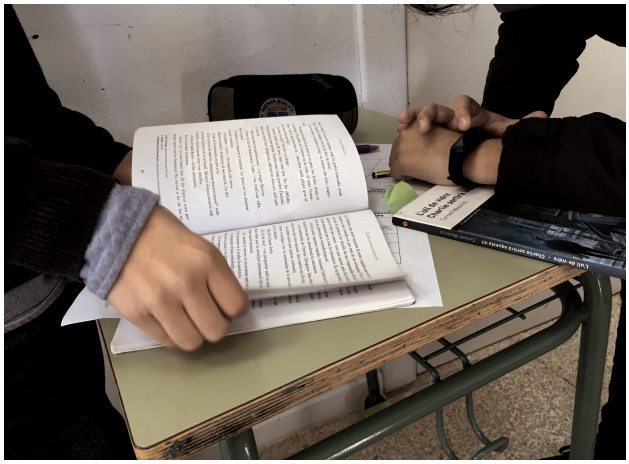


Figura 9. ¿Cuánto tardas en girar 10 páginas de un libro sin romper niguna?



Figura 10. ¿Cuánto tiempo puedes aguantar sin parpadear?

En la siguiente sesión planteamos la siguiente propuesta: Proyectamos en la pizarra un cronómetro *online* y pedimos a varios alumnos que se sitúen de espaldas a la pizarra y levanten la mano cuando crean que ha pasado un minuto. Observamos que a medida que vamos repitiendo la actividad van mejorando sus estimaciones.¿En qué te has fijado para saber el tiempo que ha pasado?

tic tac. Alicia: ¿Cuánto tiempo es para siempre? Conejo blanco: A veces, sólo un segundo. (Lewis Carroll, *Las aventuras de Alicia en el pais de las maravillas*, 1865)

Después de haber realizado estas actividades, les preguntamos en qué se han basado para estimar cuánto tardan en realizar una acción en concreto. Algunas respuestas:

— Lo he hecho «a ojo».
— Imaginando los pasos: un paso, un segundo.
— De lo más básico a lo más difícil, es decir, de menos a más tiempo.
— Por experiencia propia.
— Por experiencias de otras personas.
— Por memoria, pues te acuerdas; se parece a la experiencia.
— A partir de algo que ya sé, por estimación.
— Imaginando la situación.
— Calculando, por ejemplo, la velocidad, aunque depende de cómo te transportes (en coche, a pie).
— Depende del momento en el que lo piensas; según si ha sucedido algo similar recientemente o no.
— Para saber el tiempo que pasa me fijo en el sol, en las sombras, en las campanas de la iglesia, miro el reloj, el móvil, el ordenador…

Tic-tac. Tiempo al tiempo o en busca del tiempo perdido

Paradójicamente el hecho de que la medida sea algo tan habitual, tan cercano, provoca que se den por trabajados muchos aspectos esenciales y nos centremos

en otros aspectos muchas veces muy lejanos al día a día. Conversando con nuestros alumnos nos hemos dado cuenta de que necesitamos:

— Reflexionar sobre qué es medir, diferenciar entre unidad, magnitud e instrumento, saber lo que es medible y lo que no lo es, estimar resultados, diferenciar entre medida real y medida estimada, concienciarse de la imposibilidad de la medida exacta.
— Ofrecer actividades competenciales ricas, centradas en el entorno cotidiano y donde la verbalización del proceso esté presente.
— Proponer multitud de situaciones diversas en las que los alumnos puedan realizar estimaciones con el objetivo de que estas sean cada vez más precisas, puedan servir de referencia para futuras estimaciones y se aproximen más a las medidas reales.

> tic-tac. Lo más difícil de lograr es tomar la decisión de actuar, el resto es solo constancia. (Amelia Earhart)

Tic-tac. Tempus fugit.

Referencias bibliográficas

RASPALL, J. (1996), *Bon dia, poesia!*, Baula, Barcelona.
<https://citas.in/frases/1035165-lewis-carroll-alicia-cuanto-tiempo-es-para-siempre-conejo-bla/>.
<https://citas.in/frases/95084-el-chojin-si-fuera-un-reloj-en-vez-de-ir-de-segundo-en-segun/>.

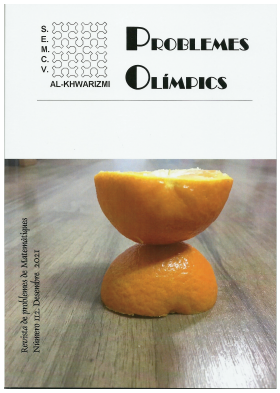
Aina Maria González Juan
CEIP Marian Aguiló, Palma
<ainamgonzalez@gmail.com>

Magdalena Martí Pons
CEIP Marian Aguiló, Palma
<mmagdalenmarti@gmail.com>

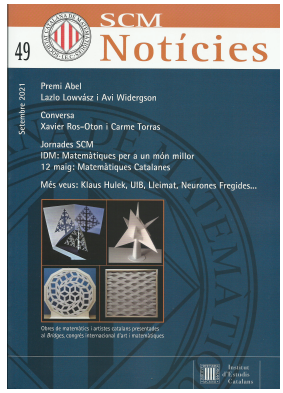
Susanna Morell Torrens
CENTMAT, Palma
<susannamorell@gmail.com>

Catalina Maria Pizà Mut
CEIP Mestre Colom, Bunyola
<ppizam@gmail.com>

Publicaciones recibidas



Problemes Olímpics
SEMCV
«Al-Khwarizmi»
N.º 112, desembre 2021
València
ISSN: 1578-1771



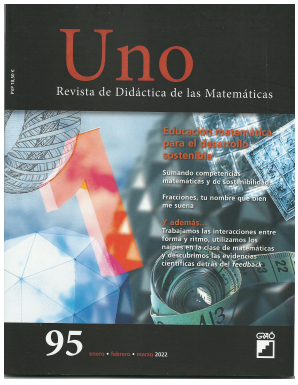
SCM. Notícies
N.º 49, setembre 2021
Barcelona
ISSN: 1696-8247



La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española
RSME
Vol. 25, n.º 1, 2022
Madrid
ISSN: 1138-8927



Llull
Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas
Vol.44, n.º 89, 2021
Zaragoza
ISSN: 0210-8615



Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas
Graó Editorial
N.º 95, enero, febrero, marzo 2022
Barcelona
ISSN: 1133-9853



Educar per la vida. Els reptes de la secundària al segle XXI
Ramon Grau
Rosa dels Vents
2022
Barcelona
ISBN: 978-84-18033-69-8

Manipuladores virtuales para pequeños aprendices de matemáticas

Blanca Arteaga-Martínez

SUMA+ núm. 99
pp. 101-108
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2021 y aceptado en enero de 2022

Apenas se mantenía sentada en una alfombra de suelo, y Carmen se quedaba embelesada ante la pantalla del móvil, unas veces haciendo muecas a la cámara, otras mirando cualquier dibujo animado que se mostraba con canciones y colores llamativos, que hacían que nuestra pequeña dedicase toda su atención a aquel dispositivo, intentando además extender su pequeño dedo para tocar la pantalla. Ante el tacto, la pantalla se detenía, haciendo que ella levantase su rostro y nos mirase con esa cara de interrogante que utilizan los niños, sorprendidos ante lo que sucede y no terminan de comprender.

Ya desde aquel entonces, nos cuestionábamos sobre la conveniencia o no de dejar que Carmen manejase entre sus manos el móvil, o una pequeña tablet, pero parecía que tenía que ser así, y es que el entorno nos lanzaba mensajes sobre nuestros nativos digitales, aquellos pequeños habían nacido entre tecnologías y parecía que venían con un don que les hacía utilizar todo el potencial que había detrás de aquel cristal, sin embargo, unos años después sabemos que aquellos niños eran como lo fuimos nosotros años atrás, curiosos, sorprendidos ante estímulos visuales y sonoros, con ganas de interaccionar con un entorno a descubrir, abiertos a aprender, pero eso sí, con la necesidad de ser guiados por un adulto.

Pasaron los años, Carmen comenzó el colegio, y comenzó a aprender utilizando para ello dispositivos digitales, entonces y mirando la tecnología como medio para aprender fuimos conscientes de cómo aquella orientación marcada por un adulto podía tener dos dimensiones claras, las aplicaciones que impulsaban su autonomía y las que necesitaban la guía de un adulto para poner en escena todo su potencial de aprendizaje.

La investigación realizada sobre estos dispositivos nos pone en alerta en este sentido, cuando nos referimos

a estas etapas tempranas de escolarización, la Educación Infantil.

Muchos de los medios de mayor calidad hechos especialmente para los niños de este grupo de edad que tienen objetivos de aprendizaje explícitos, utilizan estrategias de aprendizaje establecidas y efectivas, que son desarrolladas por expertos que comprenden las necesidades y habilidades de desarrollo de los niños pequeños, que cambian radicalmente de un año a otro. Sin embargo, no todos los medios digitales para los niños pequeños están hechos con experiencia y cuidado (Lieberman y otros, 2009: 271-272).

Una avalancha de productos interactivos se utiliza en la actualidad como medio para el aprendizaje de nuestros pequeños, y la investigación está identificando en algunos de ellos fortalezas y limitaciones. Sin embargo, nuestro artículo no busca adentrarse en esos resultados de la literatura científica, sino que pretende describir algunos manipuladores virtuales que pueden utilizarse en cualquier dispositivo digital, con reflexiones para educadores, tanto desde la aplicación misma como desde el contenido matemático, considerados de utilidad para enriquecer el aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil.

Nos centraremos en los manipuladores del portal *Illuminations* (figura 1), un proyecto diseñado por la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM). Justificamos esta elección en la importancia dada a la tecnología en sus estándares (NCTM, 2000), como un componente fundamental tanto en el currículo como en la instrucción.

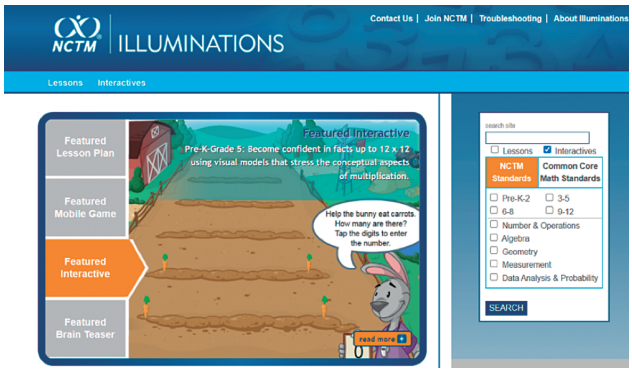


Figura 1. Entorno del portal Illuminations
Fuente: <https://illuminations.nctm.org>/

Una de las ventajas de este portal es que no solo describe el contenido matemático a trabajar, sino que da recomendaciones a los docentes sobre los procedimientos que deben aprender y cómo enseñarlos. Además, los manipuladores virtuales se encuentran categorizados por nivel (edad) y por bloque de contenido (números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad). El portal recoge también lecciones categorizadas de la misma manera. Podemos considerar estos manipuladores dentro de los denominados Recursos Educativos Abiertos (REA).

El binomio manipulativo-digital

El uso de la tecnología en el aula de matemáticas requiere nuestra reflexión desde las características del alumnado y la formación de los docentes, tras la informatización del conocimiento matemático (Artigue, 1998), algo que en estas edades resulta más complejo y ha de tener en cuenta un mayor número de variables, entre otras, la escasa autonomía y la enorme diversidad de los aprendices.

El uso de dispositivos tecnológicos no supone una mejora en el aprendizaje de los niños por sí sola, aun cuando puede suponer un acercamiento a contenidos de una manera más motivadora, como desde el juego, por ejemplo, considerando que requieren de orientación por parte de un adulto, desde el aporte de una guía que haga su uso eficaz y responsable (Arteaga-Martínez y Macías-Sánchez, 2021).

Los manipuladores virtuales que utilizamos en estos dispositivos recogen una representación visual interactiva de objetos dinámicos que suponen oportunidades para construir conocimiento matemático, y suelen utilizar diseños a partir de materiales manipulativos concretos (Bouk y Flanagan, 2010). Así, los materiales manipulativos pueden resultar complementarios en la situación de aprendizaje, por lo que

no deben ser reemplazados por los utilizados en dispositivos digitales (Ihmeideh y Al-Maadadi, 2018).

Los docentes pueden diseñar situaciones de aprendizaje para enseñar o repasar contenidos específicos, que pueden combinar materiales virtuales con manipulativos. Esta doble perspectiva desde un trabajo reflexivo del docente centrado en el análisis de las características personales de los niños, puede ser una forma exitosa de afrontar la enseñanza en las primeras etapas.

Iniciamos nuestra exposición con el manipulador virtual que permite vestir al osito Bobbie combinando un pantalón y una camiseta (figura 2), dando lugar a un conteo posterior de todas las posibles opciones que tiene la elección de los distintos colores; partimos de una consigna que da lugar al contexto provocando la necesidad de resolver el problema de Bobbie, que es preparar una maleta porque se va de vacaciones.

El número máximo de pantalones es cuatro, mientras que de camisetas es cinco. Con nuestros niños en educación infantil podemos utilizar cantidades pequeñas; en la figura 3, vemos el resultado con dos camisetas y un pantalón.

Si intentamos una combinación que ya está elegida no nos permite hacerla, con un mensaje verbal «Trata de nuevo, ya existe este traje»; mientras que cuando conseguimos hacer todas las combinaciones posibles, nos indica que hemos terminado el juego con otro mensaje, «Felicitaciones, has hecho todos los trajes». Si nos fijamos en la parte superior derecha de la pantalla podemos escribir el símbolo del número, situación que no tiene mucho sentido hacerla tras completar todas las combinaciones posibles porque el conteo ya se muestra abajo, y el niño simplemente identificaría cuál es y replicaría la forma de símbolo del teclado. Pero podemos colocar el número antes de comenzar a jugar, y obtendremos distintos mensajes «Muy bien hecho, el oso Bobbie va a ser el oso más elegante de la ciudad», «Intenta de nuevo, esas son muchas combinaciones de trajes», o «Intenta de nuevo, te faltan más combinaciones de trajes», según



Figura 2. *Bobbie Bear*
Fuente: En la versión en inglés <https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Bobbie-Bear> (juego disponible también en castellano)



Figura 3. *Bobbie Bear,* dos camisetas y un pantalón

tengamos el número correcto, o sea superior o inferior. Este tipo de mensajes verbales de refuerzo se consideran fundamentales como estrategia de comprobación, dando lugar a una autoevaluación del niño con una instrucción sencilla, así como una información para el instructor que facilita conocer si el niño ha comprendido el significado o no del número de elementos resultantes al vestirse con distinto número de pantalones y camisetas. La presentación simultánea de elementos auditivos y visuales da lugar a un aprendizaje multisensorial, que facilita la comprensión (Outhwaite y otros, 2019).

Si además de la consigna del juego planteamos situaciones como, si Bobbie se va tres días de vacaciones,

y va a ponerse dos trajes al día, ¿cuántos pantalones y camisetas deberá llevar como mínimo? Esto justifica la presencia de un orientador en la tarea. En este caso, conviene que el niño traslade sus descubrimientos a un papel, es decir, formalice el aprendizaje construyendo una representación propia. Pensemos que estamos utilizando este manipulador con niños de 3-6 años, pero podremos volver a ella cuando los niños estén dando distintos significados a la multiplicación, en este caso, como combinación.

Las cuestiones que nos sugieren para ayudar a Bobbie a vestirse son:

— ¿Cuántos conjuntos crees que se pueden hacer?
— ¿Cómo sabes cuando has hecho todos los conjuntos?
— Si te falta un atuendo, ¿cómo averiguas cuál es?
— ¿Cómo puedes organizar su trabajo para facilitar respuesta a estas preguntas?

Como comentábamos podemos combinar el uso de este manipulador virtual con materiales (figura 4). Esto nos permite incluir más de dos piezas en la combinación. La diferencia fundamental es que el niño montará las distintas combinaciones con el material, pero si no utilizamos una representación de los resultados, el niño deberá recordar las combinaciones realizadas o tener gran cantidad de materiales de cada tipo. Así el uso digital requiere menor grado de abstracción, por tener en la pantalla la representación de las combinaciones formadas.

Hemos dejado como última mención un aspecto importante desde la etapa en la que nos estamos centrando: no es necesario el dominio numérico para poder utilizarla. El niño puede hacer emparejamientos de prendas de manera previa al desarrollo del sentido numérico, como una preparación inicial.

Actividades de concentración para aprender matemáticas

Concentration, es un manipulador con diferentes opciones de configuración (figura 5). No puede considerarse dentro de lo que podemos llamar contenidos matemáticos, pero, sin embargo, las opciones nos llevan a considerar distintas representaciones del número o de figuras planas. El niño debe ir destapando distintas ventanas, hasta encontrar la pareja correcta, entonces estas ventanas se quedarán abiertas.

Una de las actividades que preparan para el conteo es la representación de pequeñas cantidades, con las



Figura 4. Materiales manipulativos para la combinación de atuendos
Fuente: *Dress me stamping kit (Colorations)*



Figura 5. Opciones de *Concentration*
Fuente:<https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Concentration>

que formar equivalencias por emparejamiento (Castro y otros, 2015). Para trabajar con niños de educación infantil, lo haremos de manera individual y con números del 1 al 6. Las posibles representaciones que encontramos son: el símbolo numérico, representaciones en rejilla y con puntos (figura 6). Consideramos que son suficientes, dado que facilita distintos registros de un número, utilizando para ello una representación discreta y otra continua cuya identificación facilitará que el niño pueda realizar sus propias conversiones entre distintos tipos de representación.

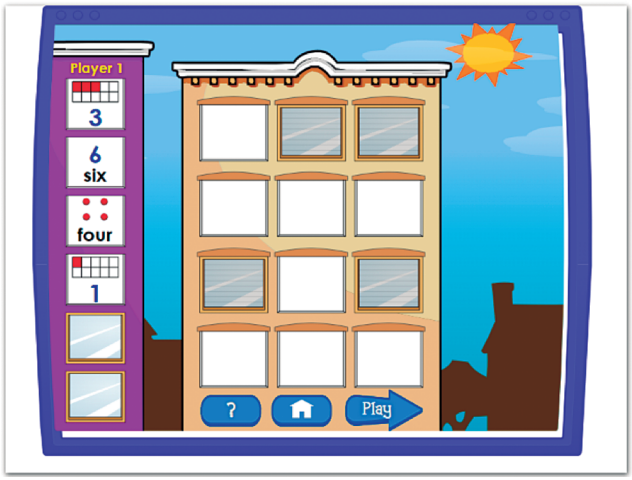


Figura 6. Emparejamiento de representaciones del número

Rejillas de números, del 5 al 10

Finalizamos este breve recorrido mostrando rejillas de números de cinco y de diez, o dicho de otra forma, trabajando con los dedos de una mano o con las dos, y es que no queremos perder en esta etapa la importancia de trabajar con el propio cuerpo como una parte también de comprensión de uno mismo y del entorno. Las interacciones que se fundamentan en el uso de los dedos pueden suponer una primera aproximación a representaciones de construcciones matemáticas tempranas, como el conteo, correspondencias u operaciones aritméticas. Los niños comienzan a construir estos contenidos matemáticos desde su actividad sensoriomotora con la mano (Norton y otros, 2018).

Como vemos, la presentación de las rejillas es la misma (figura 7), únicamente varía la cantidad de elementos que se muestran, reflexionemos sobre las preguntas que guían la práctica.

La primera parte busca que el niño asocie el símbolo numérico a la cantidad de objetos (cardinal) que se

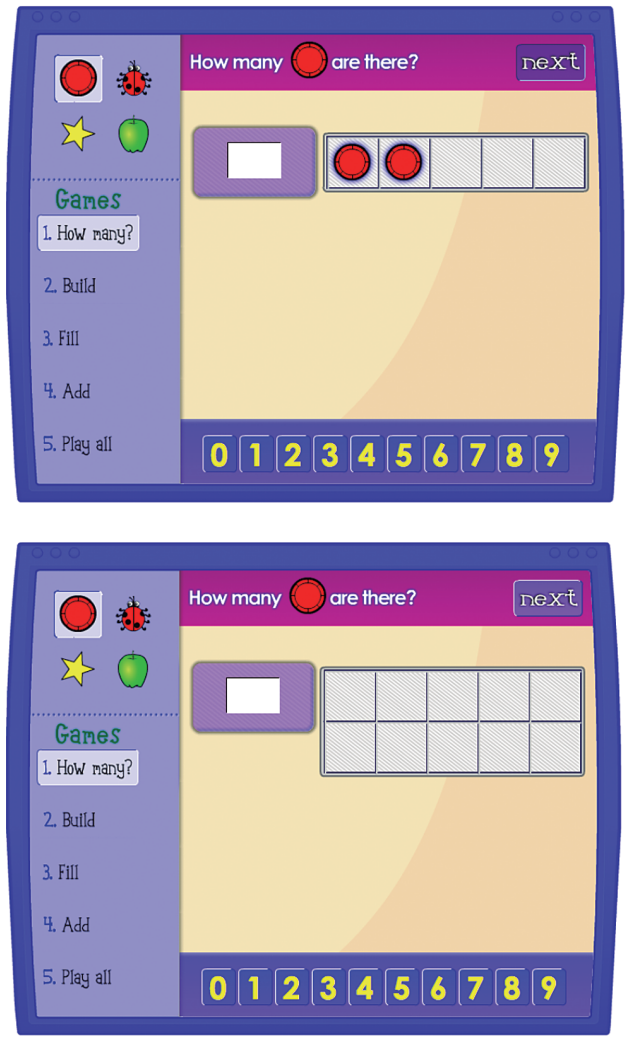


Figura 7. Rejillas de números de 5 y de 10
Fuente: <https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Five-Frame> y <https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Ten-Frame>

muestran, o que no se muestran, y es que en ocasiones la pregunta va dirigida a contar los círculos, mariquitas, estrellas o manzanas (dependiendo de la opción elegida) presentes o contar los huecos vacíos de la rejilla.

La figura 8 nos muestra el contador de aciertos al lado de la actividad que estemos realizando, y podemos ver además cómo la pregunta va dirigida al conteo de los elementos que no están. Este tipo de actividad nos facilita una aproximación inicial desde el conteo a la posterior descomposición aditiva del número.



Figura 8. Rejillas de números: conteo de elementos no presentes

Estamos entonces ante una actividad que facilita el desarrollo del sentido numérico, desde la práctica de la subitización o las relaciones parte-todo, como reconocimiento de la cantidad, así como su composición y descomposición (Tucker y otros, 2017).

El aprendiz puede pasar de una a otra actividad de las cinco disponibles: cuántos (contar), construir, rellenar y agregar (componer, descomponer y sumar), y jugar a todo, que selecciona de manera aleatoria una de las cuatro opciones previas.

La secuencia de actividades es más extensa en la actividad de agregar, que nos conduce a una suma partiendo de la construcción de cada uno de los sumandos a partir del símbolo numérico, al agrupamiento y al resultado de la adición desde el conteo (figura 9).

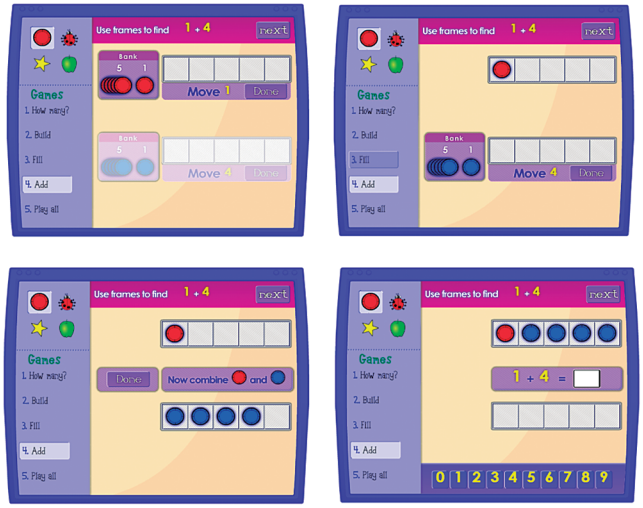


Figura 9. Rejillas de números: secuencia de la actividad de agregar (suma)

La rejilla de tamaño cinco facilita al niño una conexión visual con el número cinco, dado que muestra la imagen de combinaciones de números menores de cinco, dando una estructura básica de organización de un número, el cinco, que resulta importante en el desarrollo matemático del niño (Novakowski, 2007). Además, «debido al número limitado de cuadrados en una rejilla de cinco, los estudiantes se ven automáticamente obligados a trabajar con tamaños de conjuntos más pequeños (cinco o menos) que se encuentran dentro de su desarrollo del rango de conteo» (McGuire y otros, 2012: 214). Por lo tanto, la rejilla de tamaño cinco prepara el trabajo posterior con la de diez, que hemos de considerar como trabajo previo y necesario.

Cabe mencionar la importancia de las recomendaciones que la aplicación facilita, por ejemplo, las preguntas encaminadas al trabajo con el cero, y su significado. Un número que pese a su importancia pocas veces se trabaja con los niños de Educación Infantil.

A modo de prospectiva

Como conclusión, señalamos el reto de enseñar y aprender matemáticas en Educación Infantil con manipuladores virtuales provenientes de REA, en este caso desde la NCTM, que se pueden integrar de manera sencilla en la dinámica del aula, tanto desde dispositivos individuales (móviles o tablet) como de uso colectivo (pizarra digital), o pueden utilizarse como actividades de aprendizaje fuera del entorno escolar. Es conveniente señalar la necesidad de una formación del adulto, que asegure que el manipulador utilizado se adecúa al nivel del aprendiz en cuanto a su dominio del contenido matemático.

Este tipo de manipuladores pueden facilitar en los aprendices una fluidez procedimental al tiempo que una comprensión de conceptos y relaciones, necesarias ambas para la comprensión de los contenidos matemáticos. Las experiencias de aprendizaje en estos primeros años sirven como «base fundamental para la competencia emergente de los estudiantes» (National Research Council, 2001: 18).

Finalizamos con una reflexión que muestra lo etérea de la situación actual respecto al uso de este tipo de herramientas, «dada la vertiginosa velocidad con la que se transforman los entornos virtuales y tecnológicos, es posible que algunos de ellos desaparezcan o queden obsoletos en poco tiempo» (Alsina, 2019: 13), así que, aprendan, practiquen, diseñen situaciones, y mantengan una perspectiva de enseñanza y aprendizaje flexible para el futuro, porque frente a estos cambios y herramientas, el contenido matemático siempre será perdurable.Y sobre todo, investiguen qué estrategias emplean los niños al utilizar uno y otro método, porque estos reportes que no suelen ser espontáneos pueden dar sustento a prácticas de enseñanza ricas que ayuden a maestros y educadores en sus diseños específicos de situaciones de enseñanza-aprendizaje.

Este tipo de manipuladores pueden facilitar en los aprendices una fluidez procedimental al tiempo que una comprensión de conceptos y relaciones, necesarias ambas para la comprensión de los contenidos matemáticos

Referencias bibliográficas

Alsina, Á. (2019), «Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil», *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia,* n.º 8 (1), 1-19.

Arteaga-Martínez, B., y J. Macías-Sánchez, (2021), «La formación docente desde la implementación de la tecnología: en el aula de matemáticas», en M. R. Royer, *Ensino e Educação em Diferentes Contextos,* Pimenta Cultural, São Paulo.

Artigue, M. (1998), «Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies», en D. Tinsley y D. Johnson (eds.), *Information and Communication Technologies in School Mathematics*, Chapman & Hall, Londres, 121–130.

Bouck, E. C., y S. M. Flanagan (2010), «Virtual Manipulatives: What TheyAre and How Teachers Can Use Them», *Intervention in School and Clinic,* n.º 45(3), 186-191, <https://doi.org/10.1177/1053451209349530>.

Castro, C., G. Flecha y M. Ramírez (2015), «Matemáticas con dos años: buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes», *Tendencias pedagógicas*, n.º 26, 89-108.

Ihmeideh, F., y F. Al-Maadadi (2018), «Towards Improving Kindergarten Teachers' Practices Regarding the Integration of ICT into Early Years Settings», *Asia-Pacific Education Researcher,* n.º 27, 65–78, <https://doi.org/10.1007/s40299-017-0366-x>.

Lieberman, D. A., C. H. Bates y J. So (2009), «Young children's learning with digital media», *Computers in the Schools*, n.º 26(4), 271-283. <https://doi.org/10.1080/07380560903360194>.

McGuire, P., M. Kinzie y D. Berch (2012), «Developing number sense in pre-k with fiveframes», *Early Childhood Education Journal,* n.º 40(4), 213-222, <https://doi.org/10.1007/s10643-011-0479-4>

National Council of Teachers of Mathematics (2000), «*Principles and standards for school mathematics»,* NCTM, Reston.

National Research Council (2001), «Adding it up: Helping children learn mathematics», en J. Kilpatrick, J. Swafford y B. Findell (eds.), *Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education*, National Academy Press, Washington, DC.

Norton, A., C. Ulrich, M. Bell y A. Cate (2018), «Mathematics at Hand», *The Mathematics Educator,* n.º 27(1), 33-59.

Novakowski, J. (2007), «Developing "five-ness" in kindergarten», *Teaching Children Mathematics*, n.º 14(4), 226-231.

Outhwaite, L. A., M. Faulder, A. Gulliford y N. J. Pitchford (2019), «Raising early achievement in math with interactive apps: A randomized control trial», *Journal of Educational Psychology,* n.º 111(2), 284-298, <https://doi.org/10.1037/edu0000286>.

Tucker, S. I., C. W. Lommatsch, P. S. Moyer-Packenham, K. L. Anderson-Pence y J. Symanzik (2017), «Kindergarten children's interactions with touchscreen mathematics virtual manipulatives: An innovative mixed methods analysis», *International Journal of Research in Education and Science (IJRES),* n.º 3(2), 646-665, <https://doi.org/10.21890/ijres.328097>.

Blanca Arteaga-Martínez
Universidad Nacional de Educación a Distancia
<blanca.arteaga@edu.uned.es>

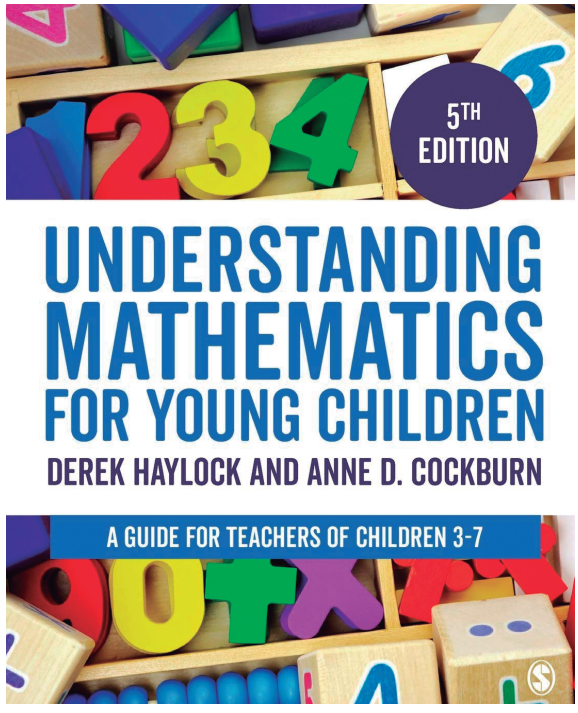
VERSIÓN INGLESA

Las matemáticas de educación infantil y primaria

Maite Aranés Maza

SUMA+ núm. 99
pp. 109-114
Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2021 y aceptado en enero de 2022

Para este número de *Suma* he decidido atreverme con la enseñanza de matemáticas en educación infantil y el inicio de primaria. Mi experiencia profesional en esas etapas es prácticamente nula, así que poco puedo decir sobre la efectividad del libro como herramienta para los docentes de primaria. En cualquier caso espero que la descripción y resumen de sus contenidos principales os resulte interesante. A algunos os puede servir tal vez para comparar con publicaciones del mismo estilo en lengua castellana, o para atisbar qué se cuece en la educación primaria en Reino Unido. Y a otros, quizás os recuerde algo en lo que hace tiempo que no pensáis, u os anima a investigar un poco más algunas ideas de tipo fundamental.



Sage Publications, 323 páginas (2017)

Los autores de *Understanding Mathematics for young children,* Derek Haylock y Anne Cockburn, se han dedicado durante años a la formación de profesorado de infantil y primaria. La primera versión del

libro apareció en 1989. Desde entonces han ido refinando las ideas y contenidos hasta llegar a esta 5.ª edición de la versión publicada en 2008. El libro está dirigido a futuros docentes de educación infantil y primaria, con el objetivo de mejorar su comprensión de las ideas fundamentales de las matemáticas que trabajarán en el aula con sus alumnos.

> Our interest in writing this book arose from our concern about the long-term effects on children's confidence in mathematics resulting from their teachers' own mathematical misconceptions and limited understanding of the subject. This is no doubt often because they and their teachers before them were taught mathematics by drill, as a set of rules and recipes. Understanding as a goal may have played little part in their mathematics education. […] It is essential that teachers themselves should have a thorough understanding of the basic mathematical concepts and principles that underpin the mathematics that is taught and learnt as a young child embarks on their educational journey.

Understanding Mathematics for young children se estructura en una introducción y 11 capítulos, más una completa bibliografía con todos los libros y artículos mencionados en el texto. Después de un primer capítulo introductorio sobre qué significa «entender matemáticas», los capítulos desde el 2 hasta el 7 tratan sobre cuestiones de número y aritmética. En el 8, 9 y 10 los autores nos hablan sobre cuestiones de medida, geometría y estadística, reservando el último capítulo para realizar algunas reflexiones sobre razonamiento y resolución de problemas.

Todos los capítulos tienen una estructura parecida. Comienzan con algún problema o anécdota concreta (la mayoría sobre situaciones reales con alumnado de infantil) y el planteamiento de algunas cuestiones para provocar una reflexión. Durante el desarrollo del capítulo se hace referencia a estas cuestiones, y encontramos a menudo otros testimonios de docentes y alumnado. Los autores incluyen uno o dos «momentos de reflexión» en cada capítulo, y una sección («Research Focus») de comentario sobre trabajos de investigación y estudios académicos. Además, al final de cada capítulo incluyen una selección de propuestas para el aula.

Haylock y Cockburn dedican el primer capítulo, «Understanding Mathematics», a explicar en qué consiste entender las matemáticas. Por una parte, supone construir una estructura de relaciones entre el lenguaje, los símbolos matemáticos, las representaciones gráficas y las experiencias concretas. Por otra parte, destacan los procesos de equivalencia y transformación como elementos esenciales de las matemáticas: el alumno los utiliza cuando reconoce qué es lo mismo en un grupo de objetos matemáticos y qué es diferente o ha cambiado. Estos aspectos: relaciones, equivalencia y transformación, van apareciendo en todos los capítulos.

> We can see, therefore, that much of what is involved in understanding can be identified as the building up of a complex network of connections between language, symbols, concrete materials and pictures.

La posición de los autores, basada en su experiencia y los hallazgos de la investigación en educación, es que el aprendizaje basado en la comprensión es más duradero, más satisfactorio y en general más útil en la práctica que un aprendizaje basado en recetas y rutinas. Uno de los ejemplos que dan es el aprendizaje de las tablas de multiplicar. Según su visión, para poder decir que un alumno domina la tabla del cinco no es suficiente con que la haya memorizado; aparte de eso podemos añadir otros aspectos como:

— relacionar cada resultado con una colección de monedas de 5 céntimos y el valor total,
— asociar el patrón de ceros y cincos en las unidades con los múltiplos pares e impares,
— explicar cómo obtener 8×5 a partir de 4×5,
— explicar cómo se obtiene 7×5 a partir de 6×5 sumando cinco,
— contar de 5 en 5 en una recta numérica,
— construir con multi-cubos representaciones de un conjunto de 5, dos conjuntos de cinco, etc.,
— entender que 3×5 es la operación que te permite calcular el coste de 3 libros a 5€ cada uno,
— ser capaces de completar operaciones del tipo $6 \times \square = 30$.

> All our experience and what we learn from research indicate that learning based on understanding is more enduring, more psychologically satisfying and more useful in practice than learning based mainly on the rehearsal of recipes and routines low in meaningfulness.

Otro ejemplo que utilizan en este primer capítulo es el signo igual. Estrictamente, el signo igual representa la idea de equivalencia. Por ejemplo, 2 + 4 es equivalente a 6. Por otra parte, cuando el alumnado experimenta con 2 fichas y 4 fichas, y descubre que la unión resulta en 6 fichas, la operación 2 + 4 = 6 puede interpretarse como una transformación: 2 + 4 son 6 (figura 1). Por la razón que sea (posiblemente un énfasis en el segundo aspecto por parte del profesorado), la mayoría de alumnos tienden a ver el signo = como un operador. Esta ambigüedad en significado no es única, sino que aparece prácticamente en todos los símbolos matemáticos. De ahí parte la necesidad de garantizar que el alumnado pueda relacionar cada símbolo con una variedad de situaciones, operaciones y lenguaje.

Este tema de los distintos significados que pueden asociarse a un símbolo matemático aparece de nuevo en el capítulo 2, «Understanding number and counting». Aquí Haylock y Cockburn nos recuerdan que un número puede utilizarse en el sentido nominal (como etiqueta), ordinal o cardinal. En su opinión el aspecto ordinal no se trabaja lo suficiente en la educación infantil y primaria, lo que puede ocasionar problemas más adelante: por ejemplo cuando el alumnado se encuentre los números negativos, o en contextos de medida (interpretación del 0). Ellos proponen el uso de tiras o rectas numéricas de forma habitual para enlazar la interpretación cardinal de un número con la ordinal. Es decir, como hacen en todo el libro, insisten en que se debe proporcionar al alumnado el mayor rango de experiencias posibles que puedan asociarse a una idea matemática. En la segunda parte del capítulo, analizan con muchísimo detalle el proceso de «contar», explicando los aspectos que los niños deben ir asimilando en su construcción del concepto abstracto de número.

> For example, if the idea that numbers are sets of things is continually reinforced in the early years and is the dominant connection, it is nor surprising that negative numbers appear very mysterious when they are met later on. You cannot think of –3 as a set of things! And if you cannot make connections with previous learning then no real understanding but only rote learning can occur.

El capítulo 3, «Understanding place value», es el más breve del libro. Como el título indica, explora el sistema posicional. Aquí los autores abogan nuevamente por exponer al alumnado a distintas experiencias y representaciones de los números. Como ejemplos de posibles herramientas nos hablan de la recta numérica, las regletas, «arrow cards» (figura 2), el cuadrado de 100 números y otros materiales manipulables. Los autores advierten al final del capítulo que no es necesario que el alumnado entienda completamente todos los aspectos que discuten aquí antes de comen-

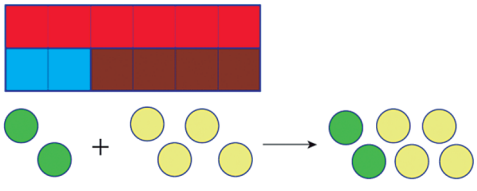


Figura 1. 2+4=6 interpretado como equivalencia y como transformación

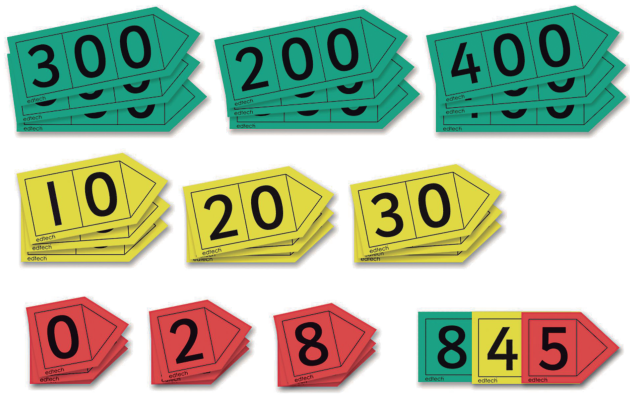


Figura 2. «Arrow cards» para trabajar el valor posicional de las cifras

zar a calcular y practicar operaciones aritméticas. Al contrario, la buena enseñanza de técnicas de cálculo mental y escrito reforzará la comprensión de nuestro sistema numérico.

Los capítulos 4 y 5, «Understanding addition and subtraction» y «Understanding multiplication, division and fractions» son bastante extensos. Como indican los títulos nos hablan de las cuatro operaciones aritméticas. En sus explicaciones hacen especial hincapié en las diferentes estructuras y contextos que aparecen asociadas a cada una de las operaciones. Por ejemplo, en el caso de la sustracción distinguen cuatro situaciones: partición o resta, comparación, complemento de un conjunto e inversa de la adición. Como viene siendo habitual, insisten en la importancia de que el alumnado tenga la oportunidad de trabajar y relacionar todos los contextos para cada operación. En el caso de la suma y la resta utilizan como ejemplo las dificultades del alumnado para reconocer la estructura que se esconde tras el enunciado de un problema: muchas veces se guían por palabras clave que les llevan a malentendidos. Es decir, en una pregunta del tipo: «Helen tiene 12 lápices, 3 menos que Gill, ¿cuántos lápices tiene Gill?», habrá alumnos que en lugar de atender a la estructura del problema harán la operación 12 – 3.

> Analysis of the way children will misinterpret verbal cues reinforces the principle that our teaching must enable children to recognize the structure of situations, not just to respond like automatons to key words. Our message therefore is that the main focus of our work with children should be on developing understanding, by establishing the connections between the symbols for subtraction and the associated language, pictures and concrete situations.

Otro punto en el que insisten bastante es en la tendencia generalizada en interpretar la división como reparto en lugar de agrupamiento (inverso de la multiplicación). Es decir, es más probable que ante 12:3 imaginemos la situación de repartir 12 objetos en tres grupos, en lugar de asociarlo con el número de grupos de 3 que podemos formar con 12 objetos. En el apartado de «Investigación» del capítulo citan algunos estudios que respaldan esta afirmación. En la opinión de los autores es posible que el énfasis de la división como reparto influya en la aparición de ideas problemáticas del tipo «solo se puede dividir por un número entero» y «siempre hay que dividir el número grande entre el número más pequeño». El capítulo termina con una breve discusión sobre la introducción de las fracciones (figura 3). Argumentan que las ideas de un medio, un cuarto, un tercio y tres cuartos se deben trabajar de forma informal a través de historias y experiencias antes de conectarlas con sus símbolos matemáticos.

Los siguientes dos capítulos, «6. Understanding the principles of arithmetic» y «7. Understanding number patterns and calculations», terminan con el bloque de números, que constituye unos dos tercios del libro aproximadamente. Dos aspectos que enfatizan especialmente en ambos capítulos es la importancia del trabajo con complementos (tanto para la suma como para el producto), y la búsqueda de patrones en las operaciones aritméticas básicas con la ayuda de diversos materiales (figura 4). En el capítulo 7 además dedican especial atención, tanto en el texto como en la sección de «Investigación», al uso de la recta numérica «vacía» como herramienta para ayudar al alumnado con estrategias de cálculo mental. En su opinión, se debe promover el desarrollo de técnicas de cálculo mental basadas en la visualización antes de introducir los algoritmos escritos para la realización de operaciones aritméticas.

> We have argued strongly the case for the development of mental processes for manipulating numbers based on visual and pictorial images, particularly the hundred square and the number line, rather than emphasizing too early standard written procedures for doing additions and subtractions.

El siguiente capítulo, «8. Understanding Measurement», incluye varias secciones claramente dirigidas a aclarar las ideas al futuro docente, como por ejemplo la distinción entre masa y peso o un resumen del sistema métrico decimal (recordemos en el Reino Unido se utiliza en paralelo a su sistema imperial). También se comentan otros aspectos como por ejem-

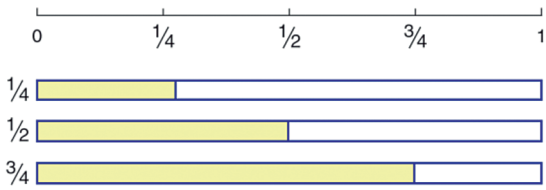


Figura 3. El alumnado más joven puede comenzar a asociar las fracciones más sencillas con puntos en la recta numérica

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 4. Patrones para sumar 9: 7+9, 74+9, 24+29 y 48+39 en el cuadrado de 100 números

plo el uso de unidades no formales, tipos de escalas o las oportunidades que ofrece un contexto de medidas para realizar comparaciones e introducir la propiedad transitiva. Por último Haylock y Cockburn lamentan la falta de trabajo en general en aspectos como la estimación, cotas y nivel de precisión, elementos esenciales en el desarrollo del concepto de medida. Insisten en la importancia de las experiencias prácticas y la discusión en clase para que el alumnado se familiarice con estas ideas más sofisticadas.

> To sum up, approximation, upper and lower bounds, and the appropriate level of accuracy are important ideas that are fundamental to most aspects of measuremente. Experience and discussion of all these aspects of measurement are often insufficiently emphasized in work with children.

La mayor parte del capítulo 9, «Understanding Geometry», está dedicado a la discusión de transformación e invariancia en geometría. Según los autores es importante entender estas ideas para ser capaces de reconocer la importancia de las experiencias intuitivas e informales que contribuyen al desarrollo del pensamiento geométrico. Es quizás por eso que este capítulo se lee más como un resumen de esta concepción de la geometría, dirigido a mejorar la comprensión del futuro docente. Aunque Haylock y Cockburn acompañan la exposición matemática con comentarios sobre experiencias con el alumnado, en mi opinión este capítulo no resulta tan «práctico» como el resto del libro.

El capítulo 10, «Understanding Statistics», es bastante breve. Se centra especialmente en el papel de los diagramas y elementos pictóricos para la representación y análisis de la información recopilada. Al final del capítulo, dentro de la sección de «Investigación», los autores reflexionan sobre el uso de representaciones pictóricas como componente esencial para entender conceptos matemáticos, una idea en la que han ido insistiendo durante todo el libro (figura 5).

En el capítulo final, «Understanding reasoning and problem solving in mathematics» los autores comienzan con una reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas: aparte de las destrezas, los conceptos y los contenidos, también consisten en una forma característica de pensar y razonar. Su intención en el capítulo es intentar hacer explícitos algunos aspectos fundamentales del razonamiento matemático, en particular los que son relevantes en las experiencias del alumnado más joven. Con este objetivo definen lo que consideran un problema y lo que consideran una actividad de investigación, y posteriormente describen algunos aspectos característicos del razonamiento matemático: representación de situaciones con diagramas, dibujos o símbolos, trabajo sistemático, creatividad y generalización. Como siempre, se acompaña toda la discusión con ejemplos de actividades y anécdotas de aula.

> It is important that those who teach young children are clear in their minds that mathematics is more than just a collection of skills, concepts and principles. It is also a collection of ways of thinking and reasoning: ways of organizing and internalizing the information we receive from the external world; and ways of using and applying that information both in the real world and within mathematics itself.

Aquí concluye el libro, pues los autores se despiden con increíble brevedad en el último párrafo del capítulo 11. Como comentarios finales quiero destacar que el contenido teórico sobre pedagogía en todo el libro es muy ligero, aunque las secciones de «Investigación» y la bibliografía pueden servir como punto de partida para profundizar en ese aspecto. Los autores utilizan además un lenguaje informal, con lo que la lectura resulta bastante amena a pesar de la extensión del libro.

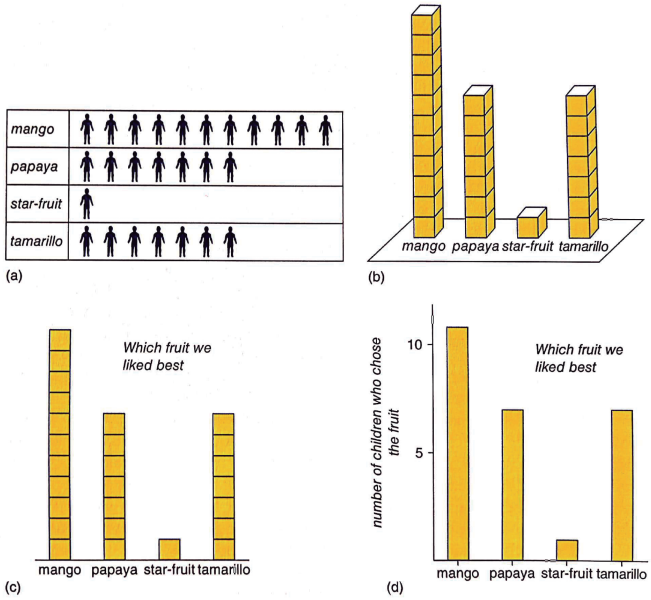


Figura 5. Etapas en el desarrollo de la representación pictórica de datos

Maite Aranés Maza
IES de Villanueva de Gállego,
Villanueva de Gállego (Zaragoza)
<maite.aranes@gmail.com>


FESPM
&
Cía

FESPM

20 JAEM
Matemáticas para construir el mundo

Segundo anuncio
Comité organizador local

Con un año de retraso respecto de la fecha prevista, y con todas las dificultades encontradas por el camino, el próximo mes de julio celebraremos la edición número 20 de las JAEM en la ciudad de València. La Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi» se enfrenta a este reto de organizar el mayor congreso de educación matemática de España con ilusión y optimismo, con plena seguridad de una experiencia enriquecedora y esperando que la visita a València os resulte satisfactoria tanto desde el punto de vista personal como profesional.

Las personas que formamos el equipo que está planificando este evento somos conscientes de la importancia que supone la celebración de las JAEM. Creemos en este modelo de formación del profesorado, pues somos nosotros mismos los que nos contamos las experiencias que nos han funcionado en nuestras clases, proponemos métodos de tratar los contenidos de enseñanza que pueden facilitar su comprensión, mostramos cómo mejorar el aprendizaje de nuestro alumnado mediante el uso de mate-





riales manipulables y recursos tecnológicos, y exponemos resultados de investigaciones que favorecen el tratamiento didáctico de las matemáticas. El profesorado de cualquier etapa educativa, desde Infantil hasta la Universidad, encuentra propuestas que le van a ayudar en su tarea docente, expuestas por colegas que realizan su trabajo con total dedicación e interés.

El lema propuesto para estas JAEM, *Matemáticas para construir el mundo,* pretende reflejar el carácter básico que tiene el pensamiento matemático para avanzar en la construcción del mundo, así como su carácter funcional que permite el avance de otras áreas de conocimiento. Muchas citas indican el carácter fundamental de las matemáticas, como la de Galileo Galilei quien dijo que «el Universo está escrito en el lenguaje de las matemáticas y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas sin las cuales es humanamente imposible entender ni una sola de sus palabras» o más recientes de Richard Phillips Feynman, según el cual «las matemáticas son el lenguaje en el que habla la naturaleza, y por eso su belleza es la de la propia naturaleza».

Fechas y sede de las 20 JAEM

La celebración de las 20 JAEM se realizará del 3 al 6 de julio de 2022 en la ciudad de València. El acto de bienvenida e inauguración lo celebraremos en el Auditori del Palau de les Arts «Reina Sofía» el domingo día 3 de julio. El resto de actividades del congreso se realizarán en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño ETSID de la Universidad Politécnica de València.

Comité científico

El comité científico de las JAEM está compuesto por siete personas, nombradas con la aprobación de la Junta de Gobierno de la FESPM, de acuerdo con la distribución de miembros establecida en las normas de organización de estas jornadas. Forman parte de este comité personas del comité organizador local, así como miembros de la comisión ejecutiva de la Federación y personas que han participado en la edición anterior o futura de las JAEM. Su misión se centra en la planificación del contenido de las jor-



Figura 1. Palau de les Arts «Reina Sofía»



Figura 2. Comité científico. De izquierda a derecha: D. Ruiz Aguilera, C. Espeso Ortiz, J. Rodríguez Taboada, T. Queralt Llopis, C. Naya Riveiro, M. Navarro Moncho, Agustín Carrillo de Albornoz Torres

nadas, estableciendo cuáles serán los núcleos temáticos en los que se organizarán las diferentes propuestas, así como proponer a las personas invitadas para las conferencias plenarias y las ponencias de cada uno de dichos núcleos temáticos.

Las personas que componen el comité científico en estas 20 JAEM son:

— Agustín Carrillo de Albornoz Torres. Secretario general de la FESPM y socio de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales».
— Carmen Espeso Ortiz. Presidenta de la Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria.
— Cristina Naya Riveiro. Socia de la Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática AGAPEMA.
— Daniel Ruiz Aguilera. Presidente de la Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX.
— Julio Rodríguez Taboada. Presidente del comité organizador local de las 19 JAEM y presidente de la Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática AGAPEMA.
— Maite Navarro Moncho. Miembro del comité organizador local y tesorera de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi».
— Tomás Queralt Llopis. Coordinador del comité organizador local y secretario general de la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi».

Comité organizador local

Una vez aprobada en Junta de Gobierno la candidatura de Valencia para la celebración de las 20 JAEM, se constituyó un comité organizador local compuesto por un equipo de socios de las tres provincias, Castelló, Alacant y València. Una primera reunión de constitución del equipo y de reparto de tareas que nos hicieron arrancar con las gestiones iniciales de planificación y búsqueda de apoyos institucionales. Las respuestas fueron muy favorables desde todas las instituciones más emblemáticas: Universidad Politécnica de Valencia, Ayuntamiento de Valencia, Conselleria de Educación, Cultura y Deporte, Gobierno

de la Generalitat y Cortes Valencianas. Sin embargo, a poco de comenzar a organizarnos vino la pandemia y nos paralizó tanto físicamente como emocionalmente. Pero tras superar la etapa más dura, de nuevo reemprendimos la marcha y hemos conseguido disponer de todo lo necesario para la gestión de la organización. El equipo está constituido por las siguientes personas:

— Fernando Arenas Planells. IES l'Allusser, de Mutxamel.
— Lluís Bonet Juan. Asesor de formación del CEFIRE d'Alacant.
— Adrián Cuenca Avi. IES Figueras Pacheco, d'Alacant.
— Vicent Diago Ortells. IES Sedaví.
— Óscar Forner Gumbau. IES de Betxí.
— Gregori García Ferri. IES l'Estació, de Ontinyent.
— Raül Martínez Sendra. IES Joan Fuster, de Sueca.
— Onofre Monzó del Olmo. CPFPA de Torrent.
— José Antonio Mora Sánchez. Profesor jubilado.
— Julia Muñoz Martínez. IES l'Allusser, de Mutxamel.
— Maite Navarro Moncho. CEEDCV de València.
— Vicent Perales Mateu. Profesor jubilado.
— José Aurelio Pina Romero. IES Gaia, San Vicent del Raspeig.
— Tomás Queralt Llopis. Servicio de Registro y Acreditación Docente de la Conselleria de Educación. Profesor asociado a la Universitat de València.
— Sílvia Quilis Marco. IES El Saler, de València.

Programa científico de las 20 JAEM

El comité científico ha planificado cuatro conferencias plenarias, para lo cual ha invitado a las siguientes personas:

— Anabel Forte Deltell. Profesora del Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universitat de València.



Figura 3. Comité organizador local

— Charlie Gilderdale. Profesor de la Universidad de Cambridge y coordinador de secundaria de NRICH.
— Lluís Bonet Juan. Profesor de matemáticas de secundaria y actualmente asesor de formación en el CEFIRE d'Alacant.
— M.ª Àngels Portilla, Magdalena Martí y Susanna Morell. Maestras de educación Infantil y Primaria por la Universitat de les Illes Balears.

El comité científico decidió estructurar los contenidos de estas JAEM en siete núcleos temáticos, menos centrados en las etapas educativas y poniendo el foco en aspectos de interés educativo en el aprendizaje de las matemáticas. En cada uno de ellos, se ha invitado a dos ponentes que harán propuestas centradas en los contenidos relativos al mismo.

1. PROCESOS

Desde Educación Infantil hasta Universidad, este núcleo recogerá las propuestas, experiencias y reflexiones sobre los distintos procesos que requieren la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, para cualquiera de los bloques de contenidos y en cualquiera de sus modalidades y etapas.

— Constantino de la Fuente Martínez, del IES Cardenal López de Mendoza (Burgos).
— Antonio Moreno Verdejo, de la Universidad de Granada.

2. CONEXIONES

Los docentes de matemáticas suelen afirmar que las matemáticas están «en todas partes», con lo que se defiende la capacidad de los conocimientos matemáticos para entender el mundo, además de ser un lenguaje que sustenta muchas disciplinas científicas y artísticas. De esta manera se difuminan las fronteras entre los bloques de contenidos, lo que debería llevar a una visión más global de las matemáticas.

— Lluís Mora Cañellas, del INS Cabrils (Barcelona).
— Eva María Acosta Gavilán, del IES Santo Domingo de El Ejido (Almería).



Figura 4. Auditori del Palau de les Arts «Reina Sofía»

3. EVALUACIÓN

La evaluación es una parte integrante del proceso de enseñanza y aprendizaje, y debe tener un carácter continuo, formativo e integrador, y a poder ser global para favorecer las conexiones y relaciones de las matemáticas. La evaluación se debería concebir como una oportunidad de aprendizaje, como ocasiones para que los estudiantes muestren evidencias de su competencia matemática (lo que saben y lo que pueden hacer) y como un proceso de mejora progresiva que lleve al alumnado a aprender de sus propios errores y a recibir retroalimentación.

— Ruth Martín Escanilla, del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (MEFP).
— Maite Gorriz Farré, inspectora de Educación de la Generalitat de Catalunya.

4. RECURSOS PARA EL AULA

Cuando hablamos de recursos para reforzar, completar o dirigir el aprendizaje de las matemáticas estamos pensando en una gama muy amplia de recursos y de materiales, que utilizamos en todos los niveles educativos. Desde materiales manipulativos, como puzles y juegos, programas informáticos, vídeo o fotografía, hasta el hecho de plantear una contextualización de los aprendizajes en la vida diaria del alumnado o recurrir a la historia de la matemática.

— Marcos Marrero Cárdena, del CEIP Isaac de Vega de Tenerife.
— Laura del Río, del Liceo Víctor Mercante, La Plata (Argentina).

5. FORMACIÓN DEL PROFESORADO

La realidad en la que vivimos exige una preparación sin la cual no se puede dar respuesta a las necesidades que surgen dinámicamente y que afectan tanto a la persona que se forma como a los que nosotros formamos en nuestra tarea de profesores. Tanto la formación inicial como la formación permanente contribuyen a la idea de «formación a lo largo de toda la vida», idea que todo profesional tiene asimilada en su fuero interno.



Figura 5. Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño ETSID de la Universidad Politécnica de València

— José Ángel Murcia Carrión, de la Universidad Complutense de Madrid.
— Iolanda Guevara Casanova, del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya y profesora asociada de la UAB.

6. COMUNICACIÓN Y DIVULGACIÓN

La comunicación, en el sentido más amplio del término, se presenta como un elemento fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje: el tipo de lenguaje utilizado en el aula, las diferentes representaciones elegidas para una determinada situación, la importancia del lenguaje simbólico, las exposiciones y producciones del alumnado, etc.

La divulgación matemática, pese a no buscar a priori los mismos objetivos que la educación matemática, es un recurso muy útil para conseguir contextualizar conceptos y propiedades matemáticas, acercar al alumnado a la labor del matemático en distintos campos profesionales y mejorar la actitud del alumnado hacia la materia.

— Sergio Belmonte Palmero, del Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA).
— Pablo Beltrán Pellicer, de la Universidad de Zaragoza.

7. INCLUSIÓN

La educación es la base de la calidad de vida de las personas. La educación inclusiva y equitativa contribuye a potenciar el talento de todas las personas. Cada día se pone de manifiesto que las personas matemáticamente competentes tendrán más oportunidades para elegir su propio futuro profesional. Por ello, el aprendizaje de las matemáticas no puede ni debe estar reservado para unos pocos elegidos. No hay conflicto entre equidad y excelencia.

Todas las personas deberían tener la oportunidad y el apoyo necesario para aprender significativamente una base común de matemáticas. Las personas muestran diferentes capacidades, habilidades, necesidades, motivaciones e intereses. Sin embargo, todas deben tener acceso a una enseñanza de las matemáticas de la mejor calidad.

— Covadonga Rodríguez Moldes, profesora del IES Mugardos, actualmente jubilada.
— Concha Barceló López, actualmente en la Subdirecció General de Formació del Profesorat de la Generalitat Valenciana, junto con Begoña de la Iglesia Mayol, de la Universitat de les Illes Balears.

Modalidades de participación

El profesorado que lo desee puede presentar propuestas de participación en alguna de las siguientes modalidades que ha establecido el comité científico:

— Comunicaciones
— Talleres
— Pósteres
— Exposiciones
— Rutas matemáticas
— PechaKutxa 20×20
— Mesa de experiencias

Programa cultural

Además de las incluidas en el programa científico, el comité organizador tiene previstas una serie de actividades lúdicas y culturales que, con toda seguridad, contribuirán a completar la experiencia de participar en las 20 JAEM.

Dentro de este programa destacamos:

— Entrega del XI Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez»
— Excursiones y visitas culturales
— Cena de gala
— Exposiciones comerciales

Información e inscripciones

Toda la información sobre el progrma, la participación y las inscripciones está disponible en la página web: < https://20.jaem.es/>.

En la siguiente tabla se recogen las tarifas y plazos para la inscripción en las jornadas. A partir del 21 de junio se cerrará oficialmente el plazo de inscripciones. A partir de dicha fecha, cualquier petición de inscripción se tendrá que solicitar al comité organizador que valorará la posibilidad de aceptar fuera de plazo dicha inscripción. Las personas que presenten propuestas en alguna modalidad de participación podrán esperar a realizar la inscripción hasta el momento de la confirmación de aceptación del trabajo propuesto.

Cuotas de las 20 JAEM - València	Hasta el 31 de mayo	Del 1 de junio al 20 de junio
Miembros de sociedades federadas o que han firmado convenio con la FESPM	120 €	150 €
General	180 €	220 €



Comité organizador local

<20jaemvalencia@gmail.com>

FESPM

Seminario Federal Matemáticas inclusivas

María Teresa Navarro Moncho

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas consideró oportuna la organización de un Seminario sobre «Matemáticas inclusivas» que se celebró en Castro Urdiales del 26 al 28 de noviembre de 2021 con la colaboración del Centro Internacional de Encuentros Matemáticas.

La organización y la planificación previa a su celebración corrió a cargo de Concepción Barceló López, Begoña de la Iglesia Mayol, Daniel Ruiz Aguilera y M.ª Teresa Navarro Moncho, como responsable de la organización y coordinación del seminario.

Para preparar el seminario nos hicimos algunas preguntas: ¿Son las matemáticas una disciplina de selección y exclusión social? ¿El conocimiento matemático se sigue considerando un privilegio de unas pocas personas o se considera un derecho de todos? ¿Cómo deben ser las tareas para personalizar el currículo? ¿Cuál debe ser el rol del profesorado en la enseñanza de unas matemáticas inclusivas? ¿Cuál es el papel de los apoyos educativos para garantizar unas matemáticas

CIEM

inclusivas? ¿Qué apoyos educativos puede o debe proporcionar el profesorado al alumnado para atender a la diversidad en el aula de matemáticas?

La constitución española reconoce el derecho a la educación a todas las personas. Todas las personas deberían tener la oportunidad y el apoyo necesario para aprender significativamente una base común de matemáticas.

Por otra parte, el National Council of Teachers of Mathematics afirma en *De los principios a la acción: para garantizar el éxito matemático para todos,* que la implementación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas eficaces solo es posible cuando los programas escolares de matemáticas contienen cinco elementos esenciales:

— un compromiso con la equidad y el acceso;
— un currículo sólido;
— herramientas y tecnología apropiadas;
— una evaluación significativa y concordante; y
— una cultura del profesionalismo.

A nivel escolar y de aula, el acceso y la equidad en matemáticas se basan en creencias y prácticas que facultan a todo el alumnado a participar de un modo significativo en el aprendizaje de las matemáticas y a lograr resultados en esa disciplina que no se correlacionan ni se predicen a partir de sus características.

Ahora bien, proporcionar a todo el alumnado los mismos materiales curriculares, los mismos métodos de enseñanza, el mismo tiempo de aprendizaje y los mismos apoyos para la enseñanza y aprendizaje es muy distinto a asegurar que todos tengan la misma probabilidad de lograr resultados significativos.

Así pues, planteamos los siguientes objetivos:

— Reflexionar sobre las tareas y el uso de los materiales manipulables y la tecnología como recursos esenciales en un aprendizaje significativo de las matemáticas para todo el alumnado.
— Analizar el papel que juegan la detección precoz de las dificultades específicas de aprendizaje, el talento matemático y las necesidades de apoyo educativo en el acceso y la equidad en la enseñanza de las matemáticas.
— Reflexionar sobre el papel de la evaluación formativa y formadora como medio para la mejora de la educación matemática.

Y concretamos los siguientes contenidos:

— El papel de las tareas en una enseñanza inclusiva de las matemáticas.
— El papel del apoyo educativo para garantizar el derecho de todo el alumnado a un aprendizaje significativo de las matemáticas.
— El papel de la evaluación como medio para lograr una enseñanza y un aprendizaje eficaces para todos.

Con todo ello, planificamos las tres conferencias de manera que se fueran introduciendo diferentes elementos para el debate y la discusión en los grupos de trabajo. Partiendo del marco de la escuela inclusiva, analizar cómo promover oportunidades de aprendizaje y estudiar las características que deben tener los recursos para atender la diversidad y las prácticas inclusivas.

Las conferencias

¿Podemos ser promotores de oportunidades de aprendizaje de matemáticas en el marco de una escuela inclusiva?, a cargo de Concepción Barceló López y M.ª Teresa Navarro Moncho.

En esta conferencia se analizó el perfil del alumnado con diferencias de aprendizaje en matemáticas y se puso el foco en la formación y en la actitud del profesorado como pilares fundamentales para ofrecer oportunidades de éxito educativo a este alumnado.

La formación es indispensable para conocer las necesidades específicas de apoyo educativo del alumnado más vulnerable y tenerlas en cuenta al

programar situaciones de aprendizaje competenciales, basadas en el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA).

La actitud flexible, abierta y de crecimiento nos lleva a tener altas expectativas hacia todo el alumnado e incrementar la motivación.

Además, las oportunidades de aprendizaje suceden en el marco de una escuela inclusiva que tiene como dimensiones las culturas o valores inclusivos, las políticas, encaminadas a movilizar recursos para atender mejor a la diversidad y las prácticas de aula, diseñadas para conseguir la presencia, la participación y el aprendizaje de todos los alumnos y alumnas, poniendo el foco en la identificación y eliminación de las barreras del contexto que pueden impedir el aprendizaje de conceptos y procesos matemáticos.

¿Qué recursos son adecuados para atender la diversidad?, a cargo de Daniel Ruiz Aguilera.

En esta charla se trató el papel del diseño de las actividades con una perspectiva inclusiva. Se partió de dos ideas básicas: que todos los alumnos pueden hacerlo bien en matemáticas y cometer errores, y que todos los alumnos pueden y deben bloquearse.

Con estos dos aspectos en mente, se esbozaron algunas características esenciales a tener en cuenta cuando se diseñan actividades inclusivas y se presentaron algunas propuestas coherentes con esta línea, entre ellas, las actividades de suelo bajo y techo alto (o sin techo), las propuestas de Which One Doesn't Belong?. También se analizó la importancia de los recursos materiales y la calculadora en la atención a la diversidad.

Acceso al documento de la presentación: <https://t.co/8Or9PP0l9D>.

¿Cuándo podemos afirmar que una práctica es inclusiva?, a cargo de Begoña de la Iglesia Mayol.

En esta ponencia se analizaron las prácticas presentadas en la conferencia anterior desde el paradigma inclusivo. Así, se empezó dando importancia a la mirada que guía nuestras intervenciones docentes y a la gestión de las actividades y recursos, así como también a la programación y diseño de las mismas.

Para ello, fundamentamos el análisis en las aportaciones del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA), del Modelo de Respuesta a la Intervención (RtI), las dimensiones del Index for Inclusion (presencia, participación, aprendizaje, y añadimos la autonomía); de los predictores de éxito, de la teoría del experto y las altas expectativas, de la organización de los apoyos y facilitadores del aprendizaje, los indicadores competenciales, la teoría del aprendizaje autorregulado…, todo ello para asegurar el aprendizaje de calidad de todo el alumnado, sea cual sea su condición y sus características.

Conclusiones de los grupos de trabajo

Se organizó el trabajo en dos grupos.

GRUPO 1: EL PAPEL DE LAS TAREAS EN UNA ENSEÑANZA INCLUSIVA DE LAS MATEMÁTICAS

Características de las tareas adecuadas para fomentar una enseñanza inclusiva de las matemáticas. Materiales manipulativos y tecnológicos apropiados.

Reflexiones

En este grupo de trabajo se analizaron los dos marcos teóricos sobre educación inclusiva desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas.

A pesar de que estos son muy generalistas, se valora positivamente el paraguas que ofrecen para trabajar y comunicarnos con otros sectores habitualmente más centrados en la inclusión (psicólogos, pedagogos, PT, etc.).

Para reflexionar sobre el papel de las tareas en una enseñanza inclusiva de las matemáticas, se han tenido en cuenta estas tres fases de una tarea:

— Preparación previa

— Ejecución en el aula
— Evaluación

Esto llevó a responder las siguientes preguntas:

— ¿Qué características debe tener una tarea de matemáticas para que se considere inclusiva?
— ¿Qué gestión de las tareas promueve una enseñanza matemática inclusiva?
— ¿Qué tipo de producciones se pedirá al alumnado?

Aportaciones del marco de la educación inclusiva

Los dos marcos o referentes teóricos que fundamentaron el análisis llevado a cabo fueron el DUA y el Index for Inclusion (Booth, Ainscow y Dyson, 2006).

Las tareas en una enseñanza de las matemáticas deben ser coherentes con los principios del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA):

— Principio I. Proporcionar múltiples formas de representación de la información y los contenidos (el qué del aprendizaje), ya que los alumnos son distintos en la forma en que perciben y comprenden la información.
— Principio II. Proporcionar múltiples formas de expresión del aprendizaje (el cómo del aprendizaje), puesto que cada persona tiene sus propias habilidades estratégicas y organizativas para expresar lo que sabe.
— Principio III. Proporcionar múltiples formas de implicación (el porqué del aprendizaje), de forma que todos los alumnos puedan sentirse comprometidos y motivados en el proceso de aprendizaje.

Pero una actividad por sí sola no puede ser inclusiva. Solo se convierte en inclusiva si va acompañada de una buena gestión. Para hacer recomendaciones en este sentido hemos tenido en cuenta los indicadores de buenas prácticas inclusivas (Booth, Ainscow y Dyson, 2006):

— Presencia: La primera condición es que todos los alumnos estén siempre presentes en todas las actividades, situaciones de aprendizaje y experiencias que se desarrollen con el grupo de referencia.
— Participación: Todos los alumnos, sin ninguna excepción, participen en todas las actividades, situaciones de aprendizajes y experiencias planificadas para el grupo de referencia. Ello no



Figura 1. El grupo 1

significa que todos los alumnos deban participar de la misma manera, sino que debe ofrecerse un abanico suficientemente amplio de posibilidades, que permita esta participación a todos y a cada uno de los alumnos respetando sus capacidades.

— Progreso (aprendizaje). El desarrollo de un proceso educativo requiere necesariamente que todos los alumnos en todas las experiencias, actividades y situaciones planteadas alcancen un aprendizaje óptimo, aunque no sea necesariamente el mismo para todos y cada uno de los alumnos.

Estos indicadores se ven reforzados desde la mirada de una educación inclusiva si, además, nos esforzamos por lograr la autonomía del alumnado en la realización de las tareas. Esto involucra la autorregulación; la consciencia sobre el proceso; y la evaluación formadora. A continuación se exponen una serie de consideraciones en relación a cómo deben ser las tareas para que sean inclusivas.

Características de las tareas

Las matemáticas para establecer una definición, a menudo, utilizan ejemplos y contraejemplos. Un análisis de ejemplos y contraejemplos sobre educación inclusiva y competencial nos permite concluir que la mirada inclusiva y la mirada competencial de la enseñanza de las matemáticas tienen muchos puntos en común.

Las preguntas que nos hacemos para ver si una tarea es competencial pueden ayudarnos también a analizar si esta es inclusiva («Indicadores competenciales: un instrumento para la mejora del desarrollo de la competencia matemática», M.Torra, 2014).

En relación al planteamiento, es interesante preguntarse:

— ¿Es una actividad que tiene por objetivo responder a una pregunta? La pregunta puede referirse a un contexto cotidiano, puede enmarcarse en un juego, puede tratar una regularidad o un hecho matemático.

— ¿Conduce a aplicar conocimientos ya adquiridos y a realizar nuevos aprendizajes? ¿Ayuda a relacionar conocimientos dentro de la matemática o con otras materias?

— ¿Es una actividad que puede desarrollarse de distintas formas y estimula la curiosidad y creatividad del alumnado?

— ¿Implica el uso de instrumentos diferentes como, por ejemplo: material manipulable, instrumentos de dibujo, programario, calculadora, etc.?

Además, los marcos de educación inclusiva nos aportan las siguientes características:

— Debe ser la misma para todo el alumnado, pero planteada con diferentes posibilidades de progreso y éxito para cada estudiante.

— Debe poder presentarse en diferentes formatos y con diferentes tipos de representaciones para facilitar su acceso.

— Debe ofrecer la posibilidad de atascarse.

— Debe permitir a todo el alumnado empezar la tarea (suelo bajo).

— Debe poder permitir la participación y ser significativa para todo el alumnado (eso no significa que tenga que ser de la vida cotidiana, pues este contexto se queda muy limitado para generar situaciones ricas en matemáticas).

— Debe permitir recoger las producciones del alumnado en diferentes formatos.

— Debe tener una secuencia didáctica suficientemente abierta como para admitir diferentes estrategias.

— Deben ser tareas abiertas y que admitan soluciones múltiples (*open middle or open ended*):
  a) Solución única a la que se llega con diversas estrategias.
  b) Múltiples soluciones o ninguna
  c) Combinación de ambas

— Debe tener en cuenta los posibles itinerarios de aprendizaje de los saberes matemáticos (rocódromo) para asegurarse de que cada alumno va a poder progresar por uno de ellos.

— Debe favorecer la conexión entre diferentes representaciones del mismo objeto matemático.

— Pueden ser tareas ricas y prácticas productivas.

¿Qué gestión de las tareas promueve una enseñanza matemática inclusiva?

De nuevo, del enfoque competencial de la enseñanza de las matemáticas podemos recuperar las siguientes preguntas:

— ¿Se fomenta la autonomía y la iniciativa del alumnado?
— ¿Se interviene a partir de preguntas adecuadas más que utilizando explicaciones?
— ¿Se pone en juego el trabajo y el esfuerzo individual pero también el trabajo en parejas o en grupos para hablar, argumentar, convencer, consensuar, etc.?
— ¿Implica razonar sobre lo que se ha realizado y justificar los resultados?
— ¿Se progresa en la representación de forma cada vez más precisa y se usa progresivamente lenguaje matemático más esmerado?

También contamos con una herramienta que nos marca el peso que deben tener los diferentes recursos para desarrollar la competencia matemática «La pirámide de la educación matemática. Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática» (A. Alsina 2010) <https://dugi-doc.udg.edu/bitstream/handle/10256/9481/PiramideEducacion.pdf?sequence=>(figura 2).

Además, considerando los marcos de educación inclusiva proponemos las siguientes buenas prácticas a tener en cuenta en una gestión inclusiva de las tareas matemáticas: la actitud del profesor en el aula debe poder generar un entorno de confianza donde el foco esté en los procesos y no en juzgar la corrección de las respuestas.

— Se escuchan todos los planteamientos que hacen los alumnos.
— No se penalizan los errores, sino que se analizan para aprender.



Figura 2. La pirámide de aprendizaje (Alsina, 2010)

Los recursos deben ser diversos:

— En concreto, los materiales manipulables se pueden utilizar con diferentes intenciones: para iniciar, facilitar, desarrollar o evaluar.

Jugar con las agrupaciones:

— Mejor en pequeños grupos heterogéneos, aunque es bueno que también haya producciones individuales que se puedan compartir.
— Rol específico de matemáticas: «el/la cuestionador/a» pone en cuestión lo que vamos haciendo, pregunta «¿y por qué?».

Puestas en común que tengan por objetivo:

— Visibilizar distintos procesos de pensamiento: uso de cámaras de documentos, pizarras en las paredes…
— Ensayo-mejora: aprovechando el error como motor del aprendizaje.

Buenas preguntas que favorecen la participación y el progreso de todos <https://nrich.maths.org/2473>:

— Preguntas de inicio. Por ejemplo: ¿Cómo podría ordenar estos...? ¿De cuántas formas puedes encontrar para...?
— Preguntas para estimular el pensamiento matemático. Ejemplos: ¿Qué es lo mismo? ¿Qué es diferente? ¿Puedes agrupar estos... de alguna manera?
— Preguntas de evaluación. Ejemplos: ¿Qué has descubierto? ¿Cómo averiguaste eso? ¿Por qué piensas eso? ¿Qué te hizo decidir hacerlo de esa manera?
— Preguntas finales para el debate. Ejemplos: ¿Quién tiene la misma respuesta / patrón / agrupación que este? ¿Quién tiene una solución diferente? ¿Crees que hemos encontrado la mejor solución?
— Acciones de contingencia basadas en conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/07370000802177235>.

¿Qué tipo de producciones pedir al alumnado?

Las producciones que se pidan al alumnado en la elaboración de la tarea deben ser diversas y deben favorecer la autonomía, la metacognición y la autorregulación del alumnado. Además, servirán para su evaluación.

Proponemos herramientas como:

Bases de orientación, por ejemplo, para la resolución de problemas.

Rutinas:

— Veo-pienso-me pregunto.
— ¿Qué observo? ¿Qué puedo saber? ¿Qué me gustaría saber?
— Compara y contrasta.
— Organizadores gráficos.
— Y otras…

Herramientas de autoevaluación:

— Rúbricas: 4 niveles (N. Sanmartí, 2007, *Evaluar para aprender*)..

En la tabla 1 se muestran algunos ejemplos y contraejemplos de tareas en una enseñanza inclusiva de las matemáticas.

Ideas emergentes

Elaborar una herramienta (árbol, indicadores) que permita saber si una tarea diseñada con una mirada competencial además se gestiona acorde con una mirada inclusiva.

GRUPO 2: EL PAPEL DEL APOYO EDUCATIVO PARA GARANTIZAR EL DERECHO DE TODO EL ALUMNADO A UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS MATEMÁTICAS

Análisis de las dificultades específicas de aprendizaje y las necesidades de apoyo educativo para planificar acciones que garanticen que cada alumno se vea a sí mismo capaz de utilizar su conocimiento matemático para dar sentido a los problemas del mundo que le rodea.

Consideraciones previas

Entendemos los apoyos como las actuaciones, recursos, materiales, decisiones metodológicas, etc., que dan una respuesta educativa de calidad porque aseguran presencia, participación y progreso de todo el alumnado, con el fin último de que este autorregule su aprendizaje.

Comprender la diversidad del aula significa ser respetuoso con los diferentes ritmos y maneras de aprender y ser conscientes de que todas las personas tenemos puntos fuertes y débiles. En este sentido, la verbalización de la diferencia y de la capacidad es fundamental como fuente de enriquecimiento.

Uno de los pilares fundamentales para el éxito educativo es que el profesorado tenga altas expectativas hacia todo su alumnado.

Ejemplos de semillas para tareas	Contraejemplos
<https://donsteward.blogspot.com/> <https://wodb.ca/> <https://www.visualpatterns.org/> <https://docs.google.com/spreadsheets/d/1jXSt_CoDzyDFeJimZxnhgwOVsWkTQEsfqouLWNNC6Z4/edit#gid=0> <https://gfletchy.com/3-act-lessons/> <https://nrich.maths.org/> <https://www.mathshell.com/> <http://puntmat.blogspot.com/> <https://www.map.mathshell.org/> <https://www.desmos.com/calculator?lang=es>	Las que se presentan en un solo formato y luego necesitan muchas adaptaciones. Por ejemplo: enunciado escrito. Las que piden repeticiones sin cambios. Por ejemplo: Resuelve estas diez ecuaciones. Las que solo admiten un tipo de respuesta. Por ejemplo: Calcula esta suma con el algoritmo vertical. Las que evalúan solo la corrección de la respuesta y no el proceso. Por ejemplo: Selecciona cuál de las cuatro opciones es el MCD de estos números (a, b, c o d). Las que explican y no construyen el conocimiento del alumnado. Por ejemplo: «Hoy os voy a explicar cómo se suman y restan enteros».

Tabla 1. Semillas para tareas

Organización de los apoyos dentro del grupo de referencia

Presentamos la organización de los apoyos en la enseñanza de las matemáticas, partiendo del modelo RTI (respuesta a la intervención). El primer nivel hace referencia al apoyo universal y los demás añaden aspectos concretos del ámbito correspondiente.

Nivel 1. Apoyo universal: Para todo el alumnado, en el centro y aula

Este nivel pretende una enseñanza de alta calidad y apoyo al comportamiento para todos los estudiantes de la escuela y comporta:

— Identificación de las capacidades, habilidades, fortalezas e intereses de todo nuestro alumnado.
— Identificación de las variables cognitivas, motivacionales y emocionales del alumnado para facilitar el aprendizaje autorregulado.
— Identificación de las barreras del contexto que pueden impedir el progreso de nuestro alumnado.
— Detección para intervenir, sin esperar al diagnóstico (más que diagnóstico). Alternativa: Detección para intervenir haya o no un diagnóstico.
— Programación multinivel teniendo en cuenta:
  a)Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA).
  b)Predictores de éxito.
  c)Indicadores de la riqueza competencial de una actividad.
  d)Diferentes niveles de complejidad cognitiva (recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear).
  e)Evaluación formativa y formadora.
— La anticipación como estrategia proactiva para intervenir sin esperar a que fracasen.
— Asegurar el éxito de todo el alumnado en las actividades.
— Observar al alumnado y escuchar sin juzgar para conocer el punto de partida de cada uno.
— Generar un entorno seguro en el aula evitando las situaciones de visibilización de la vulnerabilidad.

— Elegir los facilitadores más adecuados, es decir, los apoyos que son imprescindibles para algunos, necesarios para muchos y beneficiosos para todos.
— Movilizar y optimizar los recursos personales del centro para que haya dos docentes en el aula el mayor tiempo posible (codocencia).
— Poner en práctica un amplio abanico metodológico: trabajo cooperativo, grupos interactivos, tutoría entre iguales, gamificación, aprendizaje basado en problemas, en proyectos, aprendizaje servicio, etc.
— Crear espacios para compartir estrategias y buenas prácticas docentes.

Nivel 2. Apoyo estratégico: Grupos reducidos heterogéneos

Este nivel comporta intervenciones adicionales para estudiantes que necesitan mayor ayuda en destrezas específicas. Grupos reducidos heterogéneos.

Es la redefinición de los apoyos al identificar necesidades que no se han cubierto desde el apoyo universal, ofreciéndolos dentro del aula ordinaria y en grupos reducidos heterogéneos.

Nivel 3. Apoyo intensivo e individualizado: atendiendo a las variables cognitivas, motivacionales y emocionales

En este nivel se realizan intervenciones diseñadas específicamente para cubrir las necesidades únicas de estudiantes individuales.

— Intensificación de los apoyos al identificar necesidades que no se han cubierto desde el apoyo universal y estratégico, ofreciéndolos dentro del aula ordinaria de manera individualizada.

Cuando todos estos apoyos se dan y, sin embargo, el alumnado no progresa en su aprendizaje es cuando se hace necesario el apoyo de profesionales especialistas.

En este sentido, se sobreentiende que el apoyo universal, el estratégico y el individualizado se realizan dentro del grupo de referencia y las personas responsables de gestionarlo son los profesores y profesoras de aula. Destacamos que el apoyo universal continúa siendo el reto principal de las actuaciones docentes para asegurar los principios de una educación inclusiva, esto es la presencia de todas y todos, su participación y su éxito educativo.

Recursos

Ideas para guiar los procesos matemáticos en los diferentes niveles. Grandes ideas: visualizar, jugar, investigar, Jo Boaler, Jen Munsen, Cathy Williams: <https://www.youcubed.org/>.

Referencias sobre trayectorias de aprendizaje: María Luz Calleja de la Vega <https://rua.ua.es/ dspace/



Figura 3. El grupo 2

bitstream/10045/88427/1/2019_Callejo_Montero_UNO.pdf>.

Apoyo para diseñar trayectorias de aprendizaje <https://www.learningtrajectories.org/>.

Ciència per superar les dificultats d'aprenentatge <https://neurekalab.com/lang/ca/>.

El vocabulario matemático, introducirlo en el contexto de aprendizaje y trabajarlo. Trabajar la capacidad lectora de determinadas palabras. Vocabulario visual <https://quizlet.com/es>.

Ideas emergentes

Es necesaria una investigación en cuanto a los distintos hitos de adquisición de los contenidos matemáticos. El profesorado necesita formación del proceso de adquisición de las competencias matemáticas.

Referencias bibliográficas

Alsina, A. (2010), «La pirámide de la educación matemática», *Aula de Innovación Educativa,* n.º 189, 12-16.

Ainscow, M., T. Booth y A. Dyson (2006), *Improving Schools, Developing Inclusion*, Taylor & Francis Group, Londres.

Sanmartí, N. (2007), *Evaluar para aprender,* col. Ideas Clave, Graó, Barcelona.

Torra, M. (2014), «Indicadores competenciales: un instrumento para la mejora del desarrollo de la competencia matemática», *Edma 0-6, Educación matemática en la infancia*, revista electrónica de la UCM.



Figura 3. Todo el grupo

María Teresa Navarro Moncho
Centre Específic d'Educació a Distància de la Comunitat Valenciana
<mt.navarromoncho@edu.gva.es>

FESPM

Seminario Federal Sentidos Matemáticos en los nuevos currículos

Juana M.ª Navas Pleguezuelos

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) convocó el Seminario sobre los sentidos matemáticos en los nuevos currículos de enseñanza no universitaria, celebrado en Castro Urdiales del 4 al 6 de marzo de 2022, con la colaboración del Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM).

La convocatoria obedece principalmente a la necesidad de fijar la posición de la FESPM sobre el cambio curricular que conlleva la implantación de la LOMLOE. Para ello se crearon dos grupos de trabajo en el seno de este seminario para elaborar propuestas de futuro que ayuden al profesorado a adaptar su práctica docente a las nuevas orientaciones curriculares.

Estos grupos de trabajo fueron coordinados por Cecilia Calvo Pesce (Infantil y Primaria) y Julio Rodríguez Taboada (Secundaria y Bachillerato), correspondiendo a la secretaria de formación de la FESPM, Juana M.ª Navas Pleguezuelos, la coordinación general de la actividad.

CIEM

fpm

El trabajo del seminario se distribuyó entre dos conferencias plenarias y sesiones de trabajo de los grupos. Las conferencias fueron impartidas por Onofre Monzó del Olmo y Antonio Moreno Verdejo, componentes del grupo de trabajo creado en el seno del Comité Español de Matemáticas (CEMat)[1], autor del documento «Bases para la elaboración de un currículum de Matemáticas en Educación no universitaria»[2], cuyo contenido estuvo muy presente en todas las sesiones de trabajo.



Figura 1. Onofre Monzó del Olmo

Conferencias

Las conferencias que se impartieron al comienzo de cada una de las sesiones de trabajo fueron las siguientes:

Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas, a cargo de Onofre Monzó del Olmo.

En esta conferencia se expusieron los principios teóricos que sustentan la propuesta realizada por el grupo de trabajo del CEMat, que aboga por un modelo competencial, poniendo el foco de la educación matemática en los procesos y no en los contenidos, con el objetivo de que el alumnado aprenda matemáticas entendiéndolas, siendo consciente de la construcción del conocimiento a partir de sus experiencias y de conocimientos anteriores. Se hizo énfasis en que la propuesta curricular de la LOMLOE se alinea con la presentada por el grupo de trabajo del CEMat, institución en la que están representadas asociaciones de profesorado no universitario, profesorado universitario, investigadores en matemáticas, investigadores en educación matemática y otras instituciones con distinto protagonismo en el campo de las matemáticas y de la ciencia.



Figura 2. Antonio Moreno Verdejo

Principios metodológicos para el nuevo desarrollo curricular, a cargo de Antonio Moreno Verdejo

Esta segunda conferencia se centró en la necesidad de un cambio metodológico ligado al cambio de orientación de la nueva propuesta curricular. Además de la presentación de los principios teóricos, se mostraron varios ejemplos de situaciones de aprendizaje, entendidas como situaciones contextualizadas y complejas que requieren la resolución de una tarea por parte del alumnado a través de la movilización de procesos matemáticos y haciendo uso de los saberes básicos.

Ambos conferenciantes destacaron algunas novedades del documento de bases, que se recogen en los nuevos currículos, como la atención prestada al pensamiento computacional o el protagonismo del sentido matemático, entendido como el conjunto de capacidades relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos y algebraicos, geométricos, métricos y estocásticos, que permiten emplear estos contenidos de una manera funcional y con confianza en las propias habilidades.

Conclusiones de los grupos de trabajo

A pesar de realizar las sesiones en dos grupos diferenciados atendiendo a las etapas educativas, tras la sesión de trabajo conjunta y la puesta en común correspondiente, pudimos comprobar que las demandas o propuestas no diferían en exceso, por lo que se presentan de forma conjunta, aunque con alguna referencia específica en alguna de ellas.

Los asistentes coincidimos en la importancia de este nuevo enfoque curricular, valorando muy positivamente el hecho de que recoja una gran parte de las propuestas realizadas desde la comunidad matemática, representada en el CEMat. Consideramos que estamos ante una propuesta curricular competencial, que sigue la línea de otras sociedades destacadas en el campo del desarrollo curricular, como pueden ser la canadiense provincia de Ontario o un referente más próximo como Portugal. Es necesario señalar que estas nuevas orientaciones se fundamentan en resultados obtenidos en décadas de estudios e investigaciones realizadas en el área de la Didáctica de la Matemática, por lo que, aunque se trate de un currículo novedoso en España, no lo son tanto las propuestas que contiene, pues muchas de ellas nacieron a mediados del siglo pasado.

Los participantes decidimos condensar las conclusiones en tres mensajes, dirigidos a los principales actores responsables del éxito de este nuevo currículo: el profesorado, las administraciones educativas y los responsables de la formación inicial de los nuevos docentes.

A NUESTROS COMPAÑEROS Y COMPAÑERAS

Este cambio curricular debe ser visto como una oportunidad para cambiar el enfoque de la educación matemática no universitaria en la dirección avalada por las investigaciones, por la comunidad matemática y por la experiencia de los sistemas educativos que destacan por su propuesta curricular. Este cambio no supone romper drásticamente con las buenas prácticas que una parte importante del profesorado estaba llevando a cabo en sus aulas, las cuales encajarán en esta nueva propuesta, tras una pequeña labor de reflexión y adaptación.

El cambio ha de ser progresivo pero real, iniciándose a partir del próximo curso 2022-2023, de manera reflexiva, abandonando inercias alejadas de los principios de educación matemática reflejados en el currículo y evitando limitarlo a intentar encajar prácticas anteriores en la nueva nomenclatura. En este sentido, consideramos que es fundamental aprovechar los beneficios del trabajo colaborativo, creando espacios y entornos en los que compartir experiencias, inquietudes, problemas y soluciones con otros compañeros y compañeras, tanto de nuestro mismo centro como de otros.

Animamos al profesorado a aprovechar la formación que con toda seguridad ofertarán las asociaciones de profesorado y las administraciones educativas para sentirse acompañado en la transición hacia el nuevo modelo. Recomendamos además la consulta de experiencias y recursos, reflexionando sobre la incorporación de los mismos a su trabajo de aula, así como la consulta de las prácticas recomendadas en el documento de bases del CEMat.

A LAS ADMINISTRACIONES EDUCATIVAS

A los responsables de las políticas educativas y de la gestión de los recursos les pedimos que adopten las medidas necesarias para facilitar el cambio metodológico, como son:

— Planificar e implementar suficientes actividades de formación para facilitar al profesorado la adaptación al nuevo currículo. Esta formación debería ser impartida por personas con experiencia docente con enfoques como los que recoge la nueva propuesta e incorporar actividades específicas sobre programación y evaluación.
— Fomentar la creación de redes y espacios de colaboración intercentros, incorporando la figura del «coordinador de matemáticas» a los centros de Infantil y Primaria.
— Dotar a los centros de recursos, tanto manipulativos como tecnológicos, que permitan desarrollar una metodología activa y adaptada a las indicaciones curriculares.

— Adaptar las ratios y las plantillas docentes teniendo en cuenta las características del modelo de gestión de aula propuesto en el desarrollo curricular y el modelo de atención a la diversidad que se deriva del mismo.
— Diseñar e implementar las distintas pruebas de evaluación (EBAU y evaluaciones de diagnóstico) a partir de los criterios de evaluación recogidos en el desarrollo curricular.
— Poner a disposición del profesorado publicaciones posteriores a los reales decretos, con ejemplificaciones de alto valor matemático.



Figura 3. Los participantes en el seminario

A LOS RESPONSABLES DE LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO

La aprobación e implementación de los nuevos currículos deberá verse reflejada en la formación inicial de los docentes de todas las etapas educativas no universitarias.

En el caso de las facultades de formación de profesorado de Educación Infantil y Educación Primaria consideramos que serían necesarias las siguientes medidas:

— Creación de departamentos o áreas de Didáctica de la Matemática en todas aquellas facultades que aún no cuentan con ellos.
— Creación de laboratorios de Matemáticas y espacios habilitados para que el alumnado trabaje con materiales y recursos, manipulativos y/o tecnológicos.
— Valorar las ventajas de mantener un contacto estrecho con docentes en activo, beneficiándose de sus aportaciones basadas en su experiencia y creando un vínculo con la realidad cotidiana del aula.
— Adaptar el plan de formación de los futuros maestros y maestras al enfoque y las orientaciones del nuevo desarrollo curricular.
— Generalización de la oferta de Matemáticas como mención en los grados de Educación Infantil y Educación Primaria.
— Incluir las novedades derivadas del nuevo currículo en los planes de formación del profesorado de pedagogía terapéutica o educación especial, teniendo en cuenta las dificultades de aprendizaje de las matemáticas específicas del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo.
— En el caso de los formadores de los educadores y educadoras del primer ciclo de Educación Infantil, sería necesario adaptar las propuestas de formación a las necesidades implicadas en el nuevo real decreto, especialmente en relación a las habilidades lógico-matemáticas.
— En el caso de la formación inicial del profesorado de secundaria, es necesario revisar los planes de estudio del máster de profesorado para adaptarlos al nuevo enfoque curricular, con una especial atención a que las prácticas del alumnado en centros docentes se desarrollen en un entorno docente y metodológico adecuado.

Situaciones de aprendizaje

En los borradores de los Reales Decretos de las diferentes etapas se definen como situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas.

Durante el seminario se trató también este tema y la conveniencia de elaborar y difundir situaciones

de aprendizaje, ya que pueden ser un apoyo para los docentes de todos los niveles a la hora de diseñar actividades ricas y competenciales. En este sentido, en la figura 4 se incluye un ejemplo elaborado por Lluís Bonet Juan y M.ª Teresa Navarro Moncho.

Reales Decretos de ordenación y enseñanzas mínimas en la Eduación Infantil y la Educación Primaria

Dado que en los días previos al comienzo de este seminario ya estaban publicados el Real Decreto



Figura 4. Ejemplo de situación de aprendizaje con todos los elementos curriculares relacionados

95/2022, de 1 de febrero, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil y el Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria, nos pareció procedente realizar un análisis de las propuestas y recoger algunas consideraciones sobre las mismas.

En el momento de publicar estas conclusiones ya se han publicado el Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, así como el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.

EDUCACIÓN INFANTIL

Valoramos que en esta etapa el RD 95/2022 mencione diferentes dimensiones de la competencia matemática para facilitar la suave transición entre Infantil y Primaria. Sin embargo, el hecho de que el redactado del mismo no tenga la misma estructura que lo recogido en el RD 157/2022, y en los borradores de RD correspondientes a la Educación Secundaria y el Bachillerato, dificulta ver que el recorrido de los sentidos matemáticos comienza en esta etapa.

Vemos que en esta etapa se enfatiza en habilidades numéricas cuando desde nuestro punto de vista debiera ser más adecuado hablar en todo caso de habilidades lógico-matemáticas. Es así que se echa en falta la mención a la representación de datos (y otros aspectos del sentido estocástico), al trabajo con propiedades de figuras geométricas (entre otros aspectos del sentido espacial) o a la noción de magnitud (junto con otros aspectos del sentido de la medida).

EDUCACIÓN PRIMARIA

Valoramos la inclusión del sentido algebraico entre los sentidos matemáticos que se trabajan en primaria, reconociendo la importancia de promover una visión amplia de este sentido más allá del uso de variable y mucho más allá del uso de expresiones literales. De la misma manera, valoramos positivamente la intención de destacar la relación entre estadística y probabilidad a través del cambio de nomenclatura, conscientes de la necesidad de muchos maestros de ser acompañados para dar sentido a un término como «estocástico».

No podemos dejar de lamentar haber perdido el orden alfabético en el listado de sentidos que aparece en el documento de bases con la clara intención de no dar más importancia al sentido numérico que a los otros sentidos, tal como ha pasado tradicionalmente.

Por otro lado, lamentamos que no se mencione explícitamente la utilización de materiales manipulativos del sentido numérico en todos los ciclos o que el pensamiento computacional esté ligado a un sentido matemático concreto (en este caso el algebraico).

Juana M.ª Navas Pleguezuelos
IPEP de Almería
<formacion@fespm.es>

1 Instituciones representadas en el CEMat: la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO), la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas (SEHCYT), la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA), la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM) y la Real Sociedad Matemática Española (RSME).

2 <https://fespm.es/wp-content/uploads/2021/06/Bases-Matematicas-CEMat-mayo-2021.pdf>.

SUMA

Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje
de las matemáticas · **abril 2022**

– núm. 99 –



Consejo de Dirección
<direccion@revistasuma.es>

Iolanda Guevara Casanova
Departament d'Ensenyament
de la Generalitat de Catalunya
Universitat Autònoma de Barcelona

Daniel Sierra Ruiz
CPI El Espartidero, Zaragoza

Administración
<administracion@revistasuma.es>

Miguel Latorre García

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Web
<www.revistasuma.es>

Gloria Colás Bueno

Cubierta

Mercè Cassanyes i Caballeria
<mercecassanyes@gmail.com >

Diseño

Mercè Cassanyes i Caballeria

Maquetación y corrección

Ricardo Alonso Liarte
IES Salvador Victoria, Monreal del Campo (Teruel)

Iolanda Guevara Casanova

Julio Sancho Rocher
IES Avempace, Zaragoza
Universidad de Zaragoza

Daniel Sierra Ruiz

Consejo de Redacción

Maite Navarro Moncho
Centre Especific d'Eduació a Distància de la Comunitat Valencian (València)
Universitat de València
<teresa.navarro-moncho@uv.es>

Maria Àngels Portilla Rueda
CEIP Son Anglada, Palma
<manangels@gmail.com>

Julio Rodríguez Taboada
CPI Dos Dices, Rois (A Coruña)
<juliortab@gmail.com>

Juan Antonio Trevejo Alonso
IES Universidad Laboral, Gijón
<juanantral@gmail.com>

M.ª Teresa Valdecantos Dema
SIPEP Entre dos aguas, Algeciras, Cádiz
<matevalde@hotmail.com>

Santi Vilches Latorre
INS Vilamajor, Sant Pere de Vilamajor (Barcelona)
<svilches@xtec.cat>

Consejo Editorial

Miquel Albertí Palmer
<alberti.miquel@gmail.com >

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Universidad de Córdoba
<agustincarrillo@fespm.es>

Juan Martínez-Tébar Giménez
IES Alto de los Molinos, Albacete
<juanmtg1@gmail.com>

Onofre Monzó del Olmo
IES Veles e Vents, Torrent (Valencia)
Universitat de València
<onofre.monzo@uv.es>

Revista Suma
Tirada: 5 500 ejemplares
Depósito legal: Gr 752-1988
ISSN: 1130-488X
Twitter: @suma_fespm

Consejo Asesor

David Arnau Vera
Universitat de València
<david.arnau@uv.es>

Carmen Azcárate Giménez
Universitat Autònoma de Barcelona
<carmen.azcarate@uab.es>

Javier Bergasa Liberal
IES Navarro Villoslada, Pamplona
<jbergasl@educacion.navarra.es>

Salvador Caballero Rubio
IES Gaia, Sant Vicent del Raspeig (Alicante)
<salvador.caballero@gmail.com

Neila Campos González
Universidad de Cantabria
<camposn@unican.es>

Encarnación Castro Martínez
Universidad de Granada
<encastro@ugr.es>

Abilio Corchete González
IES Suárez de Figueroa, Zafra (Badajoz)
<acorchete@gmail.com>

Olimpia Figueras Mourut de Montppellier
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados IPN
México, México D.F. (México)
<figuerao@cinvestav.mx>

M.ª José Fuente Somavilla
IES Augusto González de Linares, Santander
<mj.fuente@yahoo.es>

Maria Luisa Girondo
Universitat Rovira i Virgili (Tarragona)
<marialuisa.girondo@urv.net>

Arturo Mandly Manso
IES José Manzano, Don Benito (Badajoz)
<armandly@gmail.com>

Rafael Martínez Calafat
IES La Plana, Castelló de la Plana
<rmartinez@vila-real.uned.es>

Ricardo Moreno Castillo
Profesor de matemáticas, Santiago de Compostela
<moreno_castillo@hotmail.es>

Pascual Pérez Cuenca
IES Figueras Pacheco, Alacant
<pascual.prz@gmail.com>

Antonio Pérez Sanz
IES Salvador Dalí, Madrid
<aperez.sanz@gmail.com>

Ana Belén Petro Balaguer
Universitat de les Illes Balears, Palma
<anabelen.petro@uib.es>

Luis Puig Mosquera
IES Sofía Casanova, Ferrol (A Coruña)
<luispuig@edu.xunta.es>

Mariano Real Pérez
Centro de Profesorado, Sevilla
<mariano31415@gmail.com>

Francesc Andreu Rosselló Llompart
Universitat de les Illes Balears, Palma
<cesc.rossello@uib.es>

Manuel José Sastre Álvarez
IES La Corredoria, Oviedo
<mjsastre@telecable.es>

Manuel Sol Puig
Profesor de Matemáticas, Vilassar de Mar (Barcelona)
<msol@xtec.cat>

Carlos Oswaldo Suarez Alemán
Universidad de Cádiz
<carlososwaldo.suarez@uca.es>

Francisco Villegas Martín
IES Fuente Nueva, El Ejido (Almería)
<pvillegas@thales.cica.es>

99

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Suma es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral cuyo objetivo es tratar sobre los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje y destinada, sobre todo, al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista *Suma* se edita en
Badalona (Barcelona) — España

SUMA

no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas

Normas de publicación

1. Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de *Suma* <articulos@revistasuma.es> o la dirección postal de la co-directora:

   Iolanda Guevara Casanova
   c/ Temple n.º 26, 2º, 2ª
   08911 Badalona

2. Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5 Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CD-ROM, DVD-ROM o *pen drive*).
3. Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato .TXT, .ODT, .RTF, .DOC, .DOCX, adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:
   a) El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

   Y a efectos de comunicación:
   b) El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.
4. Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (por ejemplo, institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión se reemplazarán las citas y referencias bibliográficas por «Autor, 2012» o «Autor y otros, 2012». En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
5. Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…
6. Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, y cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

   Ejemplo: Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.
7. El texto irá una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25 000 caracteres sin contar espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.
8. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes serán enviados preferentemente en formato TIF o EPS, aunque será admisible el formato JPEG, de modo que, a una resolución mínima de 300 ppp, la imagen tenga un tamaño mínimo de 8 × 8 cm, y en color original. Se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo estará claramente identificado y se indicará en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
9. Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto. Si esto no fuera posible, se incorporará como imagen. En tales casos se indicará el lugar que ocupan las fórmulas en el texto, haciendo referencia al nombre del archivo que las contiene.
10. Las referencias bibliográficas se dispondrán al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición.

    Ejemplos:

    Gómez, E. (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E. (1990*a*), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., y J. Pérez (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., J. Pérez y D. Hernández (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.

    En los artículos de revistas y capítulos de libro se seguirá la pauta que se muestra a continuación:

    Gómez, E. (1990), «Título», *Revista,* n.º 31, 35-56.
    Gómez, E. (1990), «Título», en J. Pérez (ed.), *Título,* Editorial, Lugar de edición, 13-23.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: «[…] supone un gran avance (Hernández, 1992)». Si el autor aparece explícitamente en el texto, tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: «[…] según Rico (1993)».
12. Si se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión *y otros.* Por ejemplo: «Bartolomé y otros (1982)», «Gelpi y otros (1987)». Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.
13. Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.
14. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
15. A la recepción del trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.
16. Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser evaluado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo, aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo o recomendarán posibles modificaciones acordes con las normas y criterios de *Suma*.
17. Si los dos informes son positivos, el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos, se desestimará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o no.
18. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
19. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Encarni Amaro Parrado (Tesorería de la FESPM)
C/ La Palma nº1, 1ºB,
23740, Andújar-Jaén.

por correo-e a: admin@fespm.es

Deseo suscribirme a la revista *Suma*:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico:

	Importe (€)
☐ Suscripción a partir del año (3 números) _____	
☐ N.os sueltos _____	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (IBAN ES79 2100 2153 3802 0010 9089)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

IBAN: ⌊⌊⌊⌊ Entidad:⌊⌊⌊⌊ Oficina:⌊⌊⌊⌊ DC⌊⌊ Cuenta⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista *Suma*.

Atentamente (fecha y firma):

Conforme a lo establecido en el art. 5 de la Ley Orgánica 15/1999 de Protección de Datos de Carácter personal, le informamos que los datos de carácter personal que Usted ha facilitado de forma voluntaria se incorporarán a un fichero automatizado cuyo responsable es la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), con el fin de llevar a cabo la gestión integral de nuestra relación comercial, cobrar tarifas, contactarle y enviarle información que pueda ser de su interés, estando prevista la comunicación de los mismos a aquellos profesionales y/o empresas que intervienen en la gestión del servicio solicitado, descritos en el Documento de Seguridad. Si no nos manifiesta lo contario entenderemos que Usted consiente el tratamiento indicado. Puede ejercitar sus derechos de acceso, cancelación, rectificación y oposición, mediante escrito dirigido a la dirección postal de SUMA junto con una fotocopia del DNI.